

Modelos Constitutivos

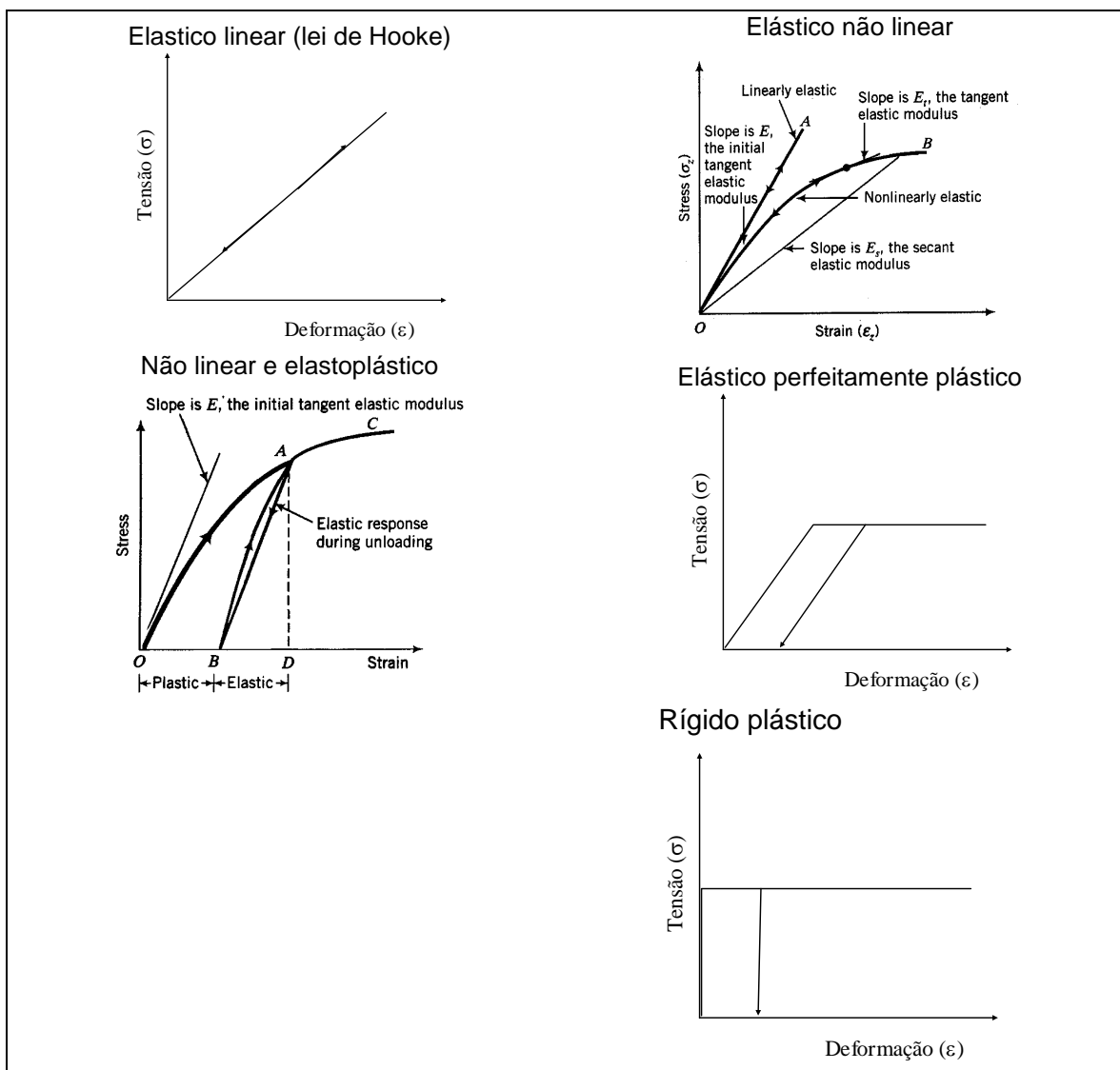
CONTEÚDO

1.	Introdução	2
1.1.	Modelo Hiperbólico	3
1.1.1.	Variação da curva tensão x deformação com a tensão confinante	6
1.1.2.	Previsão de curva tensão x deformação	7
1.1.3.	Comportamento inelástico.....	8
1.1.4.	Variação de volume não linear	9
1.1.5.	Não linearidade da envoltória de ruptura.....	12
1.1.6.	Comentários finais	14
1.1.7.	Exemplo de utilização do modelo hiperbólico.....	16
1.1.7.1.	Definição de c e ϕ	16
1.1.7.2.	Cálculo de K_h e n	16
1.1.7.3.	Cálculo de k_b e m	17

1. INTRODUÇÃO

Os modelos constitutivos têm a função de reproduzir, interpretar e prever o comportamento tensão x deformação de um determinado material. Dependendo do material, este comportamento pode ser distinto. A Tabela 1 mostra diversos exemplos.

Tabela 1. Curvas $\sigma \times \varepsilon$



1.1. Modelo Hiperbólico¹

O modelo hiperbólico² é um classificado na categoria de elástico e não linear. A grande vantagem deste modelo está na sua generalidade. O modelo pode ser usado para representar curvas $\sigma \times \varepsilon$ de solos que podem variar desde argilas, areias até pedregulhos. Pode ainda ser usado para análises em termos drenado ou não drenado.

Na sua forma original, o modelo emprega os módulos tangente (E_t), que variam em função dos níveis de tensão.

O modelo assume que as curvas tensão vs deformação, sob determinada tensão confinante σ_3 , podem ser aproximadas razoavelmente por hipérboles como mostrado na Figura 2.

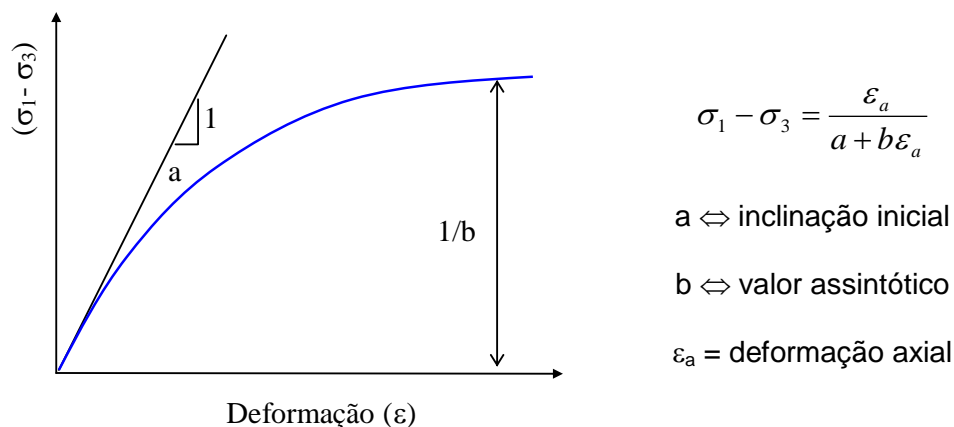


Figura 1. Curva hiperbólica

Duncan e Chang (1970) derivaram a equação da hipérbole chegando a

$$\frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\varepsilon_a} = \frac{1}{a + b\varepsilon_a} - \frac{b\varepsilon_a}{(a + b\varepsilon_a)^2}$$

para $\varepsilon = 0$ tem-se

¹ Duncan J.M. Byrne, P. Wong., K Marry, P . Strength, stress-strain and bulk modulus parameters for finite element analysis of stresses and movements in soil masses. Department of Civil Engineering, University of California, Berkley. Report no. UCB/GT/80-01,

² Duncan e Chang 1970, Nonlinear analysis of stress and strain in soils. Journal of Soil Mechanics and Foundation Division , ASCE, vol 96, no. SM5, September

Kondner e Zelasco (1963)

Konder (1963) - ASCE

$$\left[\frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\varepsilon_a} \right]_{\varepsilon=0} = \frac{1}{a} = E_i$$

Por outro lado, para $\varepsilon = \infty$, considerando neste caso $a \approx 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \sigma_1 - \sigma_3 = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_a}{a + b\varepsilon_a} = \frac{1}{b}$$

Esta hipérbole (Figura 2) pode ser matematicamente descrita pela seguinte equação:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\varepsilon_a}{a + b\varepsilon_a} = \frac{\varepsilon_a}{\frac{1}{E_i} + \frac{\varepsilon_a}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}}}$$

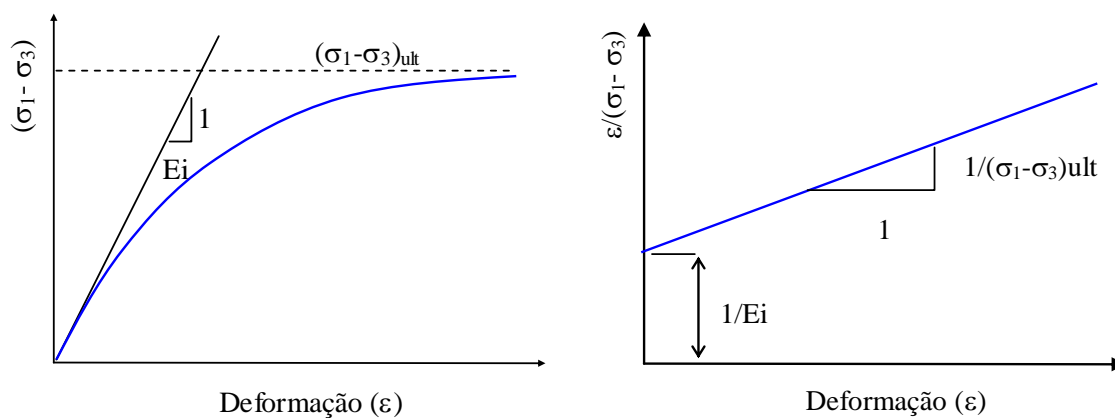
onde E_i é o módulo de Young inicial e $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ a assíntota da curva, associada à resistência do solo. Se a equação da hipérbole é transformada (Figura 2b), obtém-se uma relação linear.

Rearranjando a equação acima tem-se a equação de uma reta:

$$\frac{\varepsilon}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{1}{E_i} + \frac{1}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}} \varepsilon$$

A partir do traçado da curva transformada (Figura 2b) obtêm-se os valores dos parâmetros **a**

e **b**



(a) curva real

(b) curva transformada

Figura 2. Modelo hiperbolico

Quando se utilizam resultados experimentais (ensaios de compressão triaxial convencionais) os pontos muitas vezes não se ajustam perfeitamente ao longo da reta da curva

transformada. Solos rígidos tendem a apresentar uma concavidade voltada para cima, enquanto que solos moles fornecem uma concavidade na direção oposta.

Casos em que o trecho inicial da curva tensão x deformação é linear, a curva transformada tende a ser horizontal

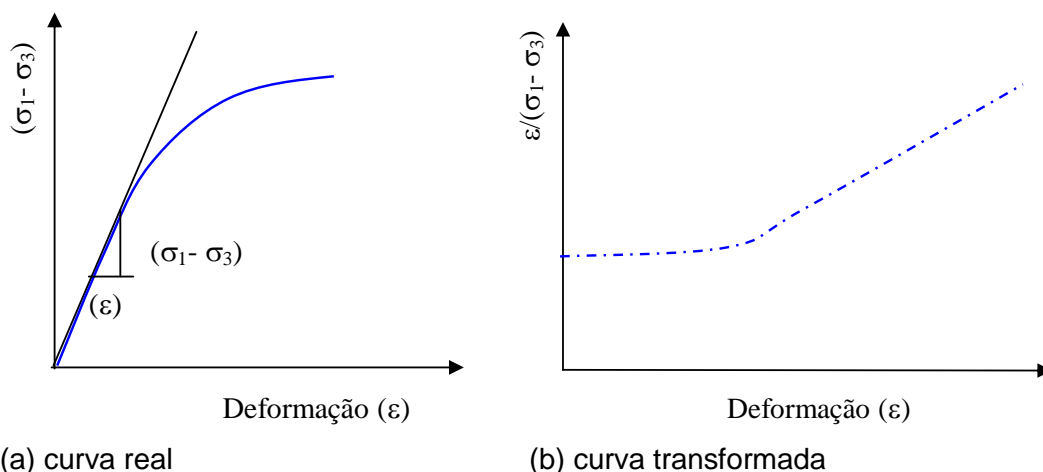


Figura 3. Aplicação do modelo hiperbólico

Caso não se disponha de ferramenta adequada para ajuste dos resultados experimentais, recomenda-se que a reta seja definida a partir de pontos correspondentes a 70% e 95% da resistência. Esta recomendação foi baseada em análise das centenas de curvas correspondentes a um grande número de materiais

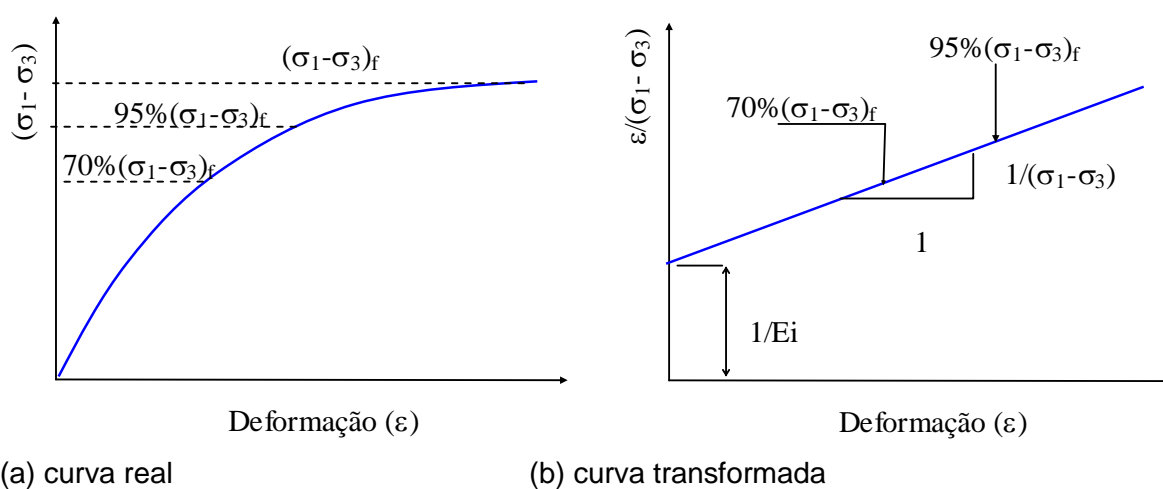


Figura 4. Seleção ideal de pontos de ajuste do modelo

1.1.1. Variação da curva tensão x deformação com a tensão confinante

Todos os solos apresentam curvas tensão x deformação que variam em função do confinamento. A variação de E_i com a tensão confinante (σ_3) é representada por equação sugerida por Janbu (1963)³:

$$E_i = K Pa \left(\frac{\sigma_3}{Pa} \right)^n \quad (2)$$

onde: K e n são parâmetros adimensionais e Pa a pressão atmosférica ($=101,3$ kPa). A função da pressão atmosférica é possibilitar a transformação de unidades; já que os valores de K e n independem da unidade adotada. A variação de E_i com a tensão confinante (σ_3) está representada graficamente na Figura 5

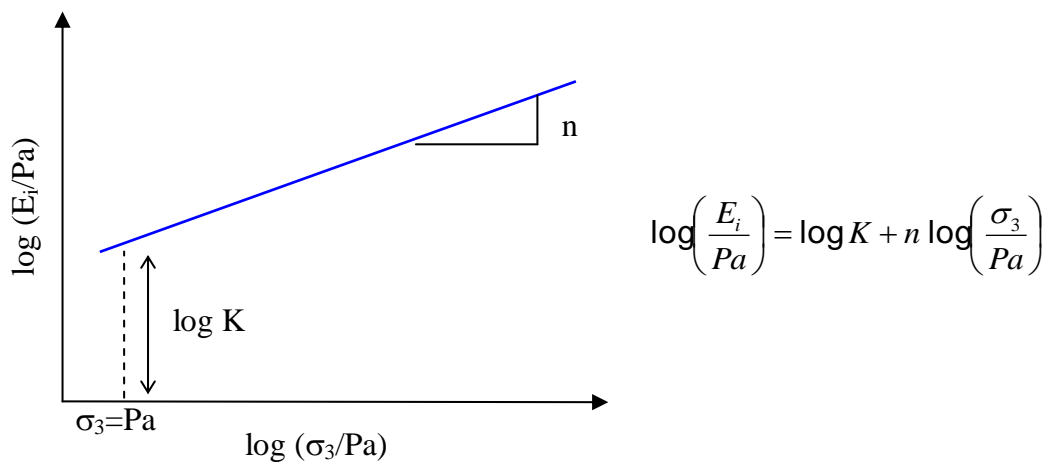


Figura 5. Variação do módulo tangente inicial com a tensão confinante

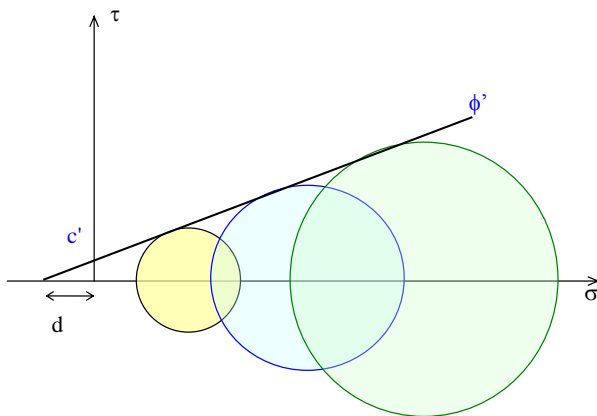
A variação de $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ com a tensão confinante σ_3 é feita relacionando-se $(\sigma_1 - \sigma)_{ult}$ com a resistência do solo, dada pela diferença $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = R_f (\sigma_1 - \sigma_3)_{ult} \quad (3)$$

onde R_f é denominado razão de ruptura. Em seguida, a associação de $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$ com σ_3 é feita usando o critério de ruptura de Mohr-Coulomb (Figura 6):

Na prática, R_f varia dependendo do ensaio considerado, recomenda-se adotar valor médio. Em geral, o valor de R_f situa-se entre 0,7 e 0,95.

³ Janbu (1963) Soil compressibility as determined by Oedometer and triaxial tests. European Conf. On Soil Mechanics and Foundation Engineering, Wiesbaden, Germany, vol 1, pp 19-25.



$$\tan \phi' = \frac{c'}{d} \dots \therefore d \sin \phi' = c' \cos \phi'$$

$$\sin \phi' = \frac{\frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2}}{d + \left(\frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2}\right)} \therefore \sin \phi' = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2d + (\sigma'_1 - \sigma'_3)}$$

$$2c' \cos \phi' + \sin \phi' (\sigma'_1 - \sigma'_3) = \sigma'_1 - \sigma'_3$$

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = \frac{2c \cos \phi + 2\sigma_3 \sin \phi}{1 - \sin \phi}$$

Figura 6. Critério de Mohr- Coulomb

1.1.2. Previsão de curva tensão x deformação

A partir da definição dos parâmetros do modelo hiperbólico (Tabela 2) a previsão da curva tensão x deformação para níveis de tensão confinante diferentes dos determinados experimentalmente pode ser feita a partir de:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\varepsilon_a}{\frac{1}{K Pa \left(\frac{\sigma_3}{Pa}\right)^n} + \frac{\varepsilon_a}{\left[\frac{2c \cos \phi + 2\sigma_3 \sin \phi}{1 - \sin \phi}\right] R_f}}$$

Tabela 2. Parâmetros do modelo hiperbólico para previsão de curvas $\sigma \times \varepsilon$.

Parâmetro	Função
K, n	Relaciona E_1 com σ_3
c, ϕ	Relaciona $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$ com σ_3
R_f	Razão de ruptura: relaciona $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ com $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$ - Tipicamente entre 0,7 e 0,95

1.1.3. Comportamento inelástico

A variação do módulo tangente (E) com a tensão confinante σ_3 é feita derivando a equação com relação a ε e usando as demais equações do modelo :

$$\frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\varepsilon_a} = \frac{1}{a + b\varepsilon_a} - \frac{b\varepsilon_a}{(a + b\varepsilon_a)^2} = \frac{a + b\varepsilon_a}{(a + b\varepsilon_a)^2} - \frac{b\varepsilon_a}{(a + b\varepsilon_a)^2} = \frac{a}{(a + b\varepsilon_a)^2} = E_t$$
$$E_t = \left[1 - \frac{R_f (\sigma_1 - \sigma_3)(1 - \sin\phi)}{2c \cos\phi + 2\sigma_3 \sin\phi} \right]^2 K Pa \left(\frac{\sigma_3}{Pa} \right)^n \quad (5)$$

Se a amostra é descarregada em algum instante de ensaio, os resultados indicam um módulo de descarregamento (E_{ur}) maior do que o módulo de carregamento, como mostrado na Figura 7. Com isso verifica-se o comportamento inelástico, uma vez que somente parte das deformações são recuperadas no descarregamento. No recarregamento existe uma histeresis, mas é neste trecho é possível aproximar o comportamento como elástico e linear; isto é mantendo o mesmo módulo E_{ur} ; isto é

$$(E_{ur})_{descarregamento} = (E_{ur})_{recarregamento}$$

podendo ser calculado por

$$E_{ur} = K_{ur} Pa \left(\frac{\sigma_3}{Pa} \right)^n \quad (6)$$

O parâmetro K_{ur} é geralmente superior a K . Solos arenosos densos podem fornecer valores 20% maiores e solos fofos tendem a mostrar valores 3 vezes superiores.

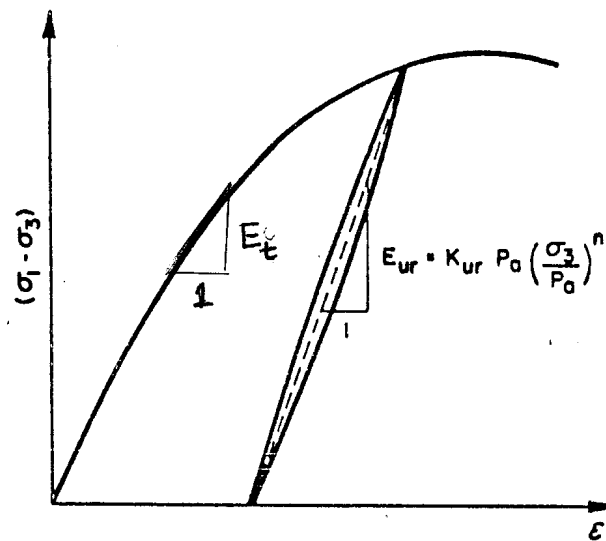


Figura 7. Variação dos modulo tangente inicial com a tensão confinante

1.1.4. Variação de volume não linear

Segundo a Teoria da Elasticidade, a inclinação da curva de variação de volume no ensaio triaxial convencional, é dada por:

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_v = \varepsilon_a + 2\varepsilon_r \\ \varepsilon_r = -\nu\varepsilon_v \end{array} \right| \therefore \varepsilon_v = \varepsilon_a (1 - 2\nu) \Rightarrow \frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_a} = (1 - 2\nu)$$

Muitos solos apresentam curvas de variação de volume, cujo incremento $d\varepsilon_v$ depende do nível de tensões (Figura 8). Este comportamento torna implícita a variação do coeficiente de Poisson com o nível de tensões ($\sigma_1 - \sigma_3$).

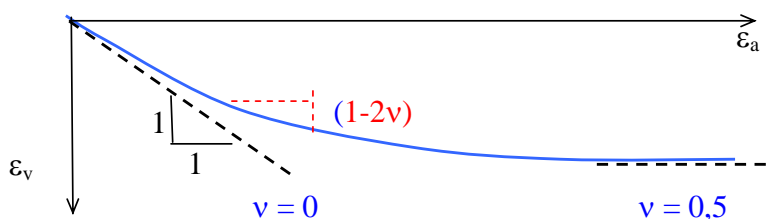


Figura 8. Variação de coeficiente de Poisson

Ainda segundo a teoria da elasticidade, define-se como módulo de deformação volumétrica B a relação:

$$B = \frac{\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2 + \Delta\sigma_3}{3\varepsilon_v}$$

Em um ensaio triaxial convencional, por exemplo, $\Delta\sigma_2 = \Delta\sigma_3 = 0$, então .

$$B = \frac{\Delta\sigma_1}{3\varepsilon_v} = \frac{\Delta\sigma_d}{3\varepsilon_v} = \frac{\Delta(\sigma_1 - \sigma_3)}{3\varepsilon_v}$$

mas

$$\left. \begin{aligned} E_t &= \frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\varepsilon_a} \\ \frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_a} &= (1 - 2\nu) \end{aligned} \right| \Rightarrow B = \frac{\Delta(\sigma_1 - \sigma_3)}{3\varepsilon_v} = \frac{E_t}{3(1 - 2\nu)}$$

A hipótese que o módulo de variação volumétrica (B) é independente do nível de tensões ($\sigma_1 - \sigma_3$) e que este varia com a tensão confinante, acarreta em uma aproximação razoável para representar a forma dessas mudanças de variação de volume. Com esta hipótese torna-se possível usar as ferramentas da teoria da elasticidade, já que esta pressupõe a independência de B e ($\sigma_1 - \sigma_3$).

O cálculo de B pode ser feito para um determinado valor de ($\sigma_1 - \sigma_3$), conforme mostra a Figura 9 (vide pontos A e A'). Na prática, as variações de volume são devidas não só a variações nas tensões cisalhantes, mas também devido a variações na tensão normal. Com isso, os valores de B mudam dependendo do ponto considerado. Após a análise de diferentes solos, recomenda-se que:

i) se a curva de variação de volume não atinge uma tangente horizontal antes de se mobilizar 70% da resistência, calcular B no ponto correspondente a 70% ($\sigma_1 - \sigma_3$)_i.

ii) se a curva de variação de volume atinge uma tangente horizontal antes de se mobilizar 70% da resistência, usar o ponto na curva de variação de volume em que a curva torna-se horizontal.

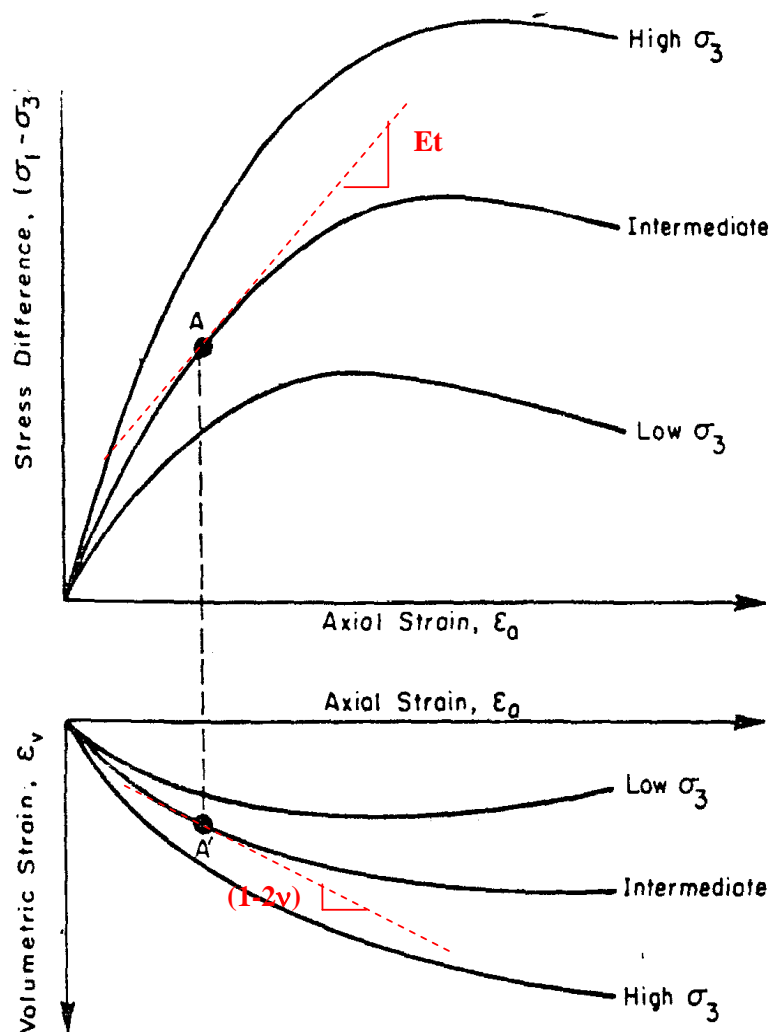


Figura 9. Variação de volume no cisalhamento

Os módulos de variação volumétrica devem ser calculados para diferentes níveis de tensão confinante. Em geral B cresce com a tensão confinante. A consideração do efeito da tensão confinante pode ser feita plotando-se os resultados, conforme mostra a Figura 10. A equação

$$B = K_b Pa \left(\frac{\sigma_3}{Pa} \right)^m$$

introduz os parâmetros K_b e m . Para maioria dos solos m varia entre 0 e 1. Valores negativos de m foram determinados em ensaios não drenados em argilas compactadas no ramo seco; fisicamente, este resultado significa a redução do valor de B com aumento da tensão confinante.

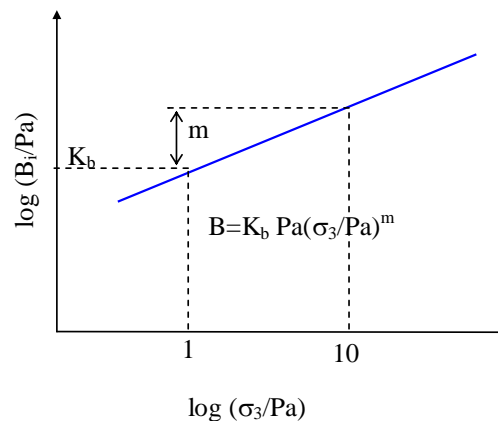


Figura 10. Variação do modulo volumétrico com a tensão confinante

É importante observar que quando o valor de B se aproxima de $E_t/3$, o valor do coeficiente de Poisson tende a zero. Por outro lado, se B é maior que $17E_t$ o coeficiente de Poisson se iguala a 0,5. Estes limites devem ser evitados; recomenda-se como regra pratica:

$$se B < \frac{E_t}{3} \Rightarrow B = \frac{E_t}{3} \Leftrightarrow \nu = 0$$

$$se B > 17E_t \Rightarrow B = 17E_t \Leftrightarrow \nu \approx 0,5$$

1.1.5. Não linearidade da envoltória de ruptura

Alguns solos apresentam envoltórias que seriam melhor representadas por curvas. Em solos não coesivos (areias, pedregulhos) esta curvatura torna difícil o estabelecimento de um único valor de ângulo de atrito que seja representativo de um determinado nível de tensões (Figura 11).

Por exemplo, sob o eixo de simetria de barragens de grande altura, as altas tensões confinantes podem estar associadas a valores reduzidos de ângulo de atrito, se comparado com o comportamento próximo a superfície, acarretando em uma dúvida na definição de do valor apropriado de ϕ' .

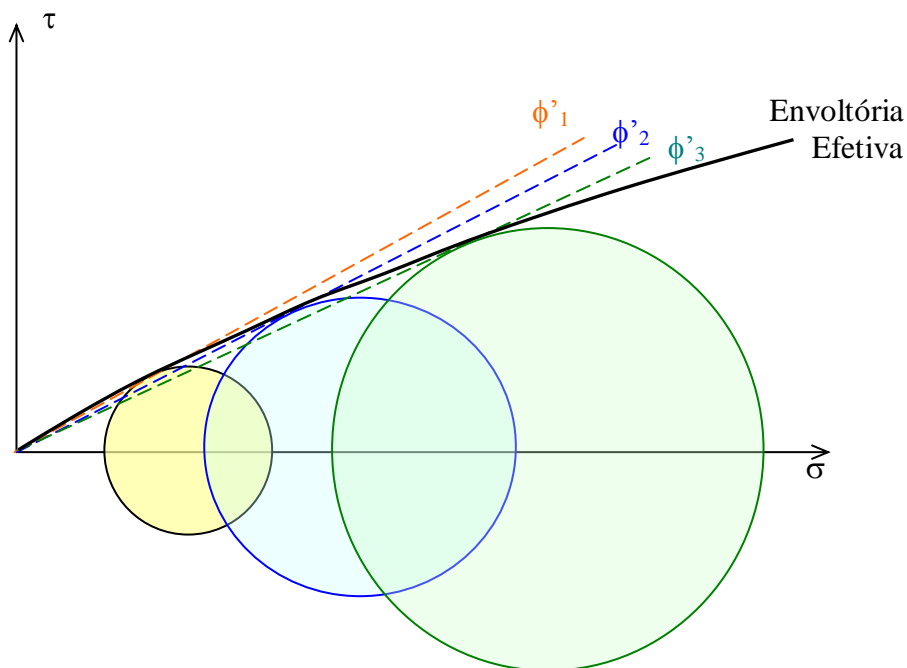


Figura 11. Variação de ϕ' com o nível de confinamento

Esta dificuldade pode ser minimizada considerando-se a variação de ϕ' com a tensão confinante. Como mostra a Figura 12, cada ensaio triaxial pode fornecer um determinado valor de ϕ' , calculado a partir de

$$\phi' = \text{sen}^{-1} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} \right)$$

Quando isso é feito, verifica-se uma redução de ϕ' com o nível de confinamento. Esta variação pode ser representada pela equação:

$$\phi = \phi_0 - \Delta\phi \log_{10} \left(\frac{\sigma_3}{Pa} \right)$$

onde ϕ_0 = ângulo de atrito para $\sigma_3 = Pa$ e $\Delta\phi$ = a redução deste ângulo para um aumento de 10 vezes de σ_3

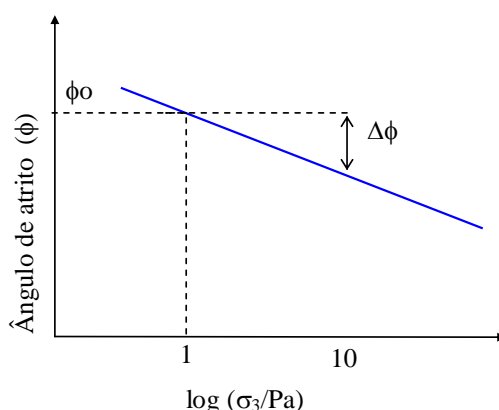


Figura 12. Variação do ângulo de atrito com a tensão confinante

1.1.6. Comentários finais

A Tabela 3 resume os parâmetros necessários para aplicação do modelo hiperbólico

Tabela 3. Parâmetros do modelo hiperbólico.

Parâmetro	Função
K, K_{ur}	Relaciona E_1 e E_{ur} com σ_3
n	
c	Relaciona $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$ com σ_3
$\phi_0, \Delta \phi$	Variação do ângulo de atrito
R_f	Razão de ruptura: relaciona $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ com $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$. Tipicamente entre 0,7 e 0,95
K_b	Valor de B / Pa para $\sigma_3 = Pa$
m	Tipicamente entre 0 e 1,0

As principais vantagens do modelo hiperbólico são

Os parâmetros podem ser determinados a partir de ensaios triaxiais convencionais. Na falta destes ensaios, os parâmetros podem ser estimados com base em ensaios de cisalhamento direto e adensamento.

Os parâmetros do modelo têm significado físico.

Pode-se usar a mesma relação, tanto para análise em termos de tensões efetivas (ensaio drenado) ou tensões totais (ensaio UU, não consolidado, não drenado). Em ensaios não drenados, recomenda-se analisar tensões totais ($\nu = 0,5$)

Os valores dos parâmetros podem ser calculados para diferentes tipos de solos e podem ser utilizados para estimar, razoavelmente, os valores no caso onde os dados existentes são insuficientes para a definição de todos os parâmetros envolvidos no problema em questão. A

Tabela 4 apresenta alguns valores típicos dos parâmetros hiperbólicos para diferentes tipos de solos.

Tabela 4. Valores típicos dos parâmetros hiperbólicos para diferentes tipos de solos.

Sistema unificado	γ_m (kN /m ³)	ϕ'_o (°)	$\Delta\phi'$ (°)	c' (kPa)	K	n	R_f	K_b	m
GW, GP SW, SP	23,80	42	9	0	600	0,4	0,7	175	0,2
	23,00	39	7	0	450	0,4	0,7	125	0,2
	22,22	36	5	0	300	0,4	0,7	75	0,2
	21,42	33	3	0	200	0,4	0,7	50	0,2
SM	21,42	36	8	0	600	0,25	0,7	450	0,0
	20,63	34	6	0	450	0,25	0,7	350	0,0
	19,84	32	4	0	300	0,25	0,7	250	0,0
	19,05	30	2	0	150	0,25	0,7	150	0,0
SM - SC	21,42	33	0	23,92	400	0,6	0,7	200	0,5
	20,63	33	0	19,14	200	0,6	0,7	100	0,5
	19,84	33	0	14,35	150	0,6	0,7	75	0,5
	19,05	33	0	9,57	100	0,6	0,7	50	0,5
CL	21,42	30	0	19,14	150	0,45	0,7	140	0,2
	20,63	30	0	14,35	120	0,45	0,7	110	0,2
	19,84	30	0	9,57	90	0,45	0,7	80	0,2
	19,05	30	0	4,78	60	0,45	0,7	50	0,2

As limitações do modelo são:

Sendo baseada na Lei de Hooke generalizada, a relação é mais adequada para a análise de tensões e movimentos antes da ruptura, na região em que o comportamento do solo é mais linear

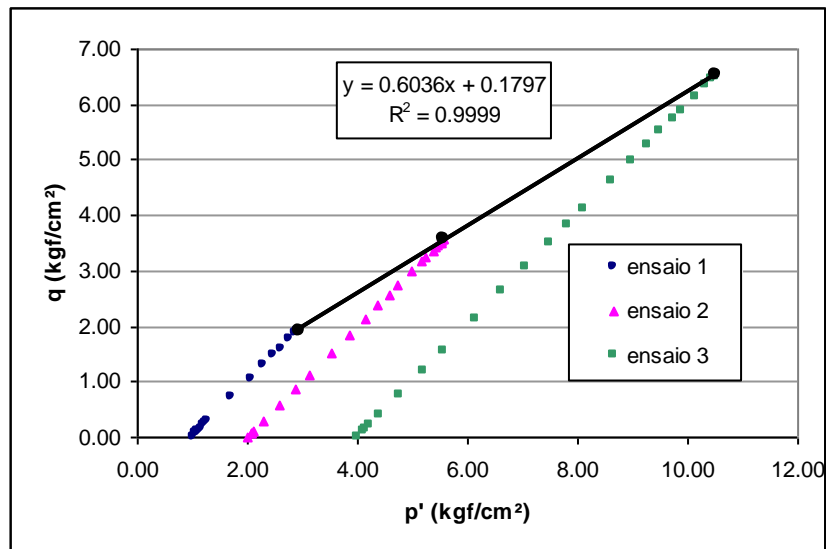
O modelo não inclui variações volumétricas devido a variações nas tensões cisalhantes; isto é, não é capaz de simular dilatância (solos densos)

Os parâmetros não são propriedades fundamentais dos solos, mas apenas coeficientes empíricos que representam o comportamento do solo para certas condições. Os valores dos parâmetros dependem da densidade do solo, do conteúdo de água nos vazios e dos valores de tensão e condições de drenagem usados nos ensaios.

Não simula trajetória de tensão, isto é não considera σ_2 .

1.1.7. Exemplo de utilização do modelo hiperbólico

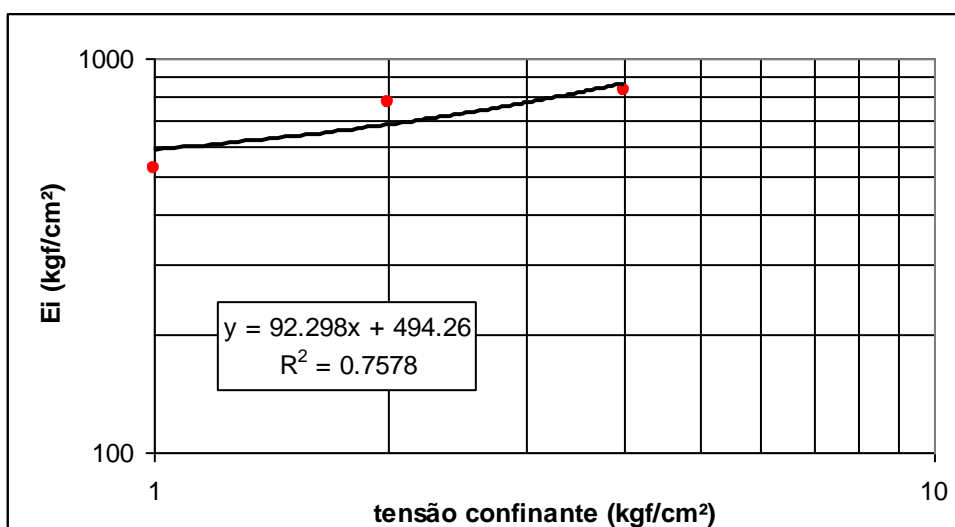
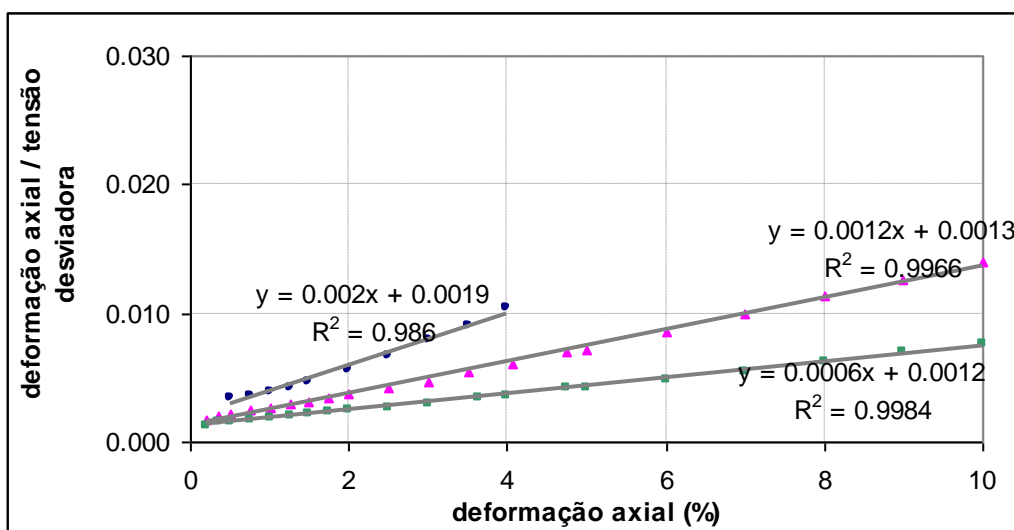
1.1.7.1. Definição de c e ϕ



Resultados			
a	c		0,2
(kgf/cm ²) =	0,18(kgf/cm ²) =	3	
	31,1		
$\alpha =$	$^{\circ}$	$\phi =$	37 ^o

1.1.7.2. Cálculo de K_h e n

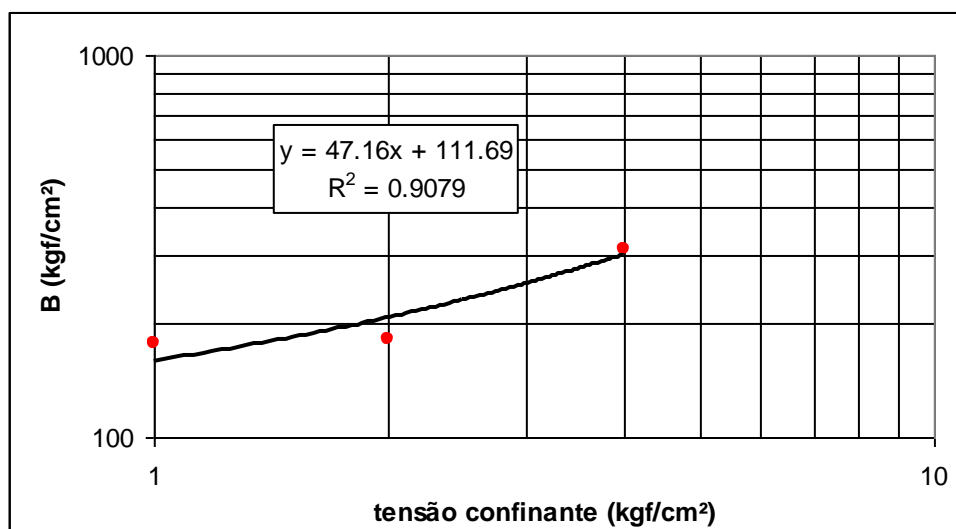
ensaio	σ_3 (kgf/cm ²)	a	E_i (kgf/cm ²)	b	$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_3}$ ult	R_f
1	1	0.0019	526	0.0020	5	0.76
2	2	0.0013	769	0.0012	8	0.86
3	4	0.0012	833	0.0006	17	0.78



1.1.7.3. Cálculo de k_b e m

Como a curva de variação de volume não atingiu a tangente horizontal para valores inferiores à 70% da resistência mobilizada, os valores adotados para tensão desviadora e variação volumétrica estão relacionados na tabela abaixo e correspondem aos valores de 70% da resistência mobilizada.

ensaio	σ_3 (kgf/cm ²)	$B_{70\%}$
1	1	176
2	2	180
3	4	309



Resultados:

Kb =	159
m =	0.480

A seguir estão plotadas as curvas tensão x deformação e as curvas de variação volumétrica obtidas em ensaio triaxial CTC e as respectivas curvas recuperadas com o modelo hiperbólico. Ressalta-se que o comportamento não foi satisfatoriamente representado, sendo essa uma das grandes limitações do modelo. Este problema deve-se ao fato do modelo considerar o coeficiente de Poisson constante durante todo o ensaio.

