

Apêndice D

Álgebra Linear, Sistemas Dinâmicos e Equações Diferenciais Ordinárias

D.1 Álgebra Linear e Espaços Vetoriais de Dimensão Finita

D.1.1 Vetores e bases

Definição: Espaços vetoriais são conjuntos com as seguintes propriedades [47, 40]:

1. A soma de elementos do conjunto e a multiplicação dos mesmos por um número escalar (real ou complexo) é definida;
2. Existe o elemento neutro da soma, \mathbf{Z} , tal que $\mathbf{X} + \mathbf{Z} = \mathbf{X}$;
3. Existe o elemento oposto, \mathbf{Y} , de qualquer elemento \mathbf{X} , tal que $\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \mathbf{Z}$.

Os elementos de um espaço vetorial denominam-se *vetores*. A soma de vetores tem as seguintes propriedades:

1. $\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_1$ (Comutatividade);
2. $\mathbf{X}_1 + (\mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_3) = (\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) + \mathbf{X}_3$ (Associatividade);

A multiplicação de vetores por escalares tem as seguintes propriedades:

1. $1\mathbf{X} = \mathbf{X}$;
2. $\alpha(\beta\mathbf{X}) = (\alpha\beta)\mathbf{X}$;
3. $\alpha(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) = (\alpha\mathbf{X}_1 + \alpha\mathbf{X}_2)$,

onde α e $\beta \in C$ (C é o conjunto dos números complexos)

Definição: Os vetores \mathbf{X}_i , com $i = 1, \dots, n$, onde n é um número finito, são linearmente independentes se a equação:

$$\alpha_1 \mathbf{X}_1 + \alpha_2 \mathbf{X}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{X}_n = \mathbf{Z} \quad (\text{D.1})$$

só se verificar se $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Definição: O número máximo n , de vetores linearmente independentes de um espaço vetorial denomina-se *dimensão do espaço vetorial*.

Definição: Todo conjunto de n vetores linearmente independentes de um espaço vetorial de dimensão n denomina-se de *base do espaço vetorial*.

Sejam $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$, um conjunto de vetores linearmente independentes de um espaço vetorial. Se a esse conjunto acrescentarmos um vetor $\mathbf{Y} \neq \mathbf{Z}$ a equação:

$$\beta \mathbf{Y} + \alpha_1 \mathbf{X}_1 + \alpha_2 \mathbf{X}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{X}_n = \mathbf{Z}$$

tem pelo menos uma solução em que β e ao menos um dos coeficientes $\alpha_i \neq 0$. Como $\beta \neq 0$ reescrevemos a equação acima na forma:

$$\mathbf{Y} = -\frac{\alpha_1}{\beta} \mathbf{X}_1 - \frac{\alpha_2}{\beta} \mathbf{X}_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\beta} \mathbf{X}_n$$

Definição: Os números $a_i = -\alpha_i/\beta$ denominam-se *coordenadas do vetor \mathbf{Y} na base \mathbf{X}_i* .

Teorema: As coordenadas de um vetor \mathbf{Y} qualquer, em uma base $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n\}$ são únicas.

Admitimos que o vetor \mathbf{Y} possa ser obtido através de duas combinações lineares distintas:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= a_1 \mathbf{X}_1 + a_2 \mathbf{X}_2 + \dots + a_n \mathbf{X}_n \\ \mathbf{Y} &= b_1 \mathbf{X}_1 + b_2 \mathbf{X}_2 + \dots + b_n \mathbf{X}_n. \end{aligned}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira obtemos:

$$(a_1 - b_1) \mathbf{X}_1 + (a_2 - b_2) \mathbf{X}_2 + \dots + (a_n - b_n) \mathbf{X}_n = \mathbf{Z}.$$

Como os vetores \mathbf{x}_i são linearmente independentes os números $(a_i - b_i)$ são todos iguais a zero, o que implica em que $a_i = b_i$ e demonstra o teorema.

D.1.2 Operadores lineares

Definição: Operadores lineares são funções $f : C^n \longrightarrow C^n$ tais que:

1. $f(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = f(\mathbf{X}) + f(\mathbf{Y})$;
2. $f(\alpha \mathbf{X}) = \alpha f(\mathbf{X})$.

Como exemplo de operadores lineares citamos o gradiente, o divergente, o rotacional e o laplaciano. A integral de uma função é também um operador linear. Uma matriz cujos elementos a_{ij} são números é um operador algébrico linear. O operador Derivada Substancial, é não linear.

D.1.3 Dimensão, imagem e núcleo de um operador algébrico linear

Seja um operador algébrico linear, representado por uma matriz A com n linhas e m colunas, quando aplicado a um vetor $\mathbf{X} \in \mathcal{R}^m$, produz como resultado, um vetor $\mathbf{B} \in \mathcal{R}^n$.

Definição: O subespaço de todos os vetores $\mathbf{X} \neq \mathbf{Z}$, que resultam da aplicação do operador A sobre vetores $\mathbf{B} \in \mathcal{R}^n$ se constitui na *Imagem* de A , representada por $\text{Im}(A)$ [40, 41].

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (\text{D.2})$$

O vetor \mathbf{B} pode ser interpretado como resultante de uma combinação linear dos vetores que compõe as colunas da matriz A , em que cada uma é multiplicada por um elemento de \mathbf{X} . A dimensão r da $\text{Im}(A)$ é igual ao número de colunas linearmente independentes de A . O número máximo de colunas linearmente independentes é n .

Definição: O *Núcleo* ou *Espaço Nulo* de A , representado por $\text{Nu}(A)$, é o subespaço de vetores $\mathbf{X} \in \mathcal{R}^m$, tal que $A\mathbf{X} = \mathbf{Z}$.

Vejamos a dimensão do $\text{Nu}(A)$. Consideramos o operador representado pela matriz A da Eq. D.2 e admitimos que as r primeiras colunas da mesma sejam linearmente independentes e as $m - r$ restantes possam ser obtidas por combinação linear da primeiras. Sejam \mathbf{A}_i os vetores representados pelas colunas de A . A coluna \mathbf{A}_{r+1} é obtida pela combinação linear:

$$x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \dots + x_r\mathbf{A}_r = \mathbf{A}_{r+1}.$$

Essa combinação linear é única. A equação acima pode ser reescrita como:

$$x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + \dots + x_r\mathbf{A}_r - \mathbf{A}_{r+1} = \mathbf{Z}.$$

Conseqüentemente, a aplicação da matriz A sobre o vetor $\mathbf{X}_{r+1} = (x_1, x_2, \dots, x_r, -1, 0, \dots, 0)$ resulta no vetor \mathbf{Z} . A operação pode ser repetida para a obtenção da coluna \mathbf{A}_{r+2} . Obtém-se um vetor $\mathbf{X}_{r+1} = (x_1, x_2, \dots, x_r, 0, -1, 0, \dots, 0)$. Os vetores \mathbf{X}_{r+1} e \mathbf{X}_{r+2} são linearmente independentes. Da mesma forma que o primeiro, $\mathbf{X}_{r+2} \in \text{Nu}(A)$. Repetindo-se a operação $m - r$ vezes encontra-se $m - r$ vetores linearmente independentes que pertencem ao Núcleo de A . Qualquer combinação linear dos mesmos resulta em um vetor que pertence ao Núcleo de A . O Núcleo de A se constitui de um espaço de dimensão $m - r$. Enunciamos portanto o seguinte:

Teorema: $\dim \text{Im}(A) + \dim \text{Nu}(A) = m$,

onde m é o número de colunas de A . No caso de um operador algébrico linear, representado pela matriz A de dimensões $n \times n$ no qual as n colunas que o formam forem linearmente independentes $\dim \text{Nu}(A) = 0$. O núcleo se constitui de um único ponto do espaço vetorial, que é o vetor nulo \mathbf{Z} .

Se as colunas de n elementos de um operador algébrico linear não forem linearmente independentes e só descreverem um espaço de dimensão $r < n$, essas colunas são ortogonais a um subespaço de dimensão $n - r$. O produto escalar dessas colunas pelos vetores que

formam uma base desse último subespaço é igual a zero. Podemos representar esse produto escalar fazendo:

$$A^T \mathbf{X} = \mathbf{Z},$$

onde A^T é a matriz transposta de A . A dimensão do espaço nulo de A^T é $n - r$. Como $\dim \text{Im}(A^T) + \dim \text{Nu}(A^T) = n$ concluímos que $\dim \text{Im}(A^T) = r$. Enunciamos então o seguinte:

Teorema: A dimensão r da imagem de um operador algébrico linear A é igual à dimensão da imagem do operador transposto A^T .

Cabe ressaltar que a dimensão do Espaço Nulo de A é $m - r$ e a de A^T é $n - r$.

Consideremos o caso de uma matriz quadrada de dimensões $n \times n$, cuja imagem tem dimensão $r \leq n$. Se $r = n$ as colunas são linearmente independentes e varrem o espaço todo. A matriz transposta também varre o espaço todo, isso é, se as colunas forem linearmente independentes, as linhas também o são. Se as colunas varrerem um espaço de dimensão $r < n$ as linhas varrerão um espaço de mesma dimensão, em virtude do teorema acima. Em particular, se as colunas não forem linearmente independentes, as linhas também não o são.

A mesma propriedade pode ser demonstrada de outra forma: se as colunas de uma matriz quadrada forem linearmente independentes o único vetor cuja imagem é vetor nulo, é o próprio vetor nulo. Pode-se interpretar o vetor $\mathbf{Y} = A\mathbf{X}$ como composto de elementos que resultam do produto escalar de cada linha da matriz pelo vetor \mathbf{X} . Se \mathbf{Y} for o vetor nulo, o vetor único vetor ortogonal a todas as linhas da matriz é o vetor nulo. E isso só ocorre se as linhas varrerem o espaço inteiro, isso é, se as linhas forem linearmente independentes.

Em sentido contrário, se as linhas forem linearmente independentes o único vetor ortogonal a todas é o vetor nulo e, conseqüentemente, a única combinação linear das colunas que resulta no vetor é obtida multiplicando cada coluna por zero e as colunas são linearmente independentes. Enunciamos o seguinte:

Teorema: A condição necessária e suficiente para que as linhas de uma matriz quadrada sejam linearmente independentes é que as colunas também o sejam.

D.1.4 Operadores biunívocos

Definição: Operadores lineares biunívocos são tais que cada ponto da imagem provém de um único ponto.

A imagem do ponto \mathbf{Z} , obtida pela aplicação de um operador algébrico linear sobre o mesmo é o ponto \mathbf{Z} . Se o Núcleo do operador for o ponto \mathbf{Z} , o operador é biunívoco. Mostremos essa propriedade. Se o operador não for biunívoco:

$$A\mathbf{X}_1 = \mathbf{Y} \quad \text{e} \quad A\mathbf{X}_2 = \mathbf{Y}.$$

Fazendo:

$$A\mathbf{X}_1 - A\mathbf{X}_2 = A\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2 = \mathbf{Z}.$$

Como o Núcleo de A é o ponto \mathbf{Z} , $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2$. Enunciamos o seguinte:

Teorema: A condição necessária e suficiente para que um operador algébrico linear seja biunívoco é que seu Núcleo seja o vetor \mathbf{Z} .

As afirmações de que um operador é biunívoco e de que seu Núcleo é o vetor \mathbf{Z} são portanto, equivalentes. Operadores binunívocos admitem um operador inverso. O inverso A^{-1} de um operador algébrico linear é tal que:

$$A^{-1}(A\mathbf{X}) = \mathbf{X}.$$

D.1.5 Mudança de base

Um vetor qualquer $\mathbf{X} \in \mathcal{R}^n$ pode ser expresso por uma combinação linear dos vetores (elementos) de uma base $\mathbf{e}_i, i = 1, \dots, n$. Usando a convenção de soma dos tensores cartesianos escrevemos:

$$\mathbf{X} = x_i \mathbf{e}_i.$$

O mesmo vetor pode ser expresso por uma combinação linear dos elementos de outra base $\mathbf{f}_j, j = 1, \dots, n$:

$$\mathbf{X} = x_i \mathbf{e}_i = y_j \mathbf{f}_j. \quad (\text{D.3})$$

Cada vetor da nova base \mathbf{f}_j é dado por uma combinação linear dos elementos da base \mathbf{e}_i :

$$\mathbf{f}_j = a_{ji} \mathbf{e}_i \quad (\text{D.4})$$

Substituindo a expressão de \mathbf{f}_j , dada pela Eq. D.4 em D.3 encontra-se:

$$\mathbf{X} = x_i \mathbf{e}_i = y_j a_{ji} \mathbf{e}_i,$$

donde conclui-se que:

$$x_i = y_j a_{ji}. \quad (\text{D.5})$$

Se os vetores $\{\mathbf{e}_i\}$ e $\{\mathbf{f}_j\}$ forem linearmente independentes as linhas da matriz A , de elementos a_{ji} , também o são. Admitindo ao contrário, que a primeira linha possa ser obtida por combinação linear das demais, têm-se:

$$a_{1i} = \sum_{k=2}^n \alpha_k a_{ki} \quad \mathbf{f}_1 = \sum_i^n a_{1i} \mathbf{e}_i.$$

Então:

$$\mathbf{f}_1 = \sum_{i=1}^n a_{1i} \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{k=2}^n \alpha_k a_{ki} \mathbf{e}_i = \sum_{k=2}^n \alpha_k \left(\sum_{i=1}^n a_{ki} \mathbf{e}_i \right) = \sum_{k=2}^n \alpha_k \mathbf{f}_k,$$

isso é, o vetor \mathbf{f}_1 poderia ser obtido através de uma combinação linear dos demais, o que contraria a hipótese de que os vetores \mathbf{f}_j são linearmente independentes.

A Eq. D.5 mostra que o vetor de coordenadas x_i é dado pela multiplicação do vetor de uma linha e n colunas, cujos elementos são as coordenadas de \mathbf{X} na nova base, por uma

matriz A , cujas linhas são formadas pelas coordenadas dos vetores da nova base, na base antiga. Essa equação pode ser reescrita sob a forma:

$$x_i = a_{ij}y_j.$$

Nesse caso as colunas da matriz que multiplica o vetor de elementos y_j são formadas pelas coordenadas dos vetores da nova base, na base antiga.

As colunas da matriz A , de elementos a_{ij} são linearmente independentes, Nessas condições, A é inversível. Denominamos: $Q^{-1} = A$. Podemos determinar as coordenadas de um vetor na nova base pela relação:

$$\mathbf{Y} = Q\mathbf{X},$$

onde $Q = A^{-1}$.

Uma matriz A aplicada a um vetor \mathbf{X}_1 tem como imagem um vetor \mathbf{X}_2 . Designemos por \mathbf{Y}_1 e \mathbf{Y}_2 a representação dos vetores \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 na nova base, isso é:

$$\mathbf{Y}_1 = Q\mathbf{X}_1 \quad \text{e:} \quad \mathbf{Y}_2 = Q\mathbf{X}_2$$

A matriz que, aplicada ao vetor \mathbf{Y}_1 tem como imagem o vetor \mathbf{Y}_2 produz o mesmo efeito que a matriz A , mas é diferente da mesma. Seja B essa nova matriz. Dizemos que A e B são matrizes similares, ou que A e B são representações em bases diferentes de um mesmo operador algébrico linear T . Procuremos a forma da matriz B . Temos que:

$$A\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 \quad \longrightarrow \quad QA\mathbf{X}_1 = Q\mathbf{X}_2 = \mathbf{Y}_2.$$

Como $\mathbf{X} = Q^{-1}\mathbf{Y}$, escrevemos:

$$QAQ^{-1}\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}_2.$$

A matriz que representa o operador T na nova base é dada por:

$$B = QAQ^{-1}.$$

D.1.6 Interpretação vetorial de um sistema de equações algébricas lineares

Um sistema de equações algébricas lineares da forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

pode ser reescrito na forma matricial dada pela Eq. D.2. Duas situações são possíveis [47]: ou o vetor B pertence ao subespaço varrido pelas colunas \mathbf{A}_i do operador que multiplica

o vetor de incógnitas \mathbf{X} e o sistema tem solução, ou B não pertence a esse subespaço e o sistema não admite solução.

Resolver um sistema de equações algébricas lineares significa portanto, encontrar todas as possíveis combinações lineares das colunas do operador, que resultem no vetor B . Enunciamos o seguinte:

Teorema: A solução de um sistema de equações algébricas lineares, quando existe, é dada por uma solução particular, que se constitui de qualquer combinação linear das colunas de A que resultem no vetor B , mais o Núcleo do operador, que é formado por um espaço de dimensão $m - r$, onde r é o número de vetores coluna linearmente independentes de A [47].

A solução particular é obtida atribuindo-se um valor arbitrário a cada uma das $m - r$ incógnitas que multiplicam as colunas que podem ser obtidas por combinação linear das demais; Multiplica-se as colunas pelas incógnitas às quais se atribuiu valor e subtrai-se os vetores resultantes, do vetor B . Como os vetores que restam no lado esquerdo da equação resultante são linearmente independentes, a combinação linear:

$$x_1 \mathbf{A}_1 + x_2 \mathbf{A}_2 + \dots + x_r \mathbf{A}_r = \mathbf{B} - x_{r+1} \mathbf{A}_{r+1} - x_{r+2} \mathbf{A}_{r+2} - \dots - x_m \mathbf{A}_m$$

tem solução única. Essa combinação linear completa a solução particular procurada. Cabe notar que existem $m - r$ soluções particulares linearmente independentes e não triviais, do sistema de equações algébricas lineares. Alguns casos particulares importantes são tratados abaixo.

Definição: Um sistema de equações algébricas lineares é homogêneo se o vetor formado pelos elementos b_i do membro direito das equações for o vetor \mathbf{z} .

Definição: Um sistema de equações algébricas lineares é regular se os vetores que formam as colunas da matriz de coeficientes que multiplicam as incógnitas forem linearmente independentes.

Dois casos importantes são abordados pelos teoremas abaixo:

Teorema: Um sistema homogêneo de equações algébricas lineares sempre admite solução. Se o sistema for regular a solução é o vetor \mathbf{Z} . Se os vetores que formam $m - r$ colunas da matriz de coeficientes puderem ser obtidas a partir das r restantes, o sistema admite como solução um espaço de dimensão $m - r$.

Teorema: Um sistema regular de equações algébricas lineares sempre admite solução e a solução é única.

Definição: Seja um sistema de equações algébricas lineares dado por $A\mathbf{X} = \mathbf{B}$, onde A é uma matriz de elementos a_{ij} . O sistema $A^T \mathbf{Y} = \mathbf{Z}$, onde A^T é a matriz de elementos a_{ji} (transposta de A) denomina-se sistema homogêneo transposto associado a $A\mathbf{X} = \mathbf{B}$.

D.1.7 Determinantes

O determinante de uma matriz M , cujas colunas são as coordenadas dos vetores A e B é dada por:

$$\det M = a_x b_y - a_y b_x \quad \text{onde:} \quad M = \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{pmatrix}.$$

Esse determinante pode ser interpretado como a área algébrica do paralelogramo do qual dois lados são os vetores A e B (ver Fig. D.1). A área desse paralelogramo é:

$$\text{Área} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \varphi$$

$$\sin \varphi = \sin (\varphi_A - \varphi_B) = \sin \varphi_A \cos \varphi_B - \sin \varphi_B \cos \varphi_A = \frac{b_y}{|\mathbf{B}|} \frac{a_x}{|\mathbf{A}|} - \frac{a_y}{|\mathbf{A}|} \frac{b_x}{|\mathbf{B}|}.$$

Substituindo-se a última expressão de $\sin \varphi$ na de cálculo da área do paralelogramo encontra-se:

$$\text{Área} = \det M.$$

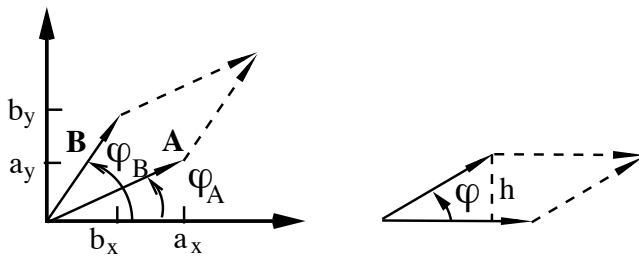


Figura D.1: Área algébrica de dois vetores.

Os argumentos acima apresentados são base para a seguinte:

Definição: Denomina-se área algébrica associada a dois vetores $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ à área do paralelogramo cujos lados são formados pelos dois vetores acima e por dois outros paralelos aos primeiros, com origem na extremidade dos mesmos. A área tem sinal positivo se os dois vetores estiverem no mesmo sentido de $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ e negativo caso contrário.

Denominamos por $D(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)$ o determinante dos dois vetores.

É claro que $D(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = 0$, se os dois vetores forem colineares. O determinante de dois vetores satisfaz às seguintes propriedades:

1. $D(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = -D(\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_1)$;
2. Se $\mathbf{A}_1 = \mathbf{B} + \mathbf{C}$ então $D(\mathbf{B} + \mathbf{C}, \mathbf{A}_2) = D(\mathbf{B}, \mathbf{A}_2) + D(\mathbf{C}, \mathbf{A}_2)$;
3. $D(\alpha \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = \alpha D(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)$, onde $\alpha \in \mathcal{R}$ ou \mathcal{C} ;
4. $D(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1$, onde \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 são os vetores de base unitários de um referencial ortogonal.

Definimos o determinante de um sistema de vetores de forma a generalizar a noção de área algébrica de dois vetores, acima exposta. Seja E_n um espaço vetorial relativo ao corpo de números reais ou complexos e seja $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, um referencial ortogonal, definido nesse espaço.

Definição: Dados n vetores $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$ nessa ordem de E_n definimos determinante de ordem n relativo a esses vetores e o representamos por $D(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n)$ a toda função escalar desses n vetores satisfazendo às seguintes condições [47]:

1. $D(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_i, \dots, \mathbf{A}_k, \dots, \mathbf{A}_n) = -D(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k, \dots, \mathbf{A}_i, \dots, \mathbf{A}_n)$;

2. Se $\mathbf{A}_1 = \mathbf{B} + \mathbf{C}$ então:

$$D(\mathbf{B} + \mathbf{C}, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n) = D(\mathbf{B}, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n) + D(\mathbf{C}, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n);$$

3. $D(\alpha \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n) = \alpha D(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n)$, onde $\alpha \in \mathcal{R}$ ou \mathcal{C} ;

4. $D(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$.

Pode-se mostrar que existe uma única função que satisfaz às quatro condições da definição acima (teorema da existência e unicidade). Enunciamos abaixo sem demonstrar, cinco teoremas a respeito de determinantes de um sistema de vetores:

Teorema 1: Se em $D(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n)$ um dos vetores for o vetor nulo, então: $D(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n) = 0$.

Teorema 2: Se em $D(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n)$ dois vetores forem idênticos então: $D(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n) = 0$.

Teorema 3: O valor de $D(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n)$ não se altera quando a um dos vetores se soma uma combinação linear dos demais.

Teorema 4: $D(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n) = 0$ se os n vetores não forem linearmente independentes.

Teorema 5: A condição necessária e suficiente para que um sistema de vetores seja linearmente independente é que seu determinante seja diferente de zero.

As três afirmações abaixo são equivalentes:

1. O operador T é biunívoco;
2. O espaço nulo de T é o vetor \mathbf{Z} ;
3. $\det T \neq 0$.

Os teoremas e definições seguintes tratam de matrizes e determinantes de matrizes:

Definição: Uma matriz A é regular se $\det A \neq 0$.

Teorema 6: Se $C = A + B$ então $\det C = \det A + \det B$.

Teorema 7: Se $C = AB$ então $\det C = \det A \det B$.

Em virtude desse teorema têm-se que:

$$\det Q \det Q^{-1} = \det I = 1 \quad \longrightarrow \quad \det Q^{-1} = \frac{1}{\det Q}.$$

I é a matriz identidade. Seu determinante é igual a 1. Uma consequência dessa propriedade é que os determinantes de duas matrizes similares são iguais:

$$\det B = \det Q \det A \det Q^{-1} = \det Q \det A \frac{1}{\det Q} = \det A.$$

O determinante é um *invariante* do operador, que depende da matriz que o representa. Outros dois invariantes de um operador algébrico linear são o traço e o número $(a_{ij}a_{ij} - a_{ii}a_{jj})/2$. A demonstração dessas duas propriedades é deixada como exercício.

Teorema 8: Se a matriz A for regular, a igualdade $AB = 0$ implica em que $B = 0$.

Demonstremos esse teorema. A matriz AB sendo nula, têm-se que $AB\mathbf{X} = \mathbf{Z}$. Como a matriz A é regular, admite uma inversa e podemos escrever $A^{-1}AB\mathbf{X} = B\mathbf{X} = \mathbf{Z}$, para todo vetor \mathbf{X} . A matriz que leva qualquer vetor para \mathbf{Z} é a matriz nula.

Teorema 9: Para que uma matriz A comute com uma matriz arbitrária é necessário e suficiente que os elementos de A sejam nulos, com exceção dos da diagonal principal, que devem ser iguais.

D.1.8 Autovalores e autovetores de um operador algébrico linear

Definição: Um vetor $\mathbf{X} \neq \mathbf{Z}$ é autovetor de um operador algébrico linear T se $T\mathbf{X}$ for colinear com \mathbf{X} , isso é, se $T\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}$. O número λ denomina-se autovalor de T , associado ao autovetor \mathbf{X} .

O autovalor λ associado ao autovetor \mathbf{X} é calculado pela equação:

$$(T - \lambda I)\mathbf{X} = \mathbf{Z}. \quad (\text{D.6})$$

Como procura-se um autovetor \mathbf{X} não trivial é necessário que o núcleo de $(T - \lambda I)$ não seja trivial, ou, de forma equivalente, que:

$$\det(T - \lambda I) = 0.$$

Os autovalores de um operador T de dimensões $n \times n$ são as raízes de uma equação polinomial de grau n em λ :

$$\prod_{i=1}^{n-\sum m_i} (\lambda - \lambda_i)^{m_i} = 0, \quad (\text{D.7})$$

onde m_i é a multiplicidade do autovalor λ_i . Essa equação característica tem n raízes reais ou complexas. Se a matriz for real, os coeficientes da equação polinomial são reais. Raízes complexas, caso existam, ocorrem em pares complexos conjugados. Um operador de dimensões $n \times n$ tem portanto n autovalores.

Os autovetores associados a um autovalor λ são determinados após o cálculo desse último. Se \mathbf{X} for um autovetor de T , $\alpha\mathbf{X}$ também o é. Um autovetor é portanto, identificado por sua direção, sua magnitude podendo ser qualquer. Da Eq. D.6 depreende-se que, se um autovalor for complexo, os autovetores correspondentes também o são. Mostramos a seguir o seguinte teorema:

Teorema: Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes.

Sejam $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ os autovetores, associado aos autovalores distintos, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, respectivamente. Os autovetores são linearmente independentes quando a equação:

$$\alpha_1\mathbf{X}_1 + \alpha_2\mathbf{X}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{X}_n = \mathbf{Z} \quad (\text{D.8})$$

só se verifica para $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Vejamos se esse caso ocorre. Aplica-se o operador:

$$(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \dots (T - \lambda_{n-1} I)$$

aos dois membros da Eq. D.8. Os binômios que compõe o produto acima são comutáveis entre si. Como $(T - \lambda_r I) \mathbf{X}_r = \mathbf{Z}$ obtém-se:

$$\alpha_n (T - \lambda_1 I) (T - \lambda_2 I) \dots (T - \lambda_{n-1} I) \mathbf{X}_n = \mathbf{Z}.$$

Como:

$$(T - \lambda_1 I) (T - \lambda_2 I) \dots (T - \lambda_{n-1} I) \mathbf{X}_n \neq \mathbf{Z}$$

é necessário que $\alpha_n = 0$. Consequentemente, a Eq. D.8 torna-se:

$$\alpha_1 \mathbf{X}_1 + \alpha_1 \mathbf{X}_2 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{X}_{n-1} = \mathbf{Z}. \quad (\text{D.9})$$

Aplica-se o operador:

$$(T - \lambda_1 I) (T - \lambda_2 I) \dots (T - \lambda_{n-2} I)$$

aos dois membros da Eq. D.10, obtém-se:

$$\alpha_{n-1} (T - \lambda_1 I) (T - \lambda_2 I) \dots (T - \lambda_{n-2} I) \mathbf{X}_{n-1} = \mathbf{Z}.$$

A igualdade só se verifica se $\alpha_{n-1} = 0$. A Eq. D.10 torna-se:

$$\alpha_1 \mathbf{X}_1 + \alpha_1 \mathbf{X}_2 + \dots + \alpha_{n-2} \mathbf{X}_{n-2} = \mathbf{Z}. \quad (\text{D.10})$$

Repetindo sucessivamente o procedimento conclui-se que todos os coeficientes α_j devem ser iguais a zero o que demonstra o teorema.

Como autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes um operador de dimensões $n \times n$ com autovalores distintos tem n autovetores linearmente independentes. Nesse caso, a cada autovalor corresponde apenas um autovetor e os autovetores formam uma base do espaço E_n , em que T é definido.

Um caso especial ocorre se o operador T tiver autovalores repetidos. A cada autovalor de multiplicidade m podem corresponder de 1 a m autovetores. Se o número de autovetores correspondentes a um autovalor for menor do sua multiplicidade os autovetores não formam mais uma base de E_n . Como exemplo, as matrizes [32]:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e:} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

têm a mesma equação característica $(\lambda - 4)^2 (\lambda - 2) = 0$. A primeira primeira tem dois autovetores linearmente independentes associados a $\lambda = 4$ e a segunda, apenas um. Situação semelhante ocorre com as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e:} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definição: Denomina-se *subespaço próprio* associado ao autovalor real λ o subespaço varrido pelos autovetores associados àquele autovalor.

Quando os autovetores de um operador T formam uma base, a matriz que o representa tem uma forma particularmente simples. Nesse caso pode-se atribuir aos autovetores as coordenadas $(1, 0, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $(0, 0, 0, \dots, 1)$, respectivamente, na base dos autovetores. Como $T\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}$ a matriz que representa o operador nessa base é diagonal, com os autovalores dispostos ao longo da diagonal principal. Todos os demais elementos são iguais a zero. Enunciamos o seguinte:

Teorema: Se os autovalores de um operador algébrico linear forem reais e distintos a matriz que o representa é diagonalizável. A diagonal principal é formada pelos autovalores de T .

As propriedades acima podem ser usadas para a resolução de sistemas de equações algébricas lineares, em que os autovetores do operador do membro esquerdo formam uma base. Pode ser usada também na resolução de equações diferenciais lineares ordinárias homogêneas, com coeficientes constantes.

Algumas propriedades adicionais e aplicações são discutidas nos exercícios 6 e 7 desse apêndice.

D.1.9 A Alternativa de Fredholm

O caso em que o operador linear \mathcal{L} de um sistema não homogêneo de equações algébricas lineares é singular só admite solução quando o vetor \mathbf{B} , do membro direito pertence ao subespaço varrido pelos vetores formados pelas colunas da matriz que representa o operador.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (\text{D.11})$$

Essa condição de solvabilidade se expressa pela exigência de \mathbf{B} seja ortogonal ao vetor \mathbf{u}^+ , que, é ortogonal a todos aos vetores formados pelas colunas de \mathcal{L} , conforme ilustrado na Fig. (D.2). Escrevemos:

$$\langle \mathbf{u}^+, \mathbf{B} \rangle = 0$$

o que se expressa como:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* & \dots & a_{n1}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & \dots & a_{n2}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n}^* & a_{2n}^* & \dots & a_{nn}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^+ \\ u_2^+ \\ \vdots \\ u_n^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

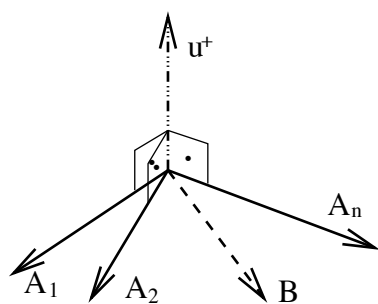


Figura D.2: A alternativa de Fredholm.

onde o asterístico indica o complexo conjugado. Dito de outra forma, o vetor \mathbf{B} deve ser ortogonal a \mathbf{u}^+ , que forma a base do núcleo do operador transposto, \mathcal{L}^T [47]. No caso da análise funcional, em que os elementos da matriz do lado esquerdo são operadores diferenciais, as variáveis x_i e os elementos b_i do vetor do lado direito são funções complexas,

têm-se uma situação semelhante. A condição de solvabilidade da Eq. D.11 se expressa pela imposição de que o vetor de funções do lado direito seja ortogonal vetor que gera o espaço nulo do operador adjunto de \mathcal{L} , que denominamos como \mathcal{L}^+ . Essa condição é conhecida como Alternativa de Fredholm [65, 42].

D.2 Sistemas Dinâmicos

D.2.1 Definições

Definição: Um sistema cujo estado é definido por um vetor de variáveis \mathbf{X} e cuja evolução obedece a um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem da forma:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\{\mathbf{X}(t), \boldsymbol{\gamma}, t\}) \quad (\text{D.12})$$

denomina-se um *Sistema Dinâmico*. Na equação acima, $\boldsymbol{\gamma}$ é um vetor de parâmetros.

Exemplos de sistemas dinâmicos são o Brusselador, proposto por Prigogine & Lefever em 1968 [34, 66]):

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= A - (B + 1)X + X^2Y \\ \frac{dY}{dt} &= BX - X^2Y \end{aligned}$$

e o modelo de interação entre populações conhecido com Lotka-Voltera:

$$\frac{du}{dt} = u - uv = f_1(u; v) \quad (\text{D.13})$$

$$\frac{dv}{dt} = -v + uv = f_2(u; v). \quad (\text{D.14})$$

Nos dois casos acima $\mathbf{F}(\{\mathbf{X}(t)\}, \boldsymbol{\gamma}, t) = \mathbf{F}(\{\mathbf{X}(t)\}, \boldsymbol{\gamma},)$. O membro direito das equações de evolução não depende explicitamente do tempo.

Definição: Sistemas dos quais o membro direito das equações de evolução não contém o tempo explicitamente, denominam-se *Sistemas Autônomos*.

Sistemas cuja evolução é regida por uma equação da qual o membro direito contém o tempo explicitamente, são não autônomos. A equação de Van der Pool forçada é um exemplo de sistema não autônomo:

$$\ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x = A \cos \omega t.$$

Em geral, sistemas regidos por equações de evolução de segunda ordem, ou de ordem mais alta, podem ser reescritos na forma da Eq. D.12. Como exemplo, a equação de Van der Pool pode ser reescrita na forma de um sistema de duas equações de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - (x^2 - 1)y + A \cos \omega t. \end{aligned}$$

Definição: Variáveis independentes do problema são àquelas às quais se pode atribuir valor em um certo instante de tempo.

Se as variáveis independentes do sistema forem as que definem a posição do mesmo o vetor \mathbf{F} é a velocidade com que o sistema se desloca no espaço e as componentes F_i de \mathbf{F} são as componentes $\dot{\mathbf{X}}$ da velocidade.

O número de variáveis independentes (ou de graus de liberdade) de um sistema dinâmico autônomo é igual ao número de equações de primeira ordem que o descrevem.

O estado de um Sistema Dinâmico pode ser representado no espaço de variáveis independentes do sistema.

Definição: O espaço de variáveis independentes de um Sistema Dinâmico denomina-se *Espaço de Fases* do sistema.

Um ponto do espaço de fases define um estado do sistema. Se o sistema se mantiver indefinidamente nesse ponto, o ponto é denominado *Ponto Fixo* do espaço de Fases. Quando o sistema se encontra em um Ponto Fixo, está em um estado estacionário.

Definição: Pontos do Espaço de Fases em que $d\mathbf{X}/dt = \mathbf{Z}$ denominam-se Pontos Fixos.

Sistemas não autônomos não têm, em geral, pontos fixos, embora esses possam existir, como no caso da Eq. de Mathieu:

$$\ddot{x} + (\alpha + \beta \cos t) x = 0.$$

Se o estado do sistema se alterar com o tempo o ponto que representa seu estado se desloca e descreve uma trajetória no Espaço de Fases. O objetivo da teoria de Sistemas Dinâmicos é determinar o conjunto de todas as trajetórias no Espaço de Fases.

D.2.2 Unicidade das trajetórias no espaço de fases

Teorema (Cauchy-Kovaleska): Seja um sistema dinâmico cuja evolução obedece a uma equação determinística da forma [65]:

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \gamma), \quad (\text{D.15})$$

Se \mathbf{F} for contínua e diferenciável, isso é, se:

$$|\mathbf{F}(\mathbf{X}(t + \Delta t)) - \mathbf{F}(\mathbf{X}(t))| \leq K |\mathbf{X}(t + \Delta t) - \mathbf{X}(t)|,$$

o comprimento de um pequeno trecho da trajetória próximo ao ponto \mathbf{X} do espaço de fases de dimensão finita é dado por:

$$\begin{aligned} ds &= (dX_1^2 + dX_2^2 + \dots + dX_n^2)^{1/2} \\ &= [(F_1 dt)^2 + (F_2 dt)^2 + \dots + (F_n dt)^2]^{1/2} = dt \left(\sum F_i^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

O vetor tangente à trajetória é dado por:

$$\frac{ds}{dX_j} = \frac{dt (\sum F_i^2)^{1/2}}{F_j dt} = \frac{(\sum F_i^2)^{1/2}}{F_j} = \left(1 + \sum_{i \neq j} \frac{F_i^2}{F_j^2} \right)^{1/2}.$$

A tangente é bem definida, exceto nos pontos fixos, onde $\mathbf{F} = \mathbf{Z}$, isso é, em pontos onde $d\mathbf{X}/dt = \mathbf{Z}$, ou pontos fixos, que são pontos singulares do espaço de fases. Consequentemente, as trajetórias não podem se cruzar, exceto nos pontos fixos. Essa restrição topológica impõe severas restrições à evolução de sistemas com apenas um ou dois graus de liberdade e os impede de apresentar comportamento caótico.

O regime caótico é caracterizado por comportamento aperiódico, movimento com grande número de frequências e sensibilidade à condição inicial, no sentido de que trajetórias inicialmente próximas se afastam exponencialmente, nos instantes iniciais da evolução.

D.2.3 Sistemas conservativos e dissipativos

Consideremos um pequeno volume no Espaço de Fases $dV = \prod dX_i$ e fixemos um número de estados dentro desse volume. dV é suficientemente grande para não conter apenas um estado. Como as trajetórias não se cruzam no Espaço de Fases o número de trajetórias geradas pela mudança dos estados iniciais se conserva. Podemos definir uma densidade de estados ρ e procuramos determinar como a mesma varia quando o hipercubo que contém os estados iniciais se desloca acompanhando a evolução dos mesmos e os contendo. Escrevemos:

$$\rho = \rho(t, X_i(t)).$$

A taxa de variação da densidade é dada por:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial X_i} \frac{dX_i}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \dot{X}_i \frac{\partial\rho}{\partial X_i}.$$

Consideramos um volume fixo no Espaço de Fases. Em virtude da conservação do número de trajetórias, o fluxo líquido de estados que saem do volume é igual ao negativo da taxa de acumulação do número de estados dentro do volume. A conservação do número de estados se expressa por:

$$\oint_S \rho \dot{X}_i n_i dA = - \int_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV.$$

Usando-se o teorema de Gauss transforma-se a integral de superfície em integral de volume:

$$\int \frac{\partial}{\partial X_i} \rho \dot{X}_i dV = - \int \frac{\partial\rho}{\partial t} dV$$

e obtém-se uma equação de continuidade para a densidade de estados:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X_i} \rho \dot{X}_i = 0,$$

ou ainda:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = - \operatorname{div} \dot{\mathbf{X}}.$$

Se $\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} = 0$ a densidade permanece constante e se $\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} < 0$, a densidade aumenta. Definimos:

Exemplo: O movimento de um corpo celeste que se move sob a força de atração de outro corpo evolui segundo a lei:

$$m\ddot{x} = G \frac{Mm}{x^2},$$

ou, na forma de duas equações de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v = f_1(x; v) \\ \dot{v} &= G \frac{Mm}{x^2} = f_2(x; v). \end{aligned}$$

Calculamos:

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial v} = 0.$$

Exemplo: equação de Van der Pool:

$$\ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x = 0.$$

Na forma de um sistema de equações de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v = f_1(x; v) \\ \dot{v} &= -x^2 - (x^2 - 1)v = f_2(x; v). \end{aligned}$$

Calculamos:

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial v} = -(x^2 - 1).$$

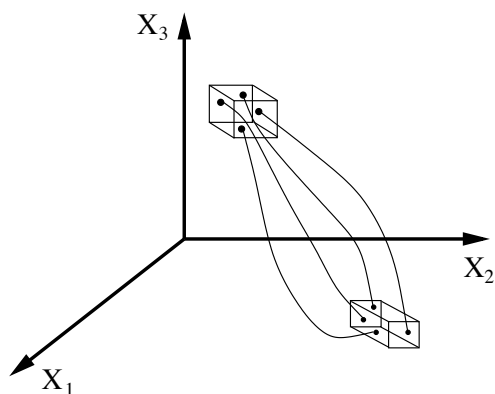


Figura D.3: Evolução de estados no espaço de fases.

volume se contrai.

Vê-se que $\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} > 0$ quando o coeficiente de viscosidade $(x^2 - 1)$ é negativo, isso é, quando $x^2 < 1$ e $\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} < 0$ quando o coeficiente de viscosidade é positivo. Os exemplos acima justificam a seguinte

Definição: Se $\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} = 0$ o sistema denomina-se conservativo. Sistemas dissipativos caracterizam-se por $\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} < 0$.

Se o sistema for dissipativo o volume que contém um certo número de estados em um instante inicial se contrai à medida que o tempo passa. Isso não significa que as trajetórias contidas no volume considerado inicialmente se aproximem, pois uma das dimensões do volume pode aumentar e as demais diminuírem, de forma que o

Exemplo: As equações de evolução de um sistema químico da forma:



são [80]:

$$\begin{aligned}\dot{c}_A &= -\kappa_1 c_A c_B + \kappa_2 c_C - r [c_A - c_A(0)] \\ \dot{c}_B &= -\kappa_1 c_A c_B + \kappa_2 c_C - r [c_B - c_B(0)] \\ \dot{c}_C &= \kappa_1 c_A c_B - \kappa_2 c_C - r\end{aligned}$$

Calculamos $\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}}$:

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} = -\kappa_1 (c_A + c_B) - 2r - \kappa_2.$$

Como $\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} < 0$, elementos de volume que contém estados iniciais se contraem.

Os sistemas físicos podem ser classificados, segundo o valor tomado por $\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} < 0$ em:

1. Conservativos e Hamiltonianos em particular, quando $\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} = 0$;
2. Dissipativos, ou com injeção de energia, quando $\operatorname{div} \dot{\mathbf{X}} \neq 0$;

Sistemas Hamiltonianos evoluem obedecendo a um a lei do tipo:

$$m\ddot{x} = f(x).$$

Liouville [65] mostrou, no século XIX, que sistemas Hamiltonianos são integráveis, desde que, para cada par $(\mathbf{x}; \dot{\mathbf{x}})$ de variáveis independentes exista uma constante do movimento. No caso de um sistema massa-mola:

$$m\ddot{x} + \kappa x = 0,$$

essa constante é a energia do sistema. No caso de um sistema de dois corpos que se movem sob ação de um campo gravitacional, há dois pares $(\mathbf{x}_1; \dot{\mathbf{x}}_1)$ e $(\mathbf{x}_2; \dot{\mathbf{x}}_2)$ e duas constantes, a saber a quantidade de movimento e a energia do sistema, que se conservam.

O teorema de Liouville diz mais: se o sistema for integrável, é possível determinar uma frequência ω_i do movimento, associada a cada par $(\mathbf{x}_i; \dot{\mathbf{x}}_i)$. Se a relação entre as frequências for um número racional, isso é, se:

$$\frac{\omega_i}{\omega_j} = N,$$

com N racional, o movimento é periódico. Por exemplo, se $\omega_1 = 2,25 \text{ Hz}$ e $\omega_2 = 5 \text{ Hz}$, ao fim de 100 s , o modo associado a ω_1 terá completado 225 ciclos e o associado a ω_2 terá completado 500 ciclos. Se a relação de frequências for um número irracional, o movimento será quase-periódico.

No caso de sistemas não integráveis, a periodicidade, ou quase-periodicidade não é assegurada, permitindo a existência de movimentos aperiódicos e, em particular, o surgimento de caos Hamiltoniano.

Sistemas dissipativos, não são, em geral, integráveis.

D.2.4 Atratores

Nos casos de sistemas dissipativos, $\text{div } \dot{\mathbf{X}} < 0$ e a densidade de trajetórias aumenta com o tempo. Se $\text{div } \dot{\mathbf{X}}$ for uma constante, o aumento é exponencial e o volume inicial cai a zero rapidamente. Em consequência o sistema evolui para um subespaço de dimensão menor do que a do espaço de fases. Esse subespaço denomina-se *atrator* [3, 65, 69, 80].

Definição: Atratores são subespaços compactos do espaço de fase, tais que, se o sistema estiver em um ponto desse subespaço, permanece no subespaço para sempre.

Subespaços compactos podem ser postos em correspondência bi-unívoca com conjuntos limitados. Uma trajetória em forma de espiral, que tem início em um ponto do espaço de fases, mas se curva indefinidamente para dentro não é um conjunto compacto, pois pode ser posta em correspondência bi-unívoca com uma semi-reta.

Atratores de sistemas com duas dimensões são os pontos fixos, as trajetórias fechadas, as trajetórias homoclínica e as trajetórias heteroclínicas. Trajetórias fechadas que não contém pontos fixos são características de movimentos periódicos.

Definição: Trajetórias homoclínicas são as que partem e retornam ao mesmo ponto fixo.

Definição: Trajetórias heteroclínicas são as que ligam pontos fixos distintos.

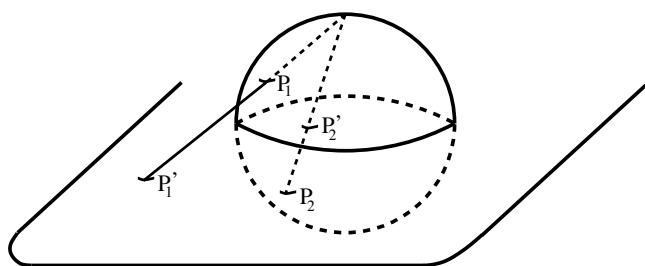


Figura D.4: A esfera não é um conjunto compacto, pois seus pontos, com exceção de um dos polos, podem ser postos em correspondência bi-unívoca com os pontos de um plano.

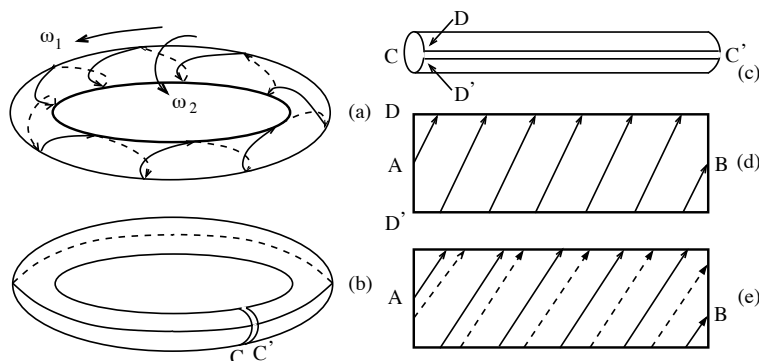
Fig. D.4.

Tóroides se constituem em conjuntos compactos. Trajetórias sobre toróides representam movimentos periódicos, ou quase-periódicos. Se a relação entre as duas frequências presentes for um número racional, as trajetórias são curvas fechadas e o movimento é periódico. É o caso do movimento mostrado na Fig. D.5(a). Cortando o toróide na direção radial e o abrindo, têm-se uma superfície cilíndrica. Cortando a superfície ao longo de uma linha reta paralela ao eixo do cilindro têm-se um retângulo como o mostrado na Fig. D.5(d) e (e). Sendo o movimento periódico, as trajetórias mostradas no retângulo obtido segundo o procedimento acima apresentam a forma mostrada em (d), com os pontos A e B coincidentes. Se a relação de frequências for um número irracional, em nenhum caso, quando uma das frequências completa um ciclo, as demais também o fazem. Os pontos A e B não coincidem mais e não coincidirão nunca. A linha tracejada na Fig. D.5(e) representa a continuação do

Sistemas com três ou mais dimensões podem ter os mesmos atratores encontrados em sistemas com duas dimensões e ainda mais alguns. Subespaços na forma de superfícies cilíndricas, de cones e pirâmides são excluídos, pois não são conjuntos compactos. Uma esfera, superfícies de um elipsóide de revolução e semelhantes também não o são pois seus pontos, com exceção de um dos polos, podem ser postos em correspondência bi-unívoca com um plano, conforme mostrado na

movimento. A superfície toroidal vai sendo toda ocupada sem que as trajetórias se cruzem ou se fechem. O movimento é quase-periódico.

Um cubo que contenha um conjunto de estados iniciais contidos do espaço de fase se contrai à medida em que o tempo passa e seu volume cai a zero. O sistema evolui para um atrator. Os atratores podem ser pontos fixos e curvas abertas ou fechadas que se localizam sobre atratores cuja topologia é a de superfícies de dimensão menor do que o número de dimensões do espaço de fases. A dimensão dessas superfícies embora menor do que a do espaço de fases é, no entanto, inteira. Mas os atratores podem não ser topologicamente equivalentes a conjuntos compactos de dimensão inteira, isso é, não podem ser postos em correspondência bi-unívoca com conjuntos compactos de dimensão inteira. Nesse caso, o atrator tem um dimensão *fractal*. Exemplo de atrator com essa característica é o do modelo de Lorenz (ver Cap. 18). O espaço de fases tem dimensão três e a dinâmica é dissipativa, o



que faz com que um volume contendo certo número de condições iniciais se contraia e tenda rapidamente a zero. O fato do sistema ter características dissipativas não o impede de apresentar comportamento caótico, algumas de suas dimensões podem aumentar e outras diminuir, de modo que o volume do hipercubo tenda a zero. O modelo de Lorenz evolui para um atrator de dimensão maior do que dois, podendo por isso apresentar comportamento caótico. Vejamos como caracterizar a dimensão de um conjunto fractal.

Figura D.5: Movimento sobre um toróide. (c), (d) e (e) mostram o toróide aberto. As seções C e C' mostradas em (b) e (c) e os pontos D e D' mostrados em (c) e (d) coincidem. Se a relação entre as duas frequências presentes for um número racional, as trajetórias são curvas fechadas e o movimento é periódico. É o caso do movimento mostrado em (a) e (d). Se a relação de frequências for um número irracional, em nenhum caso, quando uma das frequências completa um ciclo, as demais também o fazem. Os pontos A e B não coincidem mais e não coincidirão nunca. A linha tracejada na Fig. D.5(e) representa a continuação do movimento. A superfície toroidal vai sendo toda ocupada sem que as trajetórias se cruzem ou se fechem. O movimento é quase-periódico.

que faz com que um volume contendo certo número de condições iniciais se contraia e tenda rapidamente a zero. O fato do sistema ter características dissipativas não o impede de apresentar comportamento caótico, algumas de suas dimensões podem aumentar e outras diminuir, de modo que o volume do hipercubo tenda a zero. O modelo de Lorenz evolui para um atrator de dimensão maior do que dois, podendo por isso apresentar comportamento caótico. Vejamos como caracterizar a dimensão de um conjunto fractal.

D.2.5 Dimensão de um atrator fractal (Dimensão de Hausdorff)

A dimensão de um conjunto fractal caracteriza o nível de ocupação do espaço. Pode-se associar uma dimensão menor do que três ao sistema de canalizações e a rede elétrica de uma cidade, pois não ocupam o espaço todo. Pelo fato de não ocupar todo o espaço em que se encontra, sistemas com dimensão fractal podem compartilhar o espaço com outros. O aparelho circulatório, os canais do aparelho respiratório e o sistema nervoso de um animal também ocupam parte do espaço em que se encontram e o compartilham com outros sistemas e a eles se pode associar uma dimensão fractal.

Pode-se imaginar uma esfera de raio R , inteiramente preenchida por algum material. Para recobrir todo o material existente dentro da esfera com pequenas esferas de raio ε , com $\varepsilon \rightarrow 0$, são necessárias N esferas, tal que:

$$V = N \frac{4}{3} \pi \varepsilon^3 = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad \text{para:} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Dessa igualdade conclui-se que:

$$N \varepsilon^3 = R^3 \quad N = \left(\frac{R}{\varepsilon} \right)^3 \quad N \propto \varepsilon^{-3}.$$

Se a esfera for preenchida por esferas de raio $r < R$ o número de pequenas esferas de raio ε não será mais proporcional a ε^3 . Nesse caso teremos:

$$N = \left(\frac{R}{\varepsilon} \right)^D \quad \text{para:} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Generalizando as idéias acima, consideramos um conjunto de pontos em um espaço de dimensão d e seja N o número de hipersferas de raio ε necessárias para recobrir o conjunto de pontos. O número de esferas é tal que:

$$N(\varepsilon) \propto \left(\frac{R}{\varepsilon} \right)^D \quad \text{para:} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

R é o raio mínimo de uma esfera que recobre todo o conjunto de pontos. Definimos a dimensão de Hausdorff do conjunto de pontos pela relação [80]:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N}{\ln R/\varepsilon}. \quad (\text{D.16})$$

Alternativamente, a dimensão de Hausdorff pode ser definida como o número o limite N do número de hipercubos de aresta l , necessários para recobrir um conjunto de pontos [3]:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N}{\ln l/\varepsilon}. \quad (\text{D.17})$$

Como exemplo, determinamos a dimensão de Hausdorff de um segmento de reta, de um quadrado, do conjunto de Cantor em uma dimensão e do floco de neve (curva de Koch). No caso de um segmento de reta de comprimento l , o número de segmentos (hipersferas) de raio ε necessário para recobri-lo é $N = l/2\varepsilon$, donde conclui-se que $\varepsilon = l/2N$ e têm-se para a dimensão de Hausdorff:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{\ln l/2\varepsilon}{\ln l/2/\varepsilon} = 1.$$

Determinamos a dimensão fractal de um quadrado de lado l , usando a Eq. D.16. Nesse caso, o raio do menor círculo (hipersfera) que o recobre é: $R = l\sqrt{2}/2$. O número de círculos de raio ε que recobre uma aresta do quadrado é:

$$N = \frac{l}{2\varepsilon/\sqrt{2}} = \frac{l\sqrt{2}}{2\varepsilon}.$$

O número de círculos que recobre o quadrado todo é dado por N^2 . A dimensão de Hausdorff do quadrado é portanto:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln (l\sqrt{2}/2\varepsilon)^2}{\ln l\sqrt{2}/2\varepsilon} = 2.$$

A dimensão de Hausdorff de conjuntos de dimensão inteira coincide portanto com a dimensão do conjunto.

O conjunto de Cantor consiste dos pontos que restam de um segmento de reta de comprimento l do qual se retira inicialmente o terço central. Dos dois segmentos de comprimento $l/3$ retira-se o terço central e repete-se o processo indefinidamente (ver Fig. D.6).

A dimensão do conjunto de Cantor em uma dimensão é calculada como:

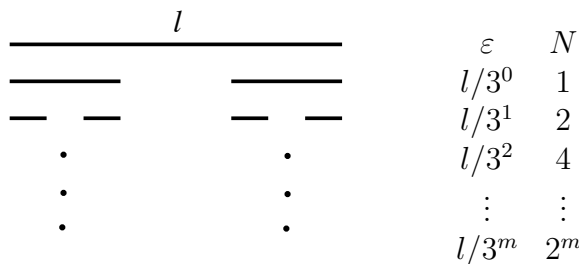
$$\begin{aligned} D &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^m}{\ln l / (l/3^m)} \\ &= \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,63 \end{aligned}$$

O conjunto de Cantor em duas dimensões é obtido de forma semelhante, considerando-se um quadrado de lado l . Divide-se cada aresta por três e retira-se os quatro quadrados que têm como uma das arestas o segmento central das arestas do quadrado original. O processo é repetido indefinidamente (ver Fig. D.6). A dimensão do conjunto de Cantor em duas dimensões é calculada como:

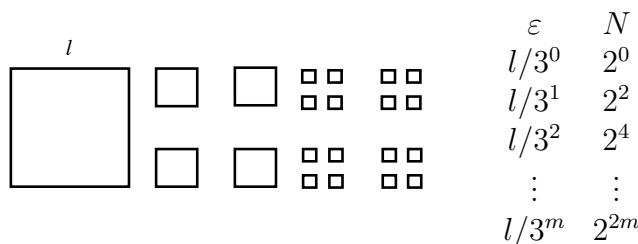
$$\begin{aligned} D &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^{2m}}{\ln l / (R/3^m)} \\ &= 2 \frac{\ln 2}{\ln 3} = 1,28 \end{aligned}$$

O floco de neve (curva de Koch) é obtido a partir de um triângulo do qual substitui-se o terço central de cada aresta por duas, cada uma de comprimento $l/3$, delimitando um novo triângulo que é incorporado à figura. Repete-se o processo indefinidamente (ver Fig. D.6). A dimensão do floco de neve é calculada abaixo:

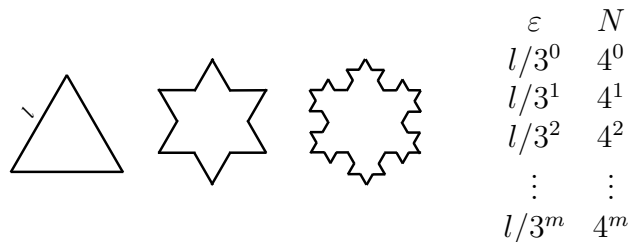
$$D = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^m}{\ln l / (l/3^m)} = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1,26$$



O conjunto de Cantor em uma dimensão



O conjunto de Cantor em duas dimensões



O floco de neve (curva de Koch)

Figura D.6: Conjunto de Cantor em uma e em duas dimensões e floco de neve (curva de Koch) – Cálculo da dimensão de Hausdorff.

D.2.6 Estabilidade linear de pontos fixos do espaço de fases

A evolução de sistemas Dinâmicos autônomos, nas proximidades de Pontos Fixos $\bar{\mathbf{X}}$, é regida por equações da forma:

$$\frac{d(\bar{x}_i + \tilde{x}_i)}{dt} = f_i(\bar{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{x}}) = f_i(\bar{\mathbf{X}}) + \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\bar{\mathbf{X}}} \tilde{x}_j,$$

onde \tilde{x}_i é a componente geral de um pequeno desvio do estado do sistema, em relação ao estado de repouso $\bar{\mathbf{X}}$. Como $\bar{\mathbf{X}}$ é um Ponto Fixo e não varia no tempo e $f_i(\bar{\mathbf{X}}) = \mathbf{Z}$ e a equação acima se reduz a um sistema de equações diferenciais ordinárias, lineares, homogêneas, com coeficientes constantes, dada por:

$$\frac{d(\tilde{x}_i)}{dt} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\bar{\mathbf{X}}} \tilde{x}_j,$$

ou, de forma completa, escrevendo as variáveis de perturbação \tilde{x}_j sem o asterisco:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (\text{D.18})$$

onde:

$$a_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\bar{\mathbf{X}}}.$$

As próximas seções se ocupam da resolução do sistema D.18. Se a perturbação for amplificada, o Ponto Fixo $\bar{\mathbf{X}}$ é *linearmente instável*. Se a perturbação desaparecer para tempos longos, o Ponto Fixo é *linearmente estável*. O estudo de equações diferenciais lineares, ordinárias, homogêneas, com coeficientes constantes, tem portanto, aplicação na análise de estabilidade linear de Pontos Fixos de sistemas Dinâmicos.

D.3 Equações Diferenciais Ordinárias com Autovalores Reais e Distintos

Uma equação diferencial ordinária, linear, homogênea, da forma

$$\dot{x} = ax \quad \text{com:} \quad x(t=0) = x_0, \quad (\text{D.19})$$

tem como solução:

$$x = x_0 e^{at}. \quad (\text{D.20})$$

Se $a > 0$ a solução diverge para tempos longos. Se $a < 0$ a solução tende a zero. O ponto $a = 0$ marca o limite entre soluções que divergem e soluções que tendem a zero. $a = 0$ é

um ponto de *bifurcação*. A solução da Eq. D.19 é única. De fato, se $y(t)$ for outra solução, então $\dot{y} = ay$. Desenvolvemos:

$$\frac{d}{dt}y e^{-at} = \dot{y} e^{-at} - ay^{-at} = ay e^{-at} - ay^{-at} = 0.$$

Consequentemente $y e^{-at}$ é uma constante. Seja x_0 essa constante.

$$y e^{-at} = x_0 \quad \longrightarrow \quad y = x_0 e^{at}.$$

A nova solução é idêntica à original, ou seja a Eq. D.19 admite uma única solução.

Dois equações ordinárias e lineares podem ser agrupadas na forma:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \\ & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.21})$$

Os elementos faltantes no operador da Eq. D.21 são iguais a zero. Enquanto a solução da Eq. D.19 $\in \mathcal{R}$, a solução de D.21 $\in \mathcal{R}^2$. O espaço \mathcal{R}^2 é obtido pela composição de dois espaços unidimensionais. Denotamos:

$$\mathcal{R}^2 = \mathcal{R} \oplus \mathcal{R}.$$

Os coeficientes a_{11} e a_{22} podem ser considerados como operadores que agem sobre as variáveis x_1 e x_2 . A matriz A é obtida pela composição dos operadores elementares a_{11} e a_{22} . De forma geral, pode-se compor espaços de dimensões diferentes:

$$\mathcal{R}^{r_1+r_2+\dots+r_n} = \mathcal{R}^{r_1} \oplus \mathcal{R}^{r_2} \oplus \dots \oplus \mathcal{R}^{r_n},$$

onde r_j é a dimensão do subespaço \mathcal{R}^j . O operador T , resultante da composição dos operadores T_j é obtido composto dispondo-se os operadores individuais, sucessivamente, ao longo da diagonal principal de T . Representa-se:

$$T = T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_n.$$

Um sistema de equações diferenciais ordinárias, lineares homogêneo, com coeficientes constantes, da pela Eq. D.18, com a condição inicial:

$$\begin{pmatrix} x_1(t=0) \\ x_2(t=0) \\ \vdots \\ x_n(t=0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$$

pode ser resolvido usando as ideias acima desenvolvidas. As coordenadas x_i referem-se a uma base ortonormal $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$. O sistema pode ser reescrito de forma abreviada, como:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} \quad \text{com:} \quad \dot{\mathbf{X}}(t=0) = \mathbf{X}_0. \quad (\text{D.22})$$

Se o operador representado pela matriz A tiver todos os autovalores $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ reais e distintos a matriz que o representa nessa base é diagonal. As equações estão desacopladas nessa base e a solução de cada uma é dada pela Eq. D.20. A estratégia de resolução do

sistema consiste portanto em diagonalizar a matriz, resolver cada equação e retornar à base original. O sistema D.18 se escreve sob a forma abaixo, na base dos autovetores:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad (\text{D.23})$$

onde y_i são as coordenadas de um ponto no espaço de fases, na base dos autovetores $\{\mathbf{f}_j\}$. A solução na nova base é:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{01}e^{\lambda_1 t} \\ y_{02}e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ y_{0n}e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Como a condição inicial é dada na base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ usa-se a matriz de mudança de base para a determinação daquelas condições, na nova base:

$$\mathbf{Y}_0 = Q\mathbf{X}_0.$$

O retorno à base original se faz utilizando-se a matriz Q^{-1} :

$$\mathbf{X} = Q^{-1}\mathbf{Y}.$$

As colunas de Q^{-1} são formadas com as coordenadas dos vetores \mathbf{f}_j , na nova base. Como as coordenadas de um vetor são únicas, a solução do sistema D.18 é única. Enunciamos o seguinte:

Teorema: A solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias, lineares, homogêneas, com coeficientes constantes, condições iniciais especificadas e autovalores reais e distintos tem como única solução:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}e_1^\lambda + \alpha_{12}e_2^\lambda + \dots + \alpha_{1n}e_n^\lambda \\ x_2 &= \alpha_{21}e_1^\lambda + \alpha_{22}e_2^\lambda + \dots + \alpha_{2n}e_n^\lambda \\ &\vdots \\ x_n &= \alpha_{n1}e_1^\lambda + \alpha_{n2}e_2^\lambda + \dots + \alpha_{nn}e_n^\lambda. \end{aligned}$$

Os números α_{ij} podem ser interpretados como sendo a projeção do autovetor \mathbf{f}_j na direção do vetor \mathbf{e}_i . Os autovetores são a condição inicial do problema base $\{\mathbf{f}_j\}$.

A Eq. D.23 permite interpretar a estratégia de diagonalização da matriz original, como um processo de decomposição do espaço \mathcal{R}^n em espaços elementares unidimensionais, definidos pelos autovetores do operador. Cabe observar que se parte dos autovalores de T for negativo o valor da variável ao longo de cada uma dessas direções tende a zero para tempos suficientemente longos. O oposto ocorre ao longo das direções cujos autovalores são positivos: as variáveis divergem. Como, em muitos casos, quando o valor de uma variável aumenta muito surgem efeitos não lineares que limitam esse crescimento, essas variáveis nem sempre divergem. Nessa situação, o sistema evolui para um subespaço ativo, de dimensão menor do que a do espaço em que o problema é definido. O que se procura muitas vezes é, portanto, reduzir a dimensionalidade do problema proposto e identificar os subespaços ativos.

D.4 Equações Diferenciais Ordinárias com Autovalores Complexos e Distintos

Se um operador algébrico linear tiver um autovalor complexo, o autovetor correspondente também será complexo. Sendo o operador real, os autovalores complexos ocorrem em pares conjugados. O autovetor associado ao conjugado de autovalor complexo é o conjugado do autovetor. Representando o complexo conjugado por um asterisco e lembrando que o complexo do produto de dois números complexos é o produto do complexo conjugado dos dois números têm-se:

$$(T\varphi)^* = (\mu\varphi)^* \quad \longrightarrow \quad T\varphi^* = \mu^*\varphi^*.$$

Consideremos uma equação da forma:

$$\frac{d}{dt}(x + iy) = (a + ib)(x + iy), \quad (\text{D.24})$$

ou:

$$\frac{dz}{dt} = \mu z. \quad (\text{D.25})$$

onde $z = x + iy$ e $\mu = a + ib$. Separando as partes real e imaginária dessa equação chega-se a:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - by \\ \dot{y} &= bx + ay. \end{aligned}$$

Esse sistema também pode ser escrito na forma matricial, como:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (\text{D.26})$$

Portanto, as Eq. D.25 e D.26 são equivalentes (ver também a Sec. ??). A solução da Eq. D.26 é:

$$z = z_0 e^{\mu t} \quad (\text{D.27})$$

isso é:

$$x + iy = (\kappa_1 + i\kappa_2) e^{(a+ib)t} = (\kappa_1 + i\kappa_2) e^{at} (\cos bt + i \operatorname{sen} bt).$$

Separando as partes real e complexa obtém-se:

$$x = e^{at} (\kappa_1 \cos bt - \kappa_2 \operatorname{sen} bt) \quad (\text{D.28})$$

$$y = e^{at} (\kappa_2 \cos bt + \kappa_1 \operatorname{sen} bt). \quad (\text{D.29})$$

A trajetória correspondente à solução é uma espiral descrita no sentido anti horário no Espaço de Fases se $a < 0$. Se $a = 0$ a trajetória é uma circunferência. Cabe observar que a solução ao longo da direção x não é independente da solução ao longo da direção y . Em

um sistema de duas equações com autovalores reais consegue-se decompor o espaço em dois subespaços uni dimensionais, com soluções independentes, no sentido de que a solução ao longo de uma das direções pode ser a trivial, se a componente da condição inicial ao longo de uma delas for igual a zero. Essa situação não ocorre no caso da Eq. D.26.

A solução dada pela Eq. D.25 é única. A demonstração segue os mesmos passos da feita para o caso de uma única equação com autovalor real (ver pág. 199).

Há casos de sistemas de duas equações com um par de autovalores complexos conjugados, em que o operador T não está na forma dada na Eq. D.26. É, por exemplo o caso em que o operador T é dado por:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores desse operador são $\mu = 1 \pm i$. Mostramos a seguir, que um sistema com um operador como o acima pode ser resolvido através de mudança para uma base na qual a matriz que representa o operador é da forma da encontrada na Eq. D.26. Mostramos inicialmente que os autovetores φ e φ^* são linearmente independentes. Supondo que:

$$\varphi^* = \alpha_2 \varphi,$$

têm-se que:

$$(T - \mu^*) \varphi^* = \alpha_2 (T - \mu^*) \varphi = \alpha_2 (T\varphi - \mu^* \varphi) = (\mu - \mu^*) \varphi = \mathbf{Z},$$

o que é uma conclusão falsa pois $\mu - \mu^* \neq \mathbf{Z}$. A conclusão decorre da hipótese de que os autovetores são linearmente dependentes, que é portanto, falsa.

Mostramos a seguir que as partes real e imaginária do autovetor complexo:

$$\varphi = \mathbf{U} + i\mathbf{V}$$

são linearmente independentes. \mathbf{U} e \mathbf{V} são dois vetores reais. As parte real e imaginária de φ podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \frac{1}{2}(\varphi + \varphi^*) \\ \mathbf{V} &= \frac{i}{2}(-\varphi + \varphi^*). \end{aligned}$$

Vejamos em que condições:

$$\alpha_1 \mathbf{U} + \alpha_2 \mathbf{V} = \mathbf{Z}.$$

Substituindo \mathbf{U} e \mathbf{V} pelas expressões acima encontramos:

$$\alpha_1 (\varphi + \varphi^*) + i\alpha_2 (-\varphi + \varphi^*) = \mathbf{Z}.$$

Reagrupando os termos:

$$(\alpha_1 - i\alpha_2) \varphi + (\alpha_1 + i\alpha_2) \varphi^* = \mathbf{Z}.$$

Como φ e φ^* são linearmente independentes é necessário que:

$$\begin{aligned}\alpha_1 - i\alpha_2 &= 0 \\ \alpha_1 + i\alpha_2 &= 0,\end{aligned}$$

o que só se consegue com $\alpha_1 = \alpha_2 = z$, onde z é o número complexo zero. As partes real e imaginária do autovetor φ são linearmente independentes. A base na qual o operador toma a forma de um número complexo, conforme Eq. D.26 é formada pelos vetores $(\mathbf{V}; \mathbf{U})$, nessa ordem. Mostramos essa propriedade:

$$T(\mathbf{U} + i\mathbf{V}) = (a + ib)(\mathbf{U} + i\mathbf{V}).$$

Separando as partes real e imaginária:

$$\begin{aligned}T\mathbf{U} &= a\mathbf{U} - b\mathbf{V} \\ T\mathbf{V} &= b\mathbf{U} + a\mathbf{V}.\end{aligned}$$

Na base $(\mathbf{V}; \mathbf{U})$, $\mathbf{V} = (1; 0)$ e $\mathbf{U} = (0; 1)$. Inserindo as coordenadas dos vetores na equação acima obtemos:

$$\begin{aligned}T\mathbf{U} &= T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \\ T\mathbf{V} &= T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Reagrupando os termos:

$$T\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

A matriz que representa o operador T é portanto:

$$B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Enunciamos os seguintes teoremas:

Teorema: Se o operador $T : E_n \rightarrow E_n$ tiver todos os autovalores distintos, reais e complexos, E_n e T têm uma decomposição $E_n = E_R \oplus E_C$ e $T = T_R \oplus T_C$, tal que $T_R : E_R \rightarrow E_R$ e $T_C : E_C \rightarrow E_C$, em que T_R tem autovalores reais e distintos e T_C tem autovalores em pares complexos conjugados distintos.

Teorema: Seja $T_C : E_C \rightarrow E_C$ um operador real com autovalores complexos conjugados μ e μ^* . E_C e T têm uma decomposição $E_C = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$ e $T = T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_n$ onde E_j são subespaços bidimensionais e T_j tem autovalores μ_j e μ_j^* .

Teorema: Seja $T_C : E_C \rightarrow E_C$ um operador real definido em um espaço bidimensional, com autovalores complexos conjugados μ e μ^* . Existe uma base em que a matriz que representa o operador é da forma:

$$B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Completamos essa seção com a definição de subespaço próprio associado a um autovalor complexo:

Definição: Denomina-se *subespaço próprio* associado ao autovalor complexo $\mu = a + ib$ o subespaço varrido pelas partes complexa e real dos autovetores associados àquele autovalor.

D.5 Exemplos – Sistemas com Duas Variáveis

Exemplo: Examinemos alguns sistemas com duas variáveis. Os autovalores de um operador da forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

a são as raízes equação:

$$\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0.$$

Os autovalores dependem apenas do traço e do determinante do operador, que são dois invariantes do mesmo e não dependem da matriz que o representa:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\text{tr}(A) \pm \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{onde:} \quad \Delta = \text{tr}^2(A) - 4\det(A).$$

A solução do problema $\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X}$ pode ser classificada nos seguintes casos, qualitativamente diferentes, segundo o tipo de raízes do polinômio característico:

1. $\Delta > 0$ e $\det(A) < 0$. O polinômio tem duas raízes reais de sinais contrários. A origem denomina-se um *ponto de sela* (“sadle node”);
2. $\det(A) > 0$ e $\text{tr}(A) > 0$. O polinômio tem duas raízes reais positivas. A origem é um *nó instável*;
3. $\det(A) > 0$ e $\text{tr}(A) < 0$. As duas raízes são reais e negativas. A origem é um *nó estável*;
4. $\Delta < 0$ e $\text{tr}(A) < 0$. O polinômio tem duas raízes complexas com parte real negativa. A origem é um *foco estável*;
5. $\Delta < 0$ e $\text{tr}(A) > 0$. O polinômio tem duas raízes complexas com parte real positiva. A origem é um *foco instável*;
6. $\Delta < 0$ e $\text{tr}(A) = 0$. O polinômio tem duas raízes complexas com parte real nula. A origem é um *centro*;

Exemplo: Equações de segunda ordem podem ser transformadas em um sistema de duas equações de primeira ordem. Um sistema massa-mola-amortecedor da forma:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0$$

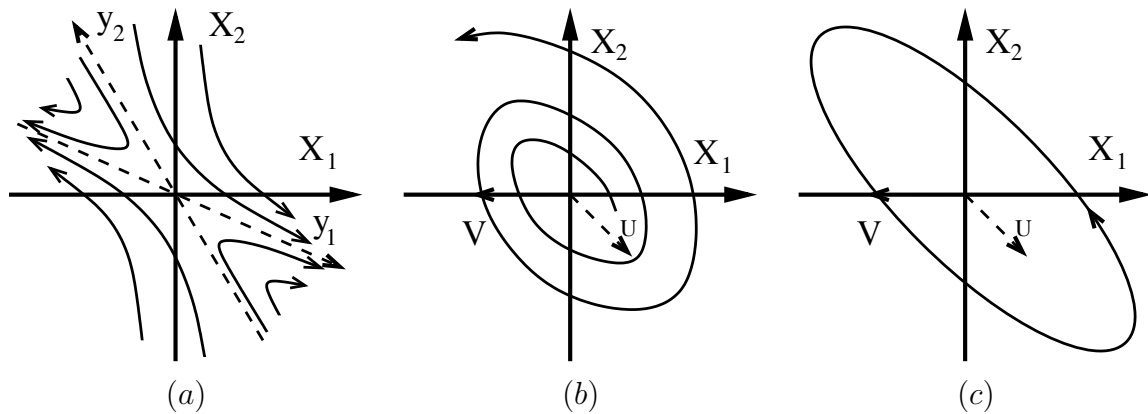


Figura D.7: A solução de um sistema linear de três equações com um autovalor real e positivo e um par de autovalores complexos conjugados: (a) Ponto de sela; (b) foco instável e (c) centro.

pode ser reescrito na forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\omega_n^2 x - 2\xi\omega_n v. \end{aligned}$$

Em forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}.$$

Os autovetores do operador são dados por:

$$\lambda_{1,2} = \omega_n \left[\xi \pm \sqrt{\xi - 1} \right].$$

Vê-se que a condição para que os autovalores sejam iguais não é facilmente preenchida pois requer $\xi = 1$. A existência de sistemas lineares com autovalores repetidos não é, em geral, comum.

Exemplo: Resolver a equação $\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X}$, onde:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{com a condição inicial:} \quad \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores do operador são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$. A origem é um ponto de sela. Os autovetores \mathbf{f}_1 e \mathbf{f}_2 são uma solução não trivial dos sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e:} \quad \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Uma solução possível é $\mathbf{f}_1 = (1; -1)$ e $\mathbf{f}_2 = (-1; 2)$. As matrizes Q^{-1} e Q são dadas, respectivamente, por:

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e:} \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A solução do sistema é dada, na nova base, por:

$$\begin{aligned}y_1 &= y_{01}e^{2t} \\ y_2 &= y_{02}e^{-t}.\end{aligned}$$

A condição inicial na nova base, \mathbf{Y}_0 , é dada por $\mathbf{Y}_0 = Q\mathbf{X}_0 = (5; 3)$. A solução do sistema é dada por $\mathbf{X} = Q^{-1}\mathbf{Y}$. Obtém-se:

$$\begin{aligned}x_1 &= 5e^{2t} - 3e^{-t} \\ x_2 &= -e^{2t} + 2e^{-t}.\end{aligned}$$

Exemplo: Resolver a equação $\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X}$, onde:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{com a condição inicial:} \quad \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores do operador são $\mu_{1,2} = 1 \pm i$. A origem é um foco instável. O autovetor complexo φ é uma solução não trivial da equação:

$$\begin{pmatrix} -1-i & -2 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Uma solução possível é $w_1 + 1 = 1 - i$ e $w_2 = -1$, isso é:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{U} + i\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A primeira coluna da matriz Q^{-1} é formada pelo vetor \mathbf{V} e a segunda, pelo vetor \mathbf{U} . Obtém-se para as matrizes Q^{-1} e Q :

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e:} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A solução do problema na base (\mathbf{V}, \mathbf{U}) é:

$$z = Ce^{\mu t} = y_1 + iy_2 = (C_1 + iC_2)e^t(\cos t + i\sin t),$$

ou:

$$\begin{aligned}y_1 &= e^t(C_1 \cos t - C_2 \sin t) \\ y_2 &= e^t(C_1 \sin t + C_2 \cos t).\end{aligned}$$

A condição inicial na nova base, \mathbf{Y}_0 , é dada por $\mathbf{Y}_0 = Q\mathbf{X}_0 = (-3; -1)$. Obtém-se:

$$\begin{aligned}y_1 &= -e^t(3 \cos t - \sin t) \\ y_2 &= -e^t(3 \sin t + \cos t).\end{aligned}$$

A solução do sistema é dada por $\mathbf{X} = Q^{-1}\mathbf{Y}$:

$$\begin{aligned}x_1 &= 4e^t (\cos t - \text{sen } t) \\x_2 &= e^t (3 \text{sen } t + \cos t).\end{aligned}$$

Exemplo: Resolver a equação $\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X}$, onde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{com a condição inicial:} \quad \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de A são $\lambda = 1$ e $\mu = 2 \pm 3i$. Uma solução para o autovetor associado ao autovalor real é $\mathbf{f} = (-10; 3; 1)$. Calculamos o autovetor complexo φ , associado a $\mu = 2 + 3i$. Esse autovetor é dado por uma solução de:

$$(A - \mu I)\varphi = \begin{pmatrix} -1 - 3i & 0 & 0 \\ 0 & -3i & -3 \\ 1 & 3 & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obtém-se $z_1 = 0$, enquanto uma solução para as duas outras componentes do autovetor é $z_2 = i$ e $z_3 = 1$. O autovetor é portanto:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

As matrizes Q^{-1} e Q são:

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e:} \quad Q = \begin{pmatrix} -1/10 & 0 & 0 \\ 3/10 & 1 & 0 \\ 1/10 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A matriz A_0 do operador na base do autovetor real e das partes complexa e real do autovetor complexo, é dada por:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

A solução na nova base é da forma:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_{01} e^t \\ e^{at} (\kappa_1 \cos bt - \kappa_2 \text{sen } bt) \\ e^{at} (\kappa_2 \cos bt + \kappa_1 \text{sen } bt) \end{pmatrix}.$$

A solução na base original é dada por $\mathbf{X} = Q^{-1}\mathbf{Y}$. Obtém-se:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} y_{01} e^t \\ 3y_{01} e^t + e^{at} (\kappa_1 \cos bt - \kappa_2 \text{sen } bt) \\ y_{01} e^t + e^{at} (\kappa_2 \cos bt + \kappa_1 \text{sen } bt) \end{pmatrix}.$$

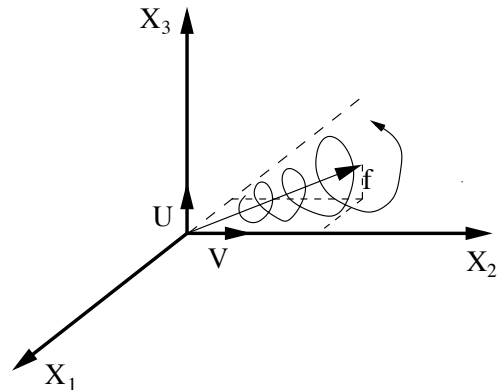


Figura D.8: A solução de um sistema linear de três equações com um autovalor real e positivo e um par de autovalores complexos conjugados.

Resta determinar as constantes y_{01} , κ_1 e κ_2 . No tempo $t = 0$:

$$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{01} \\ 3y_{01} + \kappa_1 \\ y_{01} + \kappa_2 \end{pmatrix}$$

Donde obtém-se $y_{01} = 1$, $\kappa_1 = -1$, $\kappa_2 = 2$. A solução é portanto:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} e^t \\ 3e^t - e^{at}(\cos bt + 2\operatorname{sen} bt) \\ e^t + e^{at}(2\cos bt - \operatorname{sen} bt) \end{pmatrix}.$$

A solução é uma espiral de raio crescente que se desloca com velocidade que cresce exponencialmente na direção do autovetor \mathbf{f} .

D.6 Exponencial de Operadores

Define-se a exponencial de um operador T pela relação [40]:

$$\exp(T) = \sum_{\kappa=0}^{\kappa=\infty} \frac{T^\kappa}{\kappa!}. \quad (\text{D.30})$$

onde $T^0 \stackrel{\text{def}}{=} I$. Pode-se mostrar que a série de termos de $\exp(T)$ é absolutamente convergente, isso é, que a série:

$$\sum_{\kappa=0}^{\kappa=\infty} N\left(\frac{T^\kappa}{\kappa!}\right)$$

converge. Na expressão acima $N(T^\kappa/\kappa!)$ é uma norma do κ -ésimo termo da série. Pode-se verificar que se:

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{então:} \quad \exp(T) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Demonstramos a seguir a seguinte

Proposição: Sejam Q , S , T e B , operadores no \mathcal{R}^n . Então:

1. Se $B = QTQ^{-1}$ então: $\exp(B) = Q \exp(T) Q^{-1}$;
2. Se $TS = ST$ então: $\exp(T + S) = \exp(T) \exp(S)$;
3. $\exp(-T) = [\exp(T)]^{-1}$;
4. Se

$$T = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{então:} \quad \exp(T) = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen} b & \cos b \end{pmatrix};$$

$$5. \frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

A demonstração da primeira propriedade é feita pela aplicação da definição de exponencial de um operador:

$$\begin{aligned} \exp(B) &= I + QTQ^{-1} + \frac{QTQ^{-1}QTQ^{-1}}{2!} + \dots = QIQ^{-1} + QTQ^{-1} + \frac{QT^2Q^{-1}}{2!} + \dots \\ &= Q \left(I + T + \frac{T^2}{2!} + \dots \right) Q^{-1} = Q \exp(T) Q^{-1}. \end{aligned}$$

Para demonstrar a segunda propriedade usamos a definição de binômio de Newton:

$$(S + T)^n = n! \sum_{j+k=n} \frac{S^j T^k}{j! k!}.$$

A utilização do binômio de Newton pressupõe que a multiplicação dos dois termos é comutável. De fato, fazendo o quadrado da soma de dois números a e b , têm-se:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2.$$

o que mostra a necessidade de que a multiplicação seja comutável, para que se obtenha o resultado $a^2 + 2ab + b^2$. Aplicando o binômio de Newton no cálculo da exponencial a $S + T$ obtemos:

$$\begin{aligned} \exp(S + T) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(S + T)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{1}{n!} \sum_{j+k=n} \frac{S^j T^k}{j! k!} = \left[\frac{S^0 T^0}{0! 0!} \right] + \\ &\left[\frac{S^0 T^1}{0! 1!} + \frac{S^1 T^0}{1! 0!} \right] + \left[\frac{S^1 T^1}{1! 1!} + \frac{S^0 T^2}{0! 2!} + \frac{S^2 T^0}{2! 0!} \right] + \left[\frac{S^0 T^3}{0! 3!} + \frac{S^1 T^2}{1! 2!} + \frac{S^2 T^1}{2! 1!} + \frac{S^3 T^0}{3! 0!} \right] + \dots \\ &= I + T + S + \frac{S^2}{2!} + ST + \frac{T^2}{2!} + \frac{T^3}{3!} + S \frac{T^2}{2!} + \frac{S^2}{2!} T + \frac{S^3}{3!} + \dots \\ &= \left[I + T + \frac{T^2}{2!} + \frac{T^3}{3!} + \dots \right] \left[I + S + \frac{S^2}{2!} + \frac{S^3}{3!} + \dots \right] = e^S e^T. \end{aligned}$$

A demonstração da terceira propriedade faz uso da acima provada. Como S e $-S$ comutam, têm-se que:

$$\exp(S - S) = \exp(0) = I = \exp(S) \exp(-S),$$

o que mostra que $\exp(-T) = [\exp(T)]^{-1}$ e demonstra a terceira propriedade. Decorre dessa propriedade que mesmo no caso em que T não seja inversível, $\exp(T)$ o é. Trata-se de situação semelhante à que se tem no cálculo da exponencial de números reais: embora zero não seja inversível e^0 o é.

Para demonstrar a quarta propriedade, notamos inicialmente que:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = A + B = aI + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

O produto das matrizes AB é comutavel, com o que

$$e^{A+B} = e^a I B = e^a B.$$

Resta portanto determinar e^B . Denominando (ver Sec ??):

$$ib = b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

têm-se que:

$$\begin{aligned} (ib)^2 &= -b^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & (ib)^3 &= -b^3 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ (ib)^4 &= b^4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & (ib)^5 &= b^5 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ (ib)^6 &= -b^6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & (ib)^7 &= -b^7 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} e^B &= e^{ib} = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(ib)^\kappa}{\kappa!} = \left[1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} - \frac{b^6}{6!} + \dots \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \\ &\left[b - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} - \frac{b^7}{7!} + \dots \right] \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos b & -\text{sen } b \\ \text{sen } b & \cos b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A demonstração da quinta propriedade se faz usando a definição de derivada:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{tA} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{tA} e^{hA} - e^{tA}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{tA} \left[\frac{e^{hA} - I}{h} \right] = \\ \lim_{h \rightarrow 0} e^{tA} \frac{1}{h} \left[I + hA + \frac{h^2 A^2}{2!} + \dots - I \right] &= \lim_{h \rightarrow 0} e^{tA} \left[A + \frac{hA^2}{2!} + \frac{h^2 A^3}{3!} + \dots \right] = \\ e^{tA} A &= A e^{tA}. \end{aligned}$$

Decorre dessa propriedade que, se:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = A\mathbf{X} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{X} = e^{tA}\mathbf{X}_0,$$

pois:

$$\frac{d}{dt} e^{tA}\mathbf{X}_0 = A e^{tA}\mathbf{X}_0 = A\mathbf{X}.$$

A solução da Eq. $\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X}$ é única. De fato, admitindo que exista outra solução Y , essa nova solução obedece à equação $\dot{\mathbf{Y}} = A\mathbf{Y}$. Fazendo $e^{-tA}\mathbf{Y}$ e calculando a derivada em relação ao tempo desse termo obtém-se:

$$\frac{d}{dt} e^{-tA}Y = -e^{-tA}AY + e^{-tA}\dot{Y} = -e^{-tA}AY + e^{-tA}AY = 0.$$

Portanto $e^{-tA}\mathbf{Y}$ é uma constante. Seja \mathbf{X}_0 essa constante. Conclui-se que $\mathbf{Y} = e^{-tA}\mathbf{X}_0$, ou seja, a nova solução é igual à primeira, desde que a condição inicial das duas soluções sejam iguais. Enunciamos o seguinte:

Teorema: Seja A um operador definido no \mathcal{R}^n . A equação $\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X}$, com a condição inicial $\mathbf{X}(t=0) = \mathbf{X}_0$ admite como única solução $\mathbf{X} = e^{tA}\mathbf{X}_0$.

O procedimento de resolução de um sistema da forma $\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X}$, definido nas Sec. D.3 e D.4 é equivalente a calcular a exponencial do operador A na base dos autovetores e em retornar à base original. Mostramos abaixo um exemplo, que mostra que, quando o operador não tem os autovetores suficientes para formar uma base, pode-se obter a solução pelo cálculo da exponencial do mesmo.

Exemplo: resolução do sistema $\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X}$, com a condição inicial $\mathbf{X}_0 = (x_{01}; x_{02})$, onde:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A matriz tem um único autovalor, $\lambda = 2$ e apenas um autovetor. Podemos escrever:

$$A = S + N \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

As matrizes S e N comutam, o que permite calcular:

$$e^{tA} = e^{tS}e^{tN} = \begin{pmatrix} e^{2t} & \\ & e^{2t} \end{pmatrix} e^{tN} = e^{2t}e^{tN}.$$

Resta calcular a $\exp(tN)$. Aplicando a definição de exponencial de operador:

$$e^{tN} = I + tN + \frac{t^2N^2}{2} + \dots$$

Pode-se verificar que $N^2 = 0$ o que limita os termos da série acima aos dois primeiros. Obtém-se portanto:

$$e^{tN} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto:

$$\mathbf{X} = e^{tA}\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ te^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{01}e^{2t} \\ x_{01}te^{2t} + x_{02}e^{2t} \end{pmatrix}.$$

O cálculo da exponencial foi facilitado pela decomposição do operador A na soma de um diagonal e outro, que elevado a uma potência finita tem como resultado a matriz zero. Definimos:

Definição: Matrizes tais que $N^p = 0$ para algum p inteiro e positivo denominam-se nilpotentes.

Veremos a seguir que, quando os autovetores do operador não formam uma base completa, pode-se decompô-lo em uma matriz diagonal e uma nilpotente. As duas matrizes são comutáveis.

D.7 Autovalores Repetidos e Forma Canônica de Jordan

Um dos exemplos apresentados na Sec. D.5 mostra que a ocorrência de operadores com autovalores repetidos requer que os parâmetros do problema guardem entre si uma relação que normalmente existe. Autovalores repetidos ocorrem por exemplo, quando se varia algum parâmetro e ao longo da trajetória percorrida pelo mesmo, os requisitos para a repetição são atendidos. Essa seção apresenta o procedimento de resolução de equações diferenciais, que se adota quando o operador que multiplica o vetor de incógnitas apresenta autovalores repetidos [40, 32, 22].

Consideremos inicialmente, o caso em que os autovalores repetidos são reais. O espaço em que o problema é definido pode ser decomposto em dois, o primeiro, E_1 varrido pelos autovetores associados a autovalores reais não repetidos e pela parte real e imaginária de autovetores complexos, associados a autovalores complexos, não repetidos. O segundo subespaço, E , é o parcialmente varrido pelo(s) autovetor(es) associado(s) a um único autovalor λ , de multiplicidade r . Têm-se portanto:

$$\begin{aligned}\bar{E} &= E_1 \oplus E \\ \bar{T} &= T_1 \oplus T.\end{aligned}$$

Ocupamo-nos do subespaço E e da estrutura do operador T . Suponhamos que T tem r autovetores. A base de autovetores deve ser completada com $m - r$ vetores linearmente independentes.

Definição: Os $m - r$ vetores que completam a base incompleta de r autovetores de um operador T , de dimensões $m \times m$ denominam-se autovetores generalizados, associados a seu único autovalor λ .

Definição: O subespaço E denomina-se subespaço próprio generalizado, associado ao autovalor λ .

Esta seção trata da decomposição de operadores algébricos lineares com apenas um autovalor real na soma de uma matriz diagonal com outra nilpotente. A subseção D.7.1 trata de propriedades de matrizes nilpotentes, a subseção D.7 define e aborda propriedades de blocos de Jordan e a subseção D.7.2 estuda a decomposição do operador nas duas parcelas acima mencionadas.

D.7.1 Matrizes e blocos nilpotentes elementares

O determinante de uma matriz nilpotente é igual a zero, pois se $N^m = 0 \longrightarrow \det N^m = (\det N)^m = 0 \longrightarrow \det N = 0$. Um exemplo de matriz nilpotente é dado por:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 & \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.31})$$

em que todos os elementos são iguais a zero, exceto os da segunda subdiagonal, que são iguais a 1. Elevando essa matriz ao quadrado obtém-se outra, cujos elementos são todos iguais a zero, com exceção dos pertencentes à segunda subdiagonal, que são iguais a 1:

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 0 & 0 & \\ & & & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sucessivamente:

$$N^{m-1} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e:} \quad N^m = 0.$$

É claro que a matriz:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 & \\ & & & & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{D.32}$$

também é nilpotente. Nesse caso $N^{m-1} = 0$. A matriz dada pela Eq. D.32 atende ao requisito de ter seu determinante igual a zero e é portanto candidata a descrever a parte não diagonalizável do operador T .

Definição: Blocos nilpotentes elementares são matrizes em que todos os elementos são nulos, com exceção dos pertencentes à primeira subdiagonal, que são iguais a 1.

Um exemplo de bloco nilpotente elementar é dado pela matriz D.32. Dois outros exemplos são mostrados abaixo:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e:} \quad N = (0).$$

Uma matriz nilpotente pode ser formada por blocos dispostos ao longo da diagonal principal,

como o exemplo mostrado abaixo:

$$N = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & 1 & 0 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{0} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \\ & & & \boxed{0} \\ & & & & \boxed{0} \end{pmatrix} \quad (\text{D.33})$$

Um bloco nilpotente elementar, de dimensões $n \times n$, tem a propriedade de que $J^n = 0$. Outra propriedade consiste no resultado da aplicação de um bloco de Jordan sobre os elementos de base:

$$N \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{f}_2.$$

Sejam $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$, os elementos de base. Vê-se que:

$$\begin{cases} N \mathbf{f}_j = \mathbf{f}_{j+1} & (j < n) \\ N^p \mathbf{f}_j = \mathbf{f}_{j+p} & (j + p < n) \\ N \mathbf{f}_n = \mathbf{Z}. \end{cases} \quad (\text{D.34})$$

Uma terceira propriedade importante dos blocos de Jordan refere-se à ao fato de que a dimensão do espaço nulo dos mesmos é igual a 1. A dimensão do espaço nulo de matrizes formadas por n é n . Por exemplo, sendo a matriz D.33 composta por 5 blocos de Jordan, a dimensão de seu espaço nulo é igual a 5.

D.7.2 A decomposição S-N

Consideremos um operador T de dimensões $m \times m$ com apenas um autovalor real λ . Se T tiver m autovetores linearmente independentes pode ser diagonalizado:

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I.$$

Cabe observar que as matrizes que representam T tem a forma acima em qualquer base, pois $QIQ^{-1} = I$. Se T não tiver m autovetores linearmente independentes, não pode ser diagonalizado. No entanto, o operador pode ser desmembrado na soma de uma matriz

diagonal, S , cujos termos são todos nulos com exceção dos situados ao longo da diagonal principal que são iguais ao único autovalor de T , acrescido de outra matriz, N , que contém a parte não diagonalizável do operador:

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} + N. \quad (\text{D.35})$$

Como $\det T = \lambda^m$, têm-se que $\det N = 0$. Procuremos a estrutura da matriz N . Consideremos a sequência de vetores $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}$, tais que:

$$\begin{cases} (T - \lambda I)^{p-1} \mathbf{f}_1 = N^{p-1} \mathbf{f}_1 \neq 0 & \text{e: } (T - \lambda I)^p \mathbf{f}_1 = N^p \mathbf{f}_1 = 0 \\ (T - \lambda I)^{p-2} \mathbf{f}_2 = N^{p-2} \mathbf{f}_2 \neq 0 & \text{e: } (T - \lambda I)^{p-1} \mathbf{f}_2 = N^{p-1} \mathbf{f}_2 = 0 \\ \vdots & \vdots \\ (T - \lambda I) \mathbf{f}_{p-1} = N \mathbf{f}_{p-1} \neq 0 & \text{e: } (T - \lambda I)^2 \mathbf{f}_{p-1} = N^2 \mathbf{f}_{p-1} = 0 \\ (T - \lambda I) \mathbf{f}_p = N \mathbf{f}_p = 0 \end{cases} \quad (\text{D.36})$$

com $p \leq m$. Demonstramos que essa sequência de vetores, se existir e atender aos requisitos acima, é linearmente independente. Para isso procuramos as condições para que:

$$\alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{f}_m = \mathbf{Z}. \quad (\text{D.37})$$

Aplicando o operador N^{m-1} aos dois membros da Eq. D.37 obtemos:

$$\alpha_1 \mathbf{f}_1 = \mathbf{Z},$$

o que implica em que $\alpha_1 = 0$. Levando em conta essa condição vê-se que a Eq. D.37 se reduz a:

$$\alpha_2 \mathbf{f}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{f}_m = \mathbf{Z}. \quad (\text{D.38})$$

Aplicando o operador N^{m-2} aos dois membros da Eq. D.38 conclui-se que $\alpha_2 = 0$. Proseguindo com o procedimento verifica-se que todos os coeficientes α_j da Eq. D.37 devem ser iguais a zero para que a mesma seja satisfeita. Consequentemente, a sequência de vetores é linearmente independentes. Como o espaço considerado tem no máximo m vetores linearmente independentes deve-se ter $p \leq m$. Se o operador tiver dois autovetores linearmente independentes $p = m - 1$. E se o operador tiver m autovetores linearmente independentes $p = 1$. Se o operador tiver m autovalores distintos a sequência de vetores acima tem apenas um, pois o operador já tem m autovetores linearmente independentes. A sequência de vetores acima descreve portanto o espaço e existe, pois cada um dos vetores $\mathbf{f}_2 \dots \mathbf{f}_{p-1}$ pertence à imagem de $T - \lambda I$.

O operador N^p é nilpotente, pois leva qualquer vetor da base para \mathbf{Z} . Consequentemente, leva qualquer vetor do espaço para \mathbf{Z} . Um operador que leva qualquer vetor para \mathbf{Z} é o operador zero. Portanto, N é nilpotente. Enunciamos então o seguinte:

Teorema: Seja um operador $T : E_n \longrightarrow E_n$ com um único autovalor λ , de multiplicidade n . T tem uma decomposição em uma parcela diagonalizável (semi-simples) e outra nilpotente:

$$T = S + N.$$

Vejamos o exemplo de um operador T que tem apenas um autovetor:

$$T\mathbf{f}_1 = \lambda\mathbf{f}_1 + N\mathbf{f}_1.$$

Rearranjando os termos e levando em conta que $N\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2$, temos sucessivamente:

$$\begin{aligned} (T - \lambda I)\mathbf{f}_1 &= \mathbf{f}_2 \\ (T - \lambda I)^2\mathbf{f}_1 &= \mathbf{f}_3 \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ (T - \lambda I)^{n-1}\mathbf{f}_1 &= \mathbf{f}_n \\ (T - \lambda I)^n\mathbf{f}_1 &= \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

A decomposição de um operador T qualquer, tendo apenas um autovalor λ e um único autovetor é portanto, possível. A parte não diagonalizável N do operador tem a forma do bloco de Jordan D.32 na base formada pelo autovetor e pelos autovetores generalizados. Lembramos que esses últimos são vetores quaisquer, linearmente independentes.

Denominamos como N_0 a parcela nilpotente da decomposição do operador. Como a parte diagonal do operador é igual a λI em qualquer base, a matriz N pode ser obtida fazendo-se:

$$N = T - \lambda I.$$

Essa matriz é nilpotente de modo que $N^m = N_0^m = 0$, embora N não tenha a forma do bloco de Jordan D.32. Os exemplos abaixo ilustram o procedimento de cálculo da exponencial de uma matriz com autovalores repetidos.

Exemplo: Calcular e^{tA} , onde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A matriz tem três autovalores iguais a 1. Pode-se determinar a matriz N , subtraindo-se $S = 1I$ de A . Obtém-se:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N^3 = 0.$$

Calcula-se a seguir e^{tA} :

$$e^{tA} = e^{t(1I+N)} = e^t \left[I + tN + \frac{t^2 N^2}{2!} \right] = e^t \begin{pmatrix} 1 & t & 2t + 3t^2/2 \\ 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo: Calcular e^{tA} , onde:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A matriz tem um autovalor $\lambda_1 = -1$, de multiplicidade 2 e outro, $\lambda_3 = 1$. Como os autovalores não são todos iguais não se pode subtrair a parcela diagonal, diretamente da matriz A . O autovetor associado a $\lambda_1 = -1$ é proporcional a $\mathbf{f}_2 = (1; 0; 0)$. Como há apenas um autovetor associado a $\lambda_1 = -1$ é necessário completar a base. Escolhemos o vetor $\mathbf{f}_1 = (0; 1; 0)$. Deve-se observar que os autovetores generalizados são ordenados à frente do autovetor associado ao autovalor repetido, O autovetor associado a $\lambda_3 = 1$ é proporcional a $\mathbf{f}_3 = (0; 2; 1)$. As matrizes Q e Q^{-1} são dadas por:

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para calcularmos e^{tA} determinamos a matriz A_0 , que representa o operador na base dos autovetores e autovetor generalizado. Subtrai-se dessa matriz a parcela diagonal, obtendo-se a parte nilpotente N_0 . De posse de S_0 e N_0 calcula-se $\exp(S_0 + N_0)$ e retorna-se à base original:

$$A_0 = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos a seguir a matriz N_0 :

$$N_0 = A_0 - S_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que a matriz N_0 não está na forma de um bloco nilpotente elementar pelo fato dos autovalores de A não serem todos iguais. Calculamos a seguir $e^{tA_0} = e^{S_0}e^{N_0}$, notando que $N_0^2 = 0$:

$$e^{tA_0} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ te^{-t} & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Concluindo a seção, mostramos o seguinte:

Teorema: Seja um operador algébrico linear, T , de dimensões $n \times n$, cujo polinômio característico é:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k} = 0,$$

onde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ são os autovalores de T e m_1, m_2, \dots, m_k , a multiplicidade de cada autovalor, respectivamente, com $m_1 + m_2 + \dots + m_k = m$. Todo operador T , conforme acima, satisfaz seu polinômio característico, isso é:

$$p(A) = (A - \lambda_1 I)^{m_1} (A - \lambda_2 I)^{m_2} \dots (A - \lambda_k I)^{m_k} = 0,$$

onde I é a matriz identidade e 0 , a matriz nula (Teorema de Cayley-Hamilton).

Seja \mathbf{f} um autovetor ou autovetor generalizado, associado ao autovalor λ_j , de multiplicidade m_j . Então:

$$(T - \lambda_j)^{m_j} \mathbf{f} = \mathbf{Z}.$$

O procedimento dá o mesmo resultado com todos os binômios do polinômio característico, isso é com todos os autovetores e autovetores generalizados de T , que formam uma base de E_m . Como os binômios são comutáveis, concluímos que o polinômio característico aplicado a qualquer vetor de base de E_m e portanto, a qualquer vetor de $E - m$, dá como resultado o vetor \mathbf{Z} . O operador que leva qualquer vetor de E_m para o vetor \mathbf{Z} é o operador zero, o que prova o teorema.

D.7.3 Forma canônica real de Jordan

Vimos que um operador com um único autovalor λ pode ser decomposto na soma de uma matriz diagonal com uma nilpotente. Resta a questão a responder sobre a forma dessa matriz nilpotente, pois, tanto ela pode conter apenas um bloco de Jordan e ter a forma da matriz D.32, quanto se composta por vários blocos nilpotentes elementares, conforme a matriz D.33. Examinemos a estrutura da matriz de dimensões 10×10 abaixo, já escrita em forma canônica:

$$N = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & 1 & 0 & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{matrix}} & & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{matrix}} & & & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{matrix}} & & & & & \\ & & & \boxed{0} & & & & & & \\ & & & & \boxed{0} & & & & & \\ & & & & & \boxed{0} & & & & \\ & & & & & & \boxed{0} & & & \end{pmatrix}.$$

Por ser formada por 6 blocos de Jordan, o espaço nulo dessa matriz é igual a 6 (ver pág. 214). Uma primeira regra se deduz imediatamente desse fato: a dimensão δ_1 do espaço nulo de N é dada por:

$$\delta_1 = \dim \text{Nu}(N).$$

onde n é o menor expoente ao qual a matriz N deve ser elevada, que dá como resultado a matriz 0.

Uma operador cuja parte nilpotente está escrita na forma de blocos elementares encontra-se na *forma canônica de Jordan*. Um exemplo de matriz nessa forma é dado abaixo:

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & 1 & \lambda & \\ & & & \ddots \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda & \\ 1 & \lambda \end{matrix}} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \lambda & \\ 1 & \lambda \end{matrix}} & \\ & & & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}.$$

D.7.4 Forma canônica complexa de Jordan

O caso de operadores com autovalores complexos repetidos é tratado de forma semelhante ao real. Um exemplo de matriz complexa na forma canônica de Jordan complexo é dado pelo exemplo abaixo:

$$J = \begin{pmatrix} D & & & & \\ I & D & & & \\ & I & D & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & I & D \\ & & & & I & D \end{pmatrix}, \quad \text{onde:} \quad \begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \\ I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{D.39})$$

Observamos apenas que, no caso de operadores com um único par de autovalores complexos $a \pm ib$ a subtarção $N = T - S$ deve ser feita obrigatoriamente na base dos autovetores e autovetores generalizados, ao contrário do que se faz no caso de operadores com um único autovalor real, porque a matriz contendo apenas blocos D (Eq. D.39) ao longo da diagonal principal não é a mesma em todas as bases.

D.8 Problemas

1. Sejam A e Q duas matrizes quadradas de dimensões $n \times n$, com Q inversível. O traço de uma matriz é definido como a soma dos elementos da diagonal principal:

$$\text{tr}(A) = \delta_{ij} a_{ij},$$

onde a_{ij} é o elemento geral de A . Seja $B = QAQ^{-1}$. B e A são duas matrizes similares que representam o mesmo operador algébrico linear T , em bases diferentes. As colunas

de Q^{-1} são formadas pelas coordenadas de cada um dos vetores da nova base, na qual a matriz B representa o operador T . Mostrar que:

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(QAQ^{-1}) = \text{tr}(B) = \text{tr}(T),$$

isso é, que o traço, assim como o determinante, é um invariante do operador T e independe da matriz que o representa.

2. Mostrar que se A e B forem duas matrizes quadradas arbitrárias, de dimensões $n \times n$, então $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
3. Mostrar que $(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{jj})/2$ é um invariante de um tensor de segunda ordem σ .
4. Sejam $\lambda \in R$ e A, B e Q , três matrizes com Q inversível, tais que $AQ = QB$. Mostre que:

(a) $(\lambda I - A)Q = Q(\lambda I - B)$;

(b) λ é autovalor de A se e somente se λ for autovalor de B ;

(c) \mathbf{X} é autovetor de B , associado a λ se $Q\mathbf{X}$ for autovetor de A , associado a λ .

5. Seja $A(t)$ uma matriz cujos elementos dependem de um parâmetro t e $A(t_2)A(t_1) = A(t_1)A(t_2)$, para quaisquer valores de t_1 e t_2 . Seja $f(A)$ uma função da matriz A e definimos:

$$\frac{df(A)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(A(t+h)) - f(A(t))}{h}.$$

Mostrar que:

$$\frac{dA^n}{dt} = nA^{n-1} \frac{dA}{dt}, \quad \frac{de^A}{dt} = \frac{dA}{dt} e^A.$$

Sugestão: usar a fórmula do binômio de Newton:

$$(X + Y)^n = n! \sum_{j+k=n} \frac{X^j Y^k}{j! k!},$$

onde aplicável.

6. Mostrar que se $\lambda \neq 0$ for um autovalor associado ao autovetor \mathbf{X} de um operador algébrico linear inversível A , então:

$$A^{-1}\mathbf{X} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{X}.$$

7. O cálculo dos autovalores de um operador através da resolução da Eq. D.7 é difícil para matrizes de grandes dimensões. Um método alternativo consiste em se aplicar a matriz em um valor qualquer \mathbf{Y} e repetir a operação, aplicando-a sucessivamente aos vetores resultantes. Como um vetor qualquer pode ser considerado como soma de

autovetores de comprimento convenientemente escolhido ($\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \dots + \mathbf{X}_n$) têm-se:

$$\begin{aligned} A\mathbf{X} &= A(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 + \dots + \mathbf{X}_n) &= \lambda_1\mathbf{X}_1 + \lambda_2\mathbf{X}_2 + \dots + \lambda_n\mathbf{X}_n \\ A(A\mathbf{X}) &= \lambda_1^2\mathbf{X}_1 + \lambda_2^2\mathbf{X}_2 + \dots + \lambda_n^2\mathbf{X}_n \\ &\vdots &&\vdots \\ A^p\mathbf{X} &= \lambda_1^p\mathbf{X}_1 + \lambda_2^p\mathbf{X}_2 + \dots + \lambda_n^p\mathbf{X}_n. \end{aligned}$$

A cada aplicação da matriz A , a componente relativa ao maior autovalor fica maior em relação às demais. Normalizando as componentes do vetor resultante a cada aplicação pelo módulo do novo vetor obtém-se um vetor \mathbf{X}^n , tal que $|\mathbf{X}^n| = 1$ (n é o número da iteração). Esse vetor alinha-se rapidamente ao autovetor de maior módulo. Uma vez determinado o autovetor associado ao autovalor de maior módulo pode-se calcular o autovalor sem dificuldades. Para cálculo do segundo autovalor e do segundo autovetor subtrai-se do vetor \mathbf{Y} , a componente na direção de \mathbf{X}_1 e repete-se o procedimento.

No caso de matrizes muito grandes, muitas vezes procura-se determinar taxas de crescimento e frequências naturais próximas a alguma frequência especificada. Uma forma de se calcular um autovetor correspondente a um autovalor especificado λ consiste em seguir o seguinte procedimento:

- (a) Calcula-se a matriz $B = A - \lambda I$. Essa matriz passa a ter um autovalor $\lambda' = 0$. Sua inversa tem um autovalor que diverge;
- (b) Inverte-se a matriz e calcula-se o autovetor correspondente a seu maior autovalor.

Os autovalores da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

são $\lambda = 1, 2, 3, 4, 5$ e 6 . Calcular os autovetores da matriz, começando pelo associado ao maior autovalor. Repetir o cálculo subtraindo $1, 2\lambda I$ da matriz A . Quantas iterações são necessárias até a convergência, isso é, até que:

$$\frac{|\mathbf{X}^n - \mathbf{X}^{n-1}|}{|\mathbf{X}^n|} < 10^{-8} ?$$

8. Mostrar que, se λ for um autovalor associado ao autovetor \mathbf{X} de um operador algébrico linear A , então:

$$\exp(A)\mathbf{X} = \exp(\lambda)\mathbf{X}.$$

9. Suponha que μ não seja um autovalor da matriz $A \in M(n)$. Mostrar que a equação $\dot{\mathbf{X}} = A\mathbf{X} + e^{\mu t}\mathbf{Y}$, com \mathbf{Y} especificado, tem uma solução da forma $\mathbf{X} = e^{\mu t}\mathbf{V}$, com $\mathbf{V} \in \mathcal{R}^n$.

10. Calcular a exponencial das matrizes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

11. Resolver o sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2x \\ \dot{y} &= x - 2y \\ \dot{z} &= y - 2z \end{aligned}$$

com a condição inicial $(x_0; y_0; z_0) = (1; 2; 3)$.

12. Determinar os pontos de equilíbrio, a estabilidade linear dos mesmos e construir as trajetórias no espaço de fases (retrato de fases) do sistema cuja evolução obedece à equação de Duffing:

$$\ddot{x} + x^2 \dot{x} - x + x^3 = 0$$

13. Determinar os pontos de equilíbrio, a estabilidade linear dos mesmos e esboçar as trajetórias no espaço de fases do sistema cuja evolução obedece à equação de Van der Pool:

$$\ddot{x} + (x^2 - 1) \dot{x} + x = 0.$$

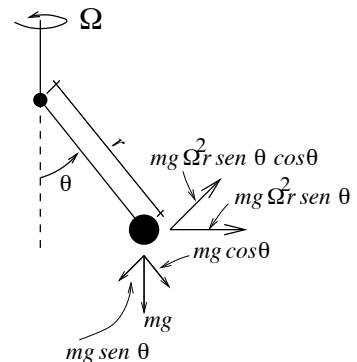
14. A figura ao lado mostra o esquema de um pêndulo giratório. Pede-se:

(a) Mostrar que a equação de evolução do pêndulo é:

$$mr\ddot{\theta} + mg \sin \theta - mr\Omega^2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

ou:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{r} \sin \theta - \Omega^2 \sin \theta \cos \theta = 0;$$



(b) Reescrever a equação do movimento sob a forma de duas equações de primeira ordem e mostrar que os pontos fixos da dinâmica são:

$$\begin{aligned} \theta &= \pm n\pi \\ \theta &= \cos^{-1}(1/\lambda) \quad (\lambda \geq 1), \end{aligned}$$

onde $\lambda = \Omega^2 r / g$. Nos dois casos, $\dot{\theta} = 0$.

(c) Estudar a estabilidade linear dos pontos fixos e construir o retrato de fases do sistema.

15. Em 1968, os profs. I. Prigogine e R. Lefever, da Universidade Livre de Bruxelas, propuseram um modelo para descrever as oscilações em sistemas químicos observadas por Belousov e Zhabotinsky, cerca de quinze anos antes. Graças a esse modelo, Prigogine foi agraciado com o prêmio Nobel de química em 1977. O modelo recebeu o nome de “Brusselador” e é dado por:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -(b+1)x + a + x^2y \\ \frac{dy}{dt} &= bx - x^2y,\end{aligned}$$

onde x e y são as concentrações de compostos químicos intermediários e a e b , as concentrações de reagentes, mantidas constantes. Determinar os pontos de equilíbrio dessa cinética. Que relações devem existir entre os parâmetros desse modelo, para que o sistema seja estável e em que condições ocorrem oscilações que são amplificadas (bifurcação de Hopf)?

16. Qual é a dimensão de Hausdorff do conjunto de Cantor obtido removendo-se seções centrais de comprimento $l/2$ em cada etapa de construção do conjunto, ao invés de $l/3$?
17. Mostrar que $(\lambda - 4)^2(\lambda - 2) = 0$ é o polinômio característico das matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e:} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mostrar que $A^2 - 6A + 8I = (A - 4I)(A - 2I) = 0$, mas $B^2 - 6B + 8I \neq 0$. Mostrar que $(B - 4I)^2(B - 2I) = 0$.

18. Mostrar que a matriz A do problema 17 tem dois autovalores linearmente independentes, associados a $\lambda = 4$ e a matriz B , apenas um e um autovetor generalizado de ordem dois. Essa é a razão pela qual A satisfaz uma equação polinomial de grau mais baixo do que B .
19. Determinar a forma canônica de Jordan das matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 1 \\ 8 & -10 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e:} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

A matriz A tem um único autovalor $\lambda = -1$, de multiplicidade 4.