Apêndice A

Princípios de Análise Dimensional

A.1 Séries Completas de Produtos Adimensionais

A complexidade dos fenômenos que ocorrem em fluidos, devida à não linearidade de suas leis de evolução, faz com que se recorra com frequência à métodos de investigação experimentais. Nesse campo, a análise dimensional tem papel preponderante e baseia-se no princípio de que as leis regem os fenômenos não dependem do sistema de unidades escolhido.

Como exemplo, procuramos uma expressão para a força de arraste devido a efeitos viscosos e de compressibilidade, que age sobre um corpo que se desloca imerso em meio fluido. Seis grandezas intervêm no problema, expressas em função de três outras fundamentais, que têm dimensão de massa (M), de comprimento (L) e de tempo (T). Essas grandezas estão indicadas na Tab. A.1.

Tabela A.1: Grandezas que intervém na lei que rege a força de arraste agindo sobre um corpo que se desloca imenrso em um fluido viscoso e compressível. As grandezas fundamentais têm dimensão de massa (M), de comprimento (L) e de tempo (T).

Grandeza	Símbolo	Unidades
Força de arraste	D	LMT^{-2}
Comprimento	l	L
Velocidade	U	LT^{-2}
Densidade	ρ	ML^{-3}
Viscosidade	μ	$L^{-1}MT^{-1}$
Velocidade do som	a	LT^{-1}

A forma mais geral da lei que descreve o arraste que age sobre o corpo é da forma:

$$D^{-u} \;=\; D^{-u}\left(l, U, \rho, \mu, a\right) \;=\; \sum C_{pqrst}\, l^p U^q \rho^r \mu^s a^t \quad (-\infty < p, q, r, s, t < \infty)\,. \tag{A.1}$$

Pode-se reescrever a equação acima em forma adimensional dividindo-se os dois membros por D^{-u}. Obtém-se:

$$\sum c_{pqrst}\, l^p U^q \rho^r \mu^s a^t D^u \;=\; 1 \qquad (-\infty < p, q, r, s, t < \infty)\,. \tag{A.2}$$

A homogeneidade dimensional da Eq. A.2 impõe restrições aos expoentes p, q, r, s, t. Os expoentes de cada termo da série devem ser satisfazer à equação:

$$\left[L^0 M^0 T^0\right] \;=\; L^p \left[LT^{-1}\right]^q \left[ML^{-3}\right]^r \left[L^{-1}MT^{-1}\right]^s \left[LT^{-1}\right]^t \left[LMT^{-2}\right]^u ,$$

o que requer:

$$\left.\begin{array}{lrcl} L: & p+q-3r-s+t+u & = & 0 \\ M: & r+s+u & = & 0 \\ T: & -q-s-t-2u & = & 0. \end{array}\right\} \tag{A.3}$$

Pode-se montar uma tabela da qual cada coluna contém os coeficientes das variáveis da Eq. A.3:

Tabela A.2: Matriz dimensional do problema de determinação da força de arraste que atua sobre um corpo que se desloca em fluido viscoso e compressível.

	l	U	ρ	μ	a	D
L	1	1	-3	-1	1	1
M	0	0	1	1	0	1
T	0	-1	0	-1	-1	-2

Os números que aparecem na Tab. A.2 são os elementos da matriz de coeficientes da Eq. A.3, reescrita em forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ou:} \qquad A\mathbf{X} = \mathbf{Z}, \tag{A.4}$$

onde $\mathbf{Z}$ é o vetor zero. A Tab. A.2 e a matriz A, de coeficientes da Eq. A.4 são duas formas de representação da *matriz dimensional* do problema.

Sabe-se da álgebra linear, que[1][12, 22]:

$$\dim \operatorname{Im}(A) + \dim \operatorname{Nu}(A) = m,$$

onde m é o número de colunas da matriz dimensional A e $\dim \operatorname{Im}(A)$ é a dimensão da imagem do operador, isso é, a dimensão do espaço ao qual pertencem todos os vetores $\mathbf{B}$ do membro direito, tais que $A\mathbf{X} = \mathbf{B}$, com $\mathbf{X}$ qualquer; $\dim \operatorname{Nu}(A)$ é a dimensão do espaço nulo, ou núcleo de A. Espaço nulo de um operador algébrico linear é o conjunto de vetores $\mathbf{X}$ tais que $A\mathbf{X} = \mathbf{Z}$.

Pode-se dar uma interpretação vetorial a uma equação algébrica linear da forma $A\mathbf{x} = \mathbf{B}$: Como a primeira coluna de A é multiplicada pela primeira variável do vetor de incógnitas $\mathbf{X}$, a segunda coluna, pela segunda variável de $\mathbf{X}$ e assim sucessivamente, a equação equivale a expressar o vetor $\mathbf{B}$ do membro direito como uma combinação linear das colunas de A. O sistema só admite solução se $\mathbf{B}$ estiver contido no subespaço varrido pelas colunas de A [20].

[1]Ver apêndice sobre princípios da álgebra linear no Vol. 2 desse trabalho.

A Eq. A.4 sempre admite solução, pois o vetor **Z** pertence ao subespaço varrido pelas colunas. Pode-se identificar três colunas linearmente independentes nessa equação, donde conclui-se que a dimensão da imagem de A é igual a três e a do espaço nulo, três. A escolha das colunas linearmente independentes de A é arbitrária. No caso da Eq. A.4, a combinação linear das colunas que resulta no vetor nulo é:

$$p\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \tag{A.5}$$

Para a determinação do espaço nulo procede-se da seguinte forma:

1. Escolhe-se inicialmente uma base qualquer da imagem da matriz dimensional. No caso da Eq. A.4, pode-se formar a base com as três primeiras colunas da matriz;

2. Assim fazendo, cada uma das colunas restantes pode ser obtida por combinação dos vetores da base escolhida. A quarta coluna da matriz dimensional pode ser obtida fazendo-se $s = 1$, $t = u = 0$ e resolvendo-se a Eq. A.4. A quinta coluna pode ser obtida de forma análoga, fazendo $s = u = 0$ e $t = 1$. Seguindo o mesmo procedimento, a sexta coluna pode ser obtida fazendo-se $s = t = 0$ e $u = 1$. As coordenadas dos três vetores $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$ e $\mathbf{X_3}$ assim obtidos satisfazem a Eq. A.4. Os três vetores são linearmente independentes. As coordenadas de qualquer combinação linear dos três, isso é de qualquer vetor de um espaço de dimensão três, assim como a da soma de todos os vetores desse espaço também a satisfaz. O núcleo da matriz dimensional A é um espaço de dimensão $m - \dim \mathrm{Im}\,(A)$.

Para se obter um vetor qualquer na direção da quarta coluna da matriz de coeficientes da Eq. A.4, faz-se $t = u = 0$ e obtêm-se da Eq. A.3:

$$p\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}=-s\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Da equação acima obtêm-se as coordenadas do vetor genérico da quarta coluna da matriz de coeficientes da Eq. A.4, na base das primeiras colunas da matriz:

$$p = q = r = -s,$$

donde conclui-se que o vetor:

$$\begin{pmatrix}p\\q\\r\\s\\t\\u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-s\\-s\\-s\\s\\0\\0\end{pmatrix} \tag{A.6}$$

satisfaz à Eq. A.2. Procedemos à identificação das coordenadas do vetor genérico da quinta coluna, na base das três primeiras colunas, fazendo $s = u = 0$:

$$p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{A.7}$$

Obtém-se:

$$p = r = 0 \qquad \text{e:} \qquad q = -t.$$

Portanto, o vetor de coordenadas:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A.8}$$

satisfaz à Eq. A.2. Procedemos à identificação das coordenadas do vetor genérico da sexta coluna, na base das três primeiras colunas, fazendo $s = t = 0$:

$$p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Obtém-se:

$$p = q = -2u \qquad \text{e:} \qquad r = -u.$$

Portanto, o vetor de coordenadas:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u \\ -2u \\ -u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{A.9}$$

também satisfaz à Eq. A.2. Os vetores A.7, A.8 e A.9 são linearmente independentes e satifazem à Eq. A.2. Qualquer combinação linear dos mesmos, isso é qualquer vetor genérico do espaço nulo do operador representado pela matriz de coeficientes da Eq. A.4 também a satisfaz. Esse vetor genérico é dado pela soma dos três acima mencionados:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ -s \\ -s \\ s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ 0 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2u \\ -2u \\ -u \\ 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s-2u \\ -s-t-2u \\ -s-u \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix}. \tag{A.10}$$

Substituindo-se os valores de p, q, r, s, t e u na Eq. A.2 obtém-se:

$$\sum C_{st} l^{-s-2u} U^{-s-t-2u} \rho^{-s-u} \mu^s a^t D^u \;=\; 1. \qquad (-\infty < s, t < \infty).$$

Agrupando os fatores com mesmo expoente reescrevemos essa última:

$$\sum C_{st} \left(\frac{\rho U l}{\mu}\right)^{-s} \left(\frac{U}{a}\right)^{-t} \left(\frac{D}{\rho U^2 l^2}\right)^{u} \;=\; 1. \qquad (-\infty < s, t < \infty). \tag{A.11}$$

Como o membro direito da equação acima é adimensional, torna-se necessário que cada um dos fatores do membro esquerdo também o sejam. Os fatores adimensionais do membro esquerdo são:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= C_D = \frac{D}{\rho U^2 l^2} && \text{(Coeficiente de arraste)} \\ \pi_2 &= Re = \frac{\rho U l}{\mu} && \text{(Número de Reynolds)} \\ \pi_3 &= M = \frac{U}{a} && \text{(Número de Mach)} \end{aligned}$$

A lei física que descreve o arraste pode ser escrita como:

$$\varphi(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \;=\; 0. \tag{A.12}$$

O número de produtos adimensionais existentes na equação acima é, no presente caso, igual à dimensão do espaço nulo da matriz de coeficientes da Eq. A.4. Como cada vetor de uma base do espaço nulo não pode ser obtido por combinação linear dos demais, os produtos adimensionais são independentes. O número máximo de produtos adimensionais independentes é igual à dimensão do espaço nulo da matriz acima mencionada.

Cabe notar que o número de produtos adimensionais independentes pode ser menor do que a dimensão do espço nulo da matriz de coeficientes de uma equação como A.4. Essa sitauação pode ocorrer quando se relaciona na lista de variáveis relevantes do problema, uma que pode ser obtida a partir das demais. Se essa condição não ocorrer, o número de produtos adimensionais independentes é igual à dimensão do espaço nulo da matriz dimensional.

Definição: Qualquer conjunto contendo o número máximo de produtos adimensionais independentes, formados com as variáveis relevantes das quais uma grandeza física adimensional depende, denomina-se *série completa de produtos ou números adimensionais.*

Face ao fato de que a série completa de produtos adimensionais compõe-se em geral, de um número pequeno de elementos, a Eq. A.11 reduz-se a uma soma de potências desse pequeno número de produtos adimensionais independentes. A equação pode ser reescrita, tomando $u = -1$, como:

$$\frac{D}{\rho U^2 l^2} \;=\; \sum C_{st} \left(\frac{\rho U l}{\mu}\right)^{-s} \left(\frac{U}{a}\right)^{-t}. \qquad (-\infty < s, t < \infty). \tag{A.13}$$

A forma mais geral da força de arraste a que um corpo imenrso em um escoamento está submetido é:

$$\frac{D}{\rho U^2 l^2} \;=\; \sum C_{\alpha\beta} Re^{\alpha} M^{\beta} + \sum C_{\gamma} Re^{\gamma} + \sum C_{\delta} M^{\delta}. \quad (-\infty < \alpha, \beta, \gamma, \delta < \infty).$$

Os números de Reynolds e de Mach representam, respectivamente, os efeitos viscosos e de compressibilidade, isso é, de pressão. Se apenas os dois efeitos afetarem o arraste a que o corpo está sujeito, independente do valor do outro, a expressão da força de arste não contem o produto de Re por M. Os expoentes α e β são iguais a zero. Se, ao contrário, os dois efeitos existirem e a presença de um afetar o outro, a expressão conterá o produto dos grupos adimensionais, π_2 e π_3. No caso de números de Mach baixos ($M \ll 1$) o expoente t da Eq. A.13 é igual a zero. Sob altos valores do número de Mach ($M \gg 1$), quando o arraste é dominado pela compressão do fluido à frente do corpo, pode-se desprezar a parcela viscosa e o expoente s da Eq. A.13 é igual a zero.

Citamos o caso de problemas de convecção forçada, com a camada limite completamente desenvolvida, onde o número Nusselt obedece a uma relação da forma:

$$Nu \;=\; C\, Re^s Pr^t.$$

Em problemas de convecção dentro de tubos, o expoente s toma valores próximos a 0,8. Nos escoamentos externos, o valor de s é próximo a 0,6. O expoente t depende do valor do número de Prandtl (ver Sec. 5.8).

A.2 Outras Séries Completas de Produtos Adimensionais

O vetor genérico do espaço nulo da matriz dimensional A (Eq. A.4) é o mesmo em qualquer base. Representando-o em outra base, obtêm-se uma equação para a força de arraste adimensionalizada em função de outra série completa de produtos adimensionais. As coordenadas do vetor genérico do espaço nulo da matriz A são dadas, na base das três primeiras colunas da matriz, pelo vetor do membro direito da Eq. A.10.

De forma geral, a escolha de outra base leva à definição de outros números adimensionais $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{m-\kappa}$, onde m é o número de colunas da matriz e κ, o número de colunas linearmente independentes da mesma. Tomemos como base, as terceira, a quarta e a quinta colunas da matriz A de coeficientes da Eq. A.4 e procuremos as coordenadas do espaço nulo de A nesa base. Nesse caso, p', q' e u' são os expoentes a serem especificados livremente. O vetor do espaço nulo da matriz dimensional deve ser expresso como combinação linear das três últimas colunas. As equações que expressam a primeira, a segunda e a sexta colunas da matriz de coeficientes da Eq. A.4 em função da terceira, quarta e quinta são:

$$p'\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = r'\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s'\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t'\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{A.14}$$

$$q'\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = r'\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s'\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t'\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{A.15}$$

$$u'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = r'\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s'\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t'\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{A.16}$$

Donde obtém-se:

$$\begin{array}{llll} r' = p' & s' = -p' & t' = \;\; p' & \text{(da Eq. } A.14) \\ r' = 0 & s' = \;\; 0 & t' = -q' & \text{(da Eq. } A.15) \\ r' = u' & s' = -2u' & t' = \;\; 0 & \text{(da Eq. } A.16) \end{array}$$

O vetor genérico do espaço nulo, expresso na base formada pela terceira, quarta e quinta colunas da martiz de coeficientes da Eq. A.4 colunas é portanto:

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \\ r' \\ s' \\ t' \\ u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p' \\ 0 \\ p' \\ -p' \\ p' \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ q' \\ 0 \\ 0 \\ -q' \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u' \\ -2u' \\ 0 \\ u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p' \\ q' \\ p'+u' \\ -p'-2u' \\ p'-q' \\ u' \end{pmatrix}. \tag{A.17}$$

Substituindo-se os valores de p, q, r, s, t e u na Eq. A.2 obtém-se:

$$\sum C_{p'q'u'} l^{p'} U^{q'} \rho^{p'+u'} \mu^{-p'-2u'} a^{p'-q'} D^{u'} \; = \; 1.$$

Agrupando os fatores com mesmo expoente:

$$\sum C_{p'q'} \left(\frac{\rho a l}{\mu}\right)^{p'} \left(\frac{U}{a}\right)^{q'} \left(\frac{\rho D}{\mu^2}\right)^{u'} \; = \; 1. \tag{A.18}$$

Tomando $u' = -1$ reescrevemos a última equação como:

$$\frac{\rho D}{\mu^2} \; = \; \sum C_{p'q'} \left(\frac{\rho a l}{\mu}\right)^{p'} \left(\frac{U}{a}\right)^{q'} \tag{A.19}$$

Os produtos adimensionais π'_1, π'_2 e π'_3, que forma outra série completa são:

$$\pi'_1 \; = \; \frac{\rho D}{\mu^2} \qquad \pi'_2 \; = \; \frac{U}{a} \qquad \pi'_3 \; = \; \frac{\rho a l}{\mu}$$

A lei física que descreve o arraste que age sobre um corpo que se move imerso em um fluido pode, portanto, ser expressa como:

$$\varphi\left(\pi'_1, \pi'_2, \pi'_3\right) \; = \; 0. \tag{A.20}$$

A escolha de outra base leva a outra série completa, conforme mostrado acima. No entanto como o vetor genérico do espaço nulo da martiz de coeficientes da Eq. A.4, é o meesmo em qualquer base, pode-se recuperar os números previamente obtidos através de uma combinação apropriada dos novos elementos de base [18].

Seja $\mathbf{X}$ o vetor genérico do espaço nulo, representado nas duas bases. Esse vetor é dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \; &= \; (\mathbf{e_1}; \mathbf{e_2}; \mathbf{e_3}; \mathbf{e_4}; \mathbf{e_5}) \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} \; = \; (\mathbf{e_1}; \mathbf{e_2}; \mathbf{e_3}; \mathbf{e_4}; \mathbf{e_5}) \begin{pmatrix} -s \\ -s-t-2u \\ -s-u \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} \\ &= \; -s\left(\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}-\mathbf{e_4}\right) - t\left(\mathbf{e_2}-\mathbf{e_5}\right) + u\left(-2\mathbf{e_1}-2\mathbf{e_2}-\mathbf{e_3}+\mathbf{e_6}\right) \\ &= \; -s\,\mathbf{f_1} - t\,\mathbf{f_2} + u\,\mathbf{f_3} \; = \; x_i \mathbf{f_i} \end{aligned} \tag{A.21}$$

e:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} &= (\mathbf{e_1};\mathbf{e_2};\mathbf{e_3};\mathbf{e_4};\mathbf{e_5})\begin{pmatrix} p' \\ q' \\ r' \\ s' \\ t' \\ u' \end{pmatrix} = (\mathbf{e_1};\mathbf{e_2};\mathbf{e_3};\mathbf{e_4};\mathbf{e_5})\begin{pmatrix} p' \\ q' \\ p'+u' \\ -p'-2u' \\ p'-q' \\ u' \end{pmatrix} \\
&= p'\,(\mathbf{e_1}+\mathbf{e_3}-\mathbf{e_4}+\mathbf{e_5}) + q'\,(\mathbf{e_2}-u\mathbf{e_5}) + u'\,(\mathbf{e_3}-2\mathbf{e_4}+\mathbf{e_6}) \\
&= p'\mathbf{f'_1} + q'\mathbf{f'_2} + u'\mathbf{f'_3} \;=\; x'_j\mathbf{f'_j},
\end{aligned} \tag{A.22}$$

onde $\mathbf{e_j}$ é o vetor unitário cuja j-ésima coordenada, em um sistema de eixos ortogonais é igual a 1 e as demais são iguais a zero. Os vetores $(\mathbf{f_1};\mathbf{f_2};\mathbf{f_3})$ e $(\mathbf{f'_1};\mathbf{f'_2};\mathbf{f'_3})$ constituem duas bases distintas do espaço nulo da matriz dimensional. Esses vetores são dados por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f_1} &= \mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}-\mathbf{e_4} & \qquad \mathbf{f'_1} &= \mathbf{e_1}+\mathbf{e_3}-\mathbf{e_4}+\mathbf{e_5} \\
\mathbf{f_2} &= \mathbf{e_2}-\mathbf{e_5} & \mathbf{f'_2} &= \mathbf{e_2}-\mathbf{e_5} \\
\mathbf{f_3} &= 2\,\mathbf{e_1}-2\,\mathbf{e_2}-\mathbf{e_3}+\mathbf{e_6} & \mathbf{f'_3} &= \mathbf{e_3}-2\mathbf{e_4}+\mathbf{e_6}.
\end{aligned}$$

Os vetores de base $\mathbf{f'_j}$ se expressam por uma combinação linear dos vetores da base $\mathbf{f_i}$. Nessas condições:

$$\mathbf{X} \;=\; x_i\mathbf{f_i} \;=\; x'_j\mathbf{f'_j} \;=\; x'_j a_{ji}\mathbf{f_i}$$

Donde conclui-se que:

$$x_i \;=\; x'_j a_{ji},$$

isso é, a coordenada x_i do vetor genérico do espaço nulo da martiz de coeficientes da Eq. A.4 é recuperada a partir da coordenada x'_j desse vetor na nova base. a_{ij} é o elemento geral da matriz cuja linha j contém as coordenadas do vetor $\mathbf{f'_i}$ na base $\mathbf{f_j}$[2] [12, 22]. Os vetores $\mathbf{f'_i}$ se expressam da forma abaixo, como combinação linear dos vetores $\mathbf{f_j}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f'_1} &= \mathbf{f_1}-\mathbf{f_2} \\
\mathbf{f'_2} &= \mathbf{f_2} \\
\mathbf{f'_3} &= 2\,\mathbf{f_1}+\mathbf{f_3}
\end{aligned}
\qquad \text{ou:} \qquad
\begin{pmatrix} \mathbf{f'_1} \\ \mathbf{f'_2} \\ \mathbf{f'_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{f_1} \\ \mathbf{f_2} \\ \mathbf{f_3} \end{pmatrix}$$

As coordenadas $-s$, $-t$ e u, do vetor genérico do espaço nulo da matriz de coeficientes da Eq. A.4 se expressam em função das coordenadas p', q' e q' do mesmo vetor, na base $(\mathbf{f'_1};\mathbf{f'_2};\mathbf{f'_3})$, como:

$$(-s;-t;u) \;=\; (p';q';u')\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde se obtém:

$$\begin{aligned}
-s &= p'+2u' & & & p' &= -s-2u \\
-t &= -p'+q' & &\text{e, inversamente:} & q' &= -s-t-2u \\
u &= u' & & & u' &= u
\end{aligned}$$

[2]Ver apêndice sobre princípios da álgebra linear no Vol. 2 desse trabalho.

Substituindo os valores de p', q' e u' na Eq. A.18, obtemos:

$$\left(\frac{\rho a l}{\mu}\right)^{p'}\left(\frac{U}{a}\right)^{q'}\left(\frac{\rho D}{\mu^2}\right)^{u'} = \left(\frac{\rho a l}{\mu}\right)^{-s-2u}\left(\frac{U}{a}\right)^{-s-t-2u}\left(\frac{\rho D}{\mu^2}\right)^{u} =$$
$$\left(\frac{\rho a l}{\mu}\frac{U}{a}\right)^{-s}\left(\frac{\rho a l}{\mu}\frac{U}{a}\right)^{-2u}\left(\frac{\rho D}{\mu^2}\right)^{u}\left(\frac{U}{a}\right)^{-t} = \left(\frac{\rho U l}{\mu}\right)^{-s}\left(\frac{U}{a}\right)^{-t}\left(\frac{D}{\rho U l^2}\right)^{u}.$$

O resultado acima ilustra a recuperação de uma série completa de produtos adimensionais, a partir de outra série, por intermédio de uma mudança de base. As séries não são portanto linearmente independentes. O número máximo de produtos independentes é menor ou igual à dimensão do espaço nulo da matriz dimensional. Se as variáveis que intervém no problema forem independentes, no sentido de que nenhuma delas possa ser obtidas a partir das demais, o número de produtos adimenensionais é igual à dimensão do espaço nulo da matriz dimensional, conforme já mencionado acima.

Como há uma infinidade de bases do espaço nulo da mariz dimensional, pode-se formar um número infinito de séries completas de produtos adimensionais, embora o número de produtos independentes seja no máximo, igual à dimensão do espaço nulo da matriz dimensional. Não obstante, algumas séries são mais úteis na prática do que outras. Algumas regras práticas servem como guia para a definição da série completa de produtos adimensionais[18]:

1. A primeira coluna da matriz dimensional deve conter os expoentes da variável que se quer medir. Esse produto é denominado variável função;

2. As variáveis mais facilmente mensuráveis em um experimento devem aparecer em um único grupo adimensional;

3. Deve-se procurar agrupar as variáveis em produtos adimensionais dos quais a variável função dependa fortemente e em outros, cuja influência no comportamento da variável função seja menor. O fato de não se conduzir experimentos com o valor dessas últimas próximo ao do que se tem no sistema em tamanho natural permite que se faça com mias facilidade a extrapolação dos resultados de ensiaos com modelos;

4. Deve-se considerar as colunas da esquerda da matriz dimensional, como base para a formação da imagem da matriz dimensional. Se as primeiras colunas não forem linearmente independentes, deve-se redistribuir as colunas de modo a que as primeiras formem a base procurada.

Um caso especial ocorre quando o espaço nulo da matriz dimensional tem dimensão um, isso é, quando as séries completas de produtos adimensionais contém apenas um termo. Nesse caso:

$$\varphi(\pi) = \sum C_p \pi^p = 0 \quad (-\infty < p < \infty). \tag{A.23}$$

Como pelo menos um coeficiente C_p, com $p \neq 0$ é diferente de zero, a equação acima só admite como solução $\pi = C^{te}$.

A.3 O Teorema Π de Buckingham

Resumindo o acima exposto, enunciamos:

Teorema (Buckingham): Um fenômeno físico em que intervêm n grandezas independentes, expressas em termos de κ grandezas fundamentais obedece a uma relação funcional entre $n-\kappa$ variáveis reduzidas, ou adimensionais, independentes, $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-\kappa}$, da forma:

$$\varphi\left(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-\kappa}\right) \;=\; 0, \tag{A.24}$$

ou, alternativamente, sob forma explícita, como:

$$\pi_1 \;=\; \varphi\left(\pi_2, \ldots, \pi_{n-\kappa}\right).$$

A.4 Similaridade

Como as leis que regem o comportamento dos fenômenos físicos são da forma dada pela Eq. A.24 o comportamento de dois sistemas diferentes, mas regidos pela mesma lei será idêntico se o valor dos produtos adimensionais dos dois sistemas for o mesmo. Esse fato abre espaço para que se conduzam experimentos com modelos em escala reduzida, visando averiguar o comportamento do sistema em tamanho natural, a partir ds observações feitas no modelo em escala. Na mecânica dos fluidos, é procedimento clássico ensaiar modelos em escala reduzida, mas com número de Reynolds igual ao do sistema em tamanho natural, aumentando-se a velocidade da corrente de fluido na qual o modelo é imerso. Ou reduzindo a viscosidade do fluido, quando esse é um gás, reduzindo-se a temperatura em que o experimento é conduzido. Mas em geral, não se consegue similaridade total nesse caso, pois o aumento da velocidade conduz a que o número de Mach do experimento seja sensivelmente diferente do de operação do sistema em tamanho natural. Se o sistema operar em uma faixa de números de Mach em que seu valor pouco afeta o desempenho do sistema, o modelo ensaiado guarda a similaridade com o sistema, que se bsuca. Da mesma forma, sistemas que operam sob números de Reynolds muito altos não tem o desempenho afetado pelo valor desse parâmetro. Mas, em geral, não se consegue similaridade completa emtre modelo e sisitema em escala natural. Fazem-se então ensaios com parâmetros π_j em vários valores diferentes dos do sistema e extrapola-se os resultados para se estimar o desempenho sob valor de π_j igual ao do sistema em tamanho natural.

A.5 Principais Grupos Adimensionais

$Re = \dfrac{Ud}{\nu}$ **Número de Reynolds**: Pode ser interpretado de várias formas: a) Como a relação entre forças de inércia e forças viscosas que agem sobre uma partícula de fluido em movimento; b) Quadrado da relação entre a dimensão característica de um corpo e a espessura da camada limite hidrodinâmica que se desenvolve em torno do mesmo; c) Quadrado da relação entre a velocidade do escoamento e a velocidade de espalhamento da vorticidade; d) Relação entre quantidades de movimento transferidas por convecção e por difusão.

$Pe = \dfrac{Ud}{\alpha}$ **Número de Péclet**: É utilizado em problemas de mecânica dos fluidos envolvendo transferência de calor e semelhante ao número de Reynolds. Pode ser interpretado como o quadrado da relação entre a dimensão característica de um corpo e a espessura da camada limite térmica, ou como relação entre calor transferido por convecção e calor transferido por condução.

$Pr = \dfrac{\nu}{\alpha}$ **Número de Prandtl**: Relação entre a espessura das camadas limite hidrodinâmica e térmica. ν e α são, respectivamente, a viscosidade cinemática e a difusividade térmica do fluido. Em geral $Pr = \mathcal{O}(1)$ em gases, $Pr > 1$ em líquidos, $Pr \gg 1$ em sólidos e $Pr \ll 1$ em metais líquidos como o mercúrio.

$Sc = \dfrac{\nu}{D}$ **Número de Schmidt**: Mede a relação entre a espessura das camadas limite hidrodinâmica e de difusão de massa. ν e D são, respectivamente, a viscosidade cinemática e a difusividade da espécie química que se difunde no fluido.

$Le = \dfrac{\alpha}{D}$ **Número de Lewis**: Mede a relação entre a espessura das camadas limite de concentração de uma espécie química e a térmica. O número de Lewis pode ser calculado pela relação $Le = Sc/Pr$.

$M = \dfrac{U}{a}$ **Número de Mach**: Utilizado em aerodinâmica de alta velocidade; é a relação entre a velocidade do escoamento e a velocidade do som.

$Fr = \dfrac{U}{\sqrt{gd}}$ **Número de Froude**: Utilizado em problemas de mecânica de fluidos com superfície livre; é a relação entre velocidade do escoamento e a velocidade de propagação de uma pequena perturbação na superfície livre.

$Br = \dfrac{\mu U}{q_0 H}$ **Número de Brinkman**: Mede a importância do aquecimento devido aos efeitos viscosos, com relação ao aquecimento devido apenas à convecção. U é a velocidade do escoamento, q_0, o fluxo de calor de convecção e H, a dimensão característica do problema.

$$Gr = \frac{\beta g \Delta T d^3}{\nu^2}$$

Número de Grashof: Utilizado em problemas de convecção livre. β é o coeficiente de dilatção térmica do fluido $\beta = (\partial\rho/\partial T)_p$. ΔT é a diferença de temperaturas vertical imposta ao fluido, com a temperatura inferior sendo mais alta do que a superior.

$$Ra = \frac{\beta g \Delta T d^3}{\nu\alpha}$$

Número de Rayleigh: Semalhante ao número de Grashof. Define a estabilidade de massas submetidas a um gradiente de temperaturas. Pode ser interpretado como taxa de fornecimento de energia potencial ao fluido cuja densidade é maior nas camadas superiores, e a taxa de dissipação de energia por efeitos viscosos.

$$Ma = \frac{\Delta T \, d\sigma/dT \, d^3}{\nu\alpha}$$

Número de Marangoni: Utilizado em problemas de convecção livre com efeitos de tensão supeficial. σ é a tensão superficial do fluido.

$$Bi = \frac{hd}{\kappa}$$

Número de Biot: Utilizado em problemas de condução de calor em sólidos com convecção na superfície do sólido. Mede a relação entre a resistência térmica de condução de calor dentro do corpo e a resistência térmica de convecção. κ é a condutividade térmica do sólido.

$$Nu = \frac{hd}{\kappa}$$

Número de Nusselt: Utilizado em problemas de transferência de calor por convecção: representa a relação entre as taxas de transferência de calor por convecão e a que se obteria por condução com um gradiente de temperatura dado por $\Delta T/d$. κ é a condutividade térmica do fluido.

$$Sh = \frac{h_m d}{D}$$

Número de Sherwood: Utilizado em problemas de transferência de massa. É semelhante ao número de Nusselt. h_m é o coeficiente de transferência de massa por convecção e D, o coeficiente de difusão da espécie química.

$$St = \frac{fd}{U}$$

Número de Strouhal: é importante em problemas de aerodinâmica envolvendo vibrações ou formação periódica de vórtices.

$$Ri = \frac{-g \, d\rho/dz}{\rho(dU/dz)^2}$$

Número de Richardson: Utilizado em problemas de estabilidade em meteorologia e oceanografia. Números de Richardson negativos indicam a existência de massas de fluido mais densas nas camadas superiores, que tendem a instabilizar o meio.

$K = \dfrac{d}{\lambda}$ **Número de Knudsen**: Utilizado em escoamentos de gases rarefeitos. d é a dimensão característica do problema e λ, o livre caminho médio das moléculas do gás.

$E = \dfrac{U^2}{C_p(\Delta T)}$ **Número de Eckert**: Este número relaciona aquecimento devido à compressão, com aquecimento por transferência de calor. Pode também ser utilizado em problemas envolvendo o escoamento de fluidos incompressíveis.

$Bo = \dfrac{\rho g d^2}{\sigma}$ **Número de Bond**: Utilizado em problemas de convecção livre com interface entre dois fluidos. σ é a tensão superficial do fluido.

$Ca = \dfrac{U^2}{E/\rho}$ **Número de Cauchy**: É semelhante ao número de Mach. E é o módulo de elasticidade do meio.

$Eu = \dfrac{\Delta p}{\rho U^2}$ **Número de Euler**: É um coeficiente de pressão.

$We = \dfrac{\rho U^2 L}{\sigma}$ **Número de Weber**: É um parâmetro importante nos problemas que envolvem tensão superfícial (σ é a tensão superficial).

$f = \dfrac{\Delta H/(U^2/2g)}{L/d}$ **Coeficiente de perda de carga em tubos**: Utilizado no cálculo de tubulações. ΔH é a perda de carga e L, o comprimento da tubulação.

$C_L = \dfrac{L}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}$ **Coeficiente de sustentação**: Utilizado em aerodinâmica; L é a força de sustentação de um aerofólio e A, sua superfície em planta.

$C_D = \dfrac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}$ **Coeficiente de arraste**: Utilizado em aerodinâmica; D é a força de resistência ao avanço de um corpo que se move com velocidade U em um fluido e A, sua área frontal.

$C_p = \dfrac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2}$ **Coeficiente de pressão**: Utilizado em aerodinâmica; p_∞ é a pressão longe do corpo.

$\sigma = \dfrac{p - p_v}{\frac{1}{2}\rho U^2}$ **Coeficiente de cavitação**: Utilizado na engenharia de máquinas hidráulicas; p_v é a pressão parcial de vapor do fluido.

A.6 Problemas

1. A velocidade média de um fluido que escoa em um tubo de diâmetro d é função do gradiente de pressão, $\partial p/\partial x$ e da viscosidade dinâmica μ do fluido. Encontre uma expressão para a velocidade média em um tubo liso, usando so princípios da análise dimensional.

2. Obtenha uma expressão para o torque T necessário para girar um disco de diâmetro d

a uma velocidade angular Ω, imerso em um fluido de massa espcífica ρ, que se encontra a uma distância t de uma parede. Encontre também uma expressão para a a exigência de potência para girar o disco.

3. A velocidade de propagação de ondas de superfície de pequena amplitude numa região de profundidade uniforme é dada por:

$$c^2 = \left(\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda} + \frac{g\lambda}{2\pi} \right) \tanh \frac{2\pi h}{\lambda}$$

onde h é a profundidade do líquido em repouso, λ, o comprimento de onda da perturbação que se propaga e σ, a tensão superfícial. Usando L e V_0 como um comprimento e uma velocidade característicos, obtenha os grupos adimensionais que caracterizam a equação e determine as condições para existência de semelhança.

4. Pretende-se estudar experimentalmente o arraste de um submarino ($d = 3,0\,m$, $U = 5,0\,m/s$) que opera a grande profundidade. Dispõe-se de um túnel de água, com velocidade até $20\,m/s$, que pode receber modêlos até $0,6\,m$ de diâmetro e um túnel aerodinâmico atmosférico, com velocidade até $150\,m/s$ e que pode receber modelos até $0,40\,m$ de diâmetro.

   (a) Haverá possibilidade de se conseguir semelhança nos ensaios?

   (b) Qual seria sua escolha de túnel? Justificar as razões da escolha.

   Dados: $\nu = 1,0 \times 10^{-6} m^2/s$ (água) e $\nu = 1,5 \times 10^{-5} m^2/s$ (ar).

5. Mosrtar que o período de oscilação de todo modo natural de oscilação de um líquido sem viscosidade em um tubo em U com a superfície superior aberta para a atmosfera é diretamente proporcional ao diâmetro do tubo.

6. Mostrar que a frequência de todos os modos de vibração de uma gota de líquido sob ação da tensão superficial é proporcional à raiz quadrada da tensão superficial, inversamente proporcional à raiz quadrada da massa específica e inversamente proporcional à potência $3/2$ do diâmetro.

7. A frequência de vibração de uma corda sob ação do vento é de $512\,Hz$, sob certa velocidade do vento. Qual será a frequência se o o diâmetro da corda for duplicado e a velocidade do vento, reduzida à metade? (O diâmetro é a única característica da corda que intervem na frequência de vibração)

8. A altura h de uma maré, devida a um vento permanente que sopra sobre a superfície de um lago depende da profundidade D, do comprimento L do lago, do peso específico da água e da força tangencial τ por unidade de área que o vento exerce sobre a superfície do lago. Qual é a forma mais geral da equação que descreve a altura h da maré?

9. A velocidade do som em um gás depende da pressão e da densidade ρ do gás. Mosrtar, através de análise dimensional, que a velocidade do som é proporcional à raix quadrada da relação entre a pressão e densidade do gás.

10. A velocidade de um gás saindo de um reservatório depende da pressão ambiente p_1, da pressão p_0 e da densidade ρ_0 do gás no reservatório. Para valores especificados de p_0 e p_1, a velocidade de do ar saindo de um reservatório é de $100\,m/s$. Qual será a velocidade de saída do reservatório nas mesmas condições de pressão se o gás for o hidrogênio? (A relação ente as densidades do ar e do hdrogênio é 14,4).

11. Mostrar que a velocidade de deslocamento de uma estrutura de ondas de pequena altura em águas profundas é proporcional à raiz quadrada do comprimento de onda da estrutura. Desprezar efeitos viscosos e de tensão superfícial.

12. O rendimento de uma transmissão por engrenagens depende dos diâmetros D e d das engrenagens, da viscosidade dinâmica μ do lubrificante, da velocidade angular N da árvore de transmissão e do carregamento$F$ por unidade de largura dos dentes das engrenagens. Fazer a análise dimensional do problema.

13. A queda de pressão Δp em um registro, em uma curva, em um orifício, ou em qualquer acidente de uma tubulação depende da forma do acidente, do diâmetro D da tubulação da velocidade V do escoamento, da densidade ρ e da viscosidade dinâmica μ do líquido. Obter a expressão mais geral para Δp. Obter uma forma particular, admitindo que a viscosidade tenha um efeito desprezível.

14. Em casos excepcionais, a matriz dimensional de um problema tem posto inferior ao número de linhas. A matriz é dita como sendo singular. Um exemplo de matriz dimensional singular é dado ao lado. Apenas duas colunas são linearmente independentes, o que implica em que todos os determinantes de terceira ordem da matriz são iguais a zero. Verificar essa propriedade, mostrar que as séries completas de produtos adimensionais contém dois produtos e que uma possível série é dada pelos produtos:

	P	Q	S	T
M	2	1	3	4
L	-1	6	-3	0
T	1	20	-3	8

$$\pi_1 = P\,R^{-1/3}S^{-1/4} \qquad \pi_2 = Q\,R^2S^{-7/4}$$

ou:

$$\pi_1 = P^{12}R^{-4}S^{-3} \qquad \pi_2 = Q^4R^8S^{-7}$$

15. Determinar uma série completa de produtos adimensionais de um problema em que os expoentes das variáveis que intervém na lei que rege o comportamento do sistema obedecem aos sistemas de equações algébrica lienares abaixo:

$$\begin{array}{rrcl} M: & r+2s-t+3u-3v & = & 0 \\ L: & 2p+6q-3r+t+v & = & 0 \\ T: & q-r-5s-2t+2u+v & = & 0 \\ Q: & p+2q-u-4v & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

16. Determinar o posto das matrizes dimensionais abaixo e o número de produtos de uma série completa. Calcular os produtos. Eliminar os expoentes fracionários.

	A	B	C	D	E	F	G	H
M	1	1	0	-2	0	1	-1	2
L	2	2	0	1	4	-2	-3	5
T	-3	2	0	-1	-4	3	1	4

	A	B	C	D
M	-7	-2	-3	14
L	-2	-4	3	1
T	-1	2	-3	4

	A	B	C	D	E	F
M	1	1	-1	0	0	-2
L	3	2	1	-1	-4	0
T	-1	-2	2	0	3	1

	A	B	C	D
M	1	-1	2	0
L	-3	0	1	-2
T	-1	-2	5	-2
θ	4	-1	1	2

17. **Influência da temperatura sobre a viscosidade de um gás[18]:** em muitas aplicações da teoria cinética dos gases não é necessário levar em conta a estrutura das moléculas que formam o gás. Quando as moléculas se aproximam suficientemente, surge o efeito de repulsão, caracterizado por uma força de curta distância, proporcional ao inverso da distância entre o centro das moléculas, elevada a um expoente n, normalmente maior do que 5 ($F = Kx^{-n}$). K é um coeficiente carcterístico das moléculas.

Lord Rayleigh admitiu a viscosidade dos gases como independente da densidade e estudou a dependência daquela, com a temperatura. Os resultados de Lord Rayleigh mostraram-se válidos para pressões variand de centésimos a uma atmosfera. Acima desse valor, os efeitos de atração inter molecular tornam-se mais importantes e invalidam as hipótese de Lord Rayleigh. Se a viscosidade de um gás não depender da densidade de um gás, não depende dos características que definem a densidade, que são o número de moléculas por unidade de volume e o livre caminho médio das mesmas. A viscosidade pode ser determinada em função da massa m de uma molécula, da velocidade média V de uma molécula e do coeficiente de repulsão K. O comportamento do gás obedece auma lei da forma:

$$\varphi(\mu, K, m, V) = 0.$$

Mostrar que a série completa de produtos adimensionais se compõe de um único termo da forma:

$$\pi = \mu K^{2/(n-1)} m^{-(n+1)/(n-1)} V^{-(n+3)/(n-1)}.$$

Mostrar que a viscosidade depende da temperatura segundo a lei:

$$\mu = \beta m^{1/2} K^{2/(n-1)} \theta^{s},$$

onde θ é a temperatura do gás, β é uma constante e

$$s = \frac{1}{2} + \frac{2}{n+1}.$$

Levar em consideração que a energia cinética de uma molécula, $mV^2/2$ é proporcional à temperatura θ. Mostrar que viscosidade aumenta com a temperatura e que a curva que mosrta a dependência $\mu = \mu(\theta)$ é uma reta quando as duas variáveis são plotadas em escala logarítmica.

18. O momento de arfagem máximo que se exerce sobre um hidroavião no momento de pouso na água é função das seguintes variáveis:

    (a) Ângulo α, da trajetória de vôo com a horizontal;
    (b) Ângulo β, do avião com relação à direção horizontal;
    (c) Velocidade de amerissagem V;
    (d) Massa m do hidroavião;
    (e) Raio de giração R do hidoravião em relação ao eixo de arfagem;
    (f) Dimensão característica da fuselagem do hidroavião;
    (g) Densidade da água;
    (h) Aceleração da gravidade.

    Fazer a análise dimensional do problema com o objetivo de representar graficamente os resultados dos ensaios de amerissagem.

    Obs: Arfagem é o movimento de giro em torno do eixo transversal, em que o hidroavião se inclina para a frente, ou para trás.

19. Supondo que a vazão volumétrica $Q(m^3/s)$ sobre a soleira de um vertedor retangular seja independente da viscosidade da água e proporcional à largura do vertedor, mostrar que Q é proporcional à espessura da lâmina d'água sobre a soleira elevada a 3/2.

20. Mostrar que a vazão volumétrica $Q(m^3/s)$ sobre a soleira de um vertedor triangular é proporcional à potência 5/2 da espessura da lâmina d'água, acima do vértice inferior do vertedor. Supor que a vazão é independente da viscosidade da água.

21. Um termistor é um condutor elétrico cuja resistência R decresce rapidamene com a temperaura, segundo a lei:

    $$R = R_0 \exp\left(\beta/\theta\right),$$

    onde R_0 e β são constantes e θ, a temperatura do termistor. A queda de tensão no termistor segue a lei de Ohm, na forma $V = RI$. Não obstante, a resitência depende da diferença de temperturas $\Delta\theta$ que se estabelece no equilíbrio, entre o termistor e o meio ambiente. O calor transmitido para o ambiente ($Watts$) é dado por $Q = h\,\Delta\theta$, com o coeficiente de transmissão de calor por convecção praticamente constante quando a temperatura do termistor não é muito elevada. Nessas condições a queda de potencial V, através do termistor é determinada pela corrente I, pelas consatantes R_0 e β, pela temperatura ambiente θ_0 e pelo coeficiente de transmissão de calor por convecçaõ h, isso é:

    $$V = f\left(I, \theta_0, R_0, \beta, h\right).$$

Mostrar que a lei que descreve a queda de tensão no termistor pode ser escrita sob a forma[18, 4]:

$$\frac{V}{\theta_0} = f\left(\frac{I}{\theta_0}\sqrt{\frac{\beta R_0}{h}}, \frac{\theta_0}{\beta}\right).$$