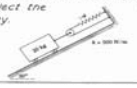
EXEMPLOS

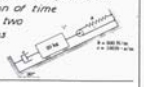
ART. 9/2 FREE VIBRATION OF PARTICLES (UNDAMPED) NO.

The 20-kg body is displaced a distance of 200 mm down the incline from its equilibrium position and released from rest. Determine the natural frequency f_n of its subsequent oscillation and its maximum velocity and acceleration. Neglect the mass of the pulley.



ART. 9/2 FREE VIBRATION OF PARTICLES (DAMPED) NO. 2

The 20-kg body is displaced a distance of 200 mm down the incline from its equilibrium position and released from rest. Express the displacement x from the equilibrium position as a function of time and find the ratio of two successive amplitudes of the damped oscillation.



ART. 9/3 FORCED VIBRATION OF PARTICLES

The 20-kg body is subjected to a periodic force $P = 100 \sin 12t$ newtons where t is in seconds with spring stiffness k and viscous damping constant c as shown, determine the amplitude X of the steady-state vibration and the phase angle ϕ by which X lags P. Also find the amount ΔX by which the undamped amplitude is reduced.



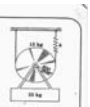
ART. 9/4 VIBRATION OF RIGID BODIES

The 100-kg wheel with radius of gyration $\bar{k}$ is released from rest with a displaced 0.2 m below the equilibrium position. With spring stiffness k and damping constant c shown, derive the equation of motion and express y as a function of time. Find the ratio of two successive amplitudes.



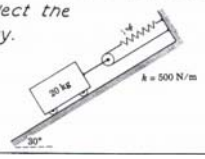
ART. 9/5 ENERGY METHODS

Find the natural frequency f_n of vertical oscillation of the 25-kg mass after release from a displaced position. The radius of gyration of the 15-kg pulley is $\bar{k} = 450$ mm, and the spring stiffness is $k = 540$ N/m.



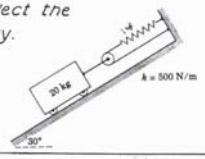
ART. 8/2 FREE VIBRATION OF PARTICLES (UNDAMPED) NO.

The 20-kg body is displaced a distance of 200 mm down the incline from its equilibrium position and released from rest. Determine the natural frequency f_n of its subsequent oscillation and its maximum velocity and acceleration. Neglect the mass of the pulley.

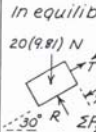


ART. 8/2 FREE VIBRATION OF PARTICLES (UNDAMPED) NO.

The 20-kg body is displaced a distance of 200 mm down the incline from its equilibrium position and released from rest. Determine the natural frequency f_n of its subsequent oscillation and its maximum velocity and acceleration. Neglect the mass of the pulley.



In equilibrium position, $T = T_0 = 20(9.81)\sin 30° = 98.1$ N



In general position, increase in spring tension is $\Delta(\frac{T}{2}) = k(2x)$ ∴

$T = T_0 + \Delta T = 98.1 + 4kx = 98.1 + 2000x$ N

$\Sigma F_x = m\ddot{x}$: $20(9.81)\sin 30° - (98.1 + 2000x) = 20\ddot{x}$

or $98.1 - 98.1 - 2000x = 20\ddot{x}$, $\ddot{x} + 100x = 0$

so $\omega_n = \sqrt{100} = 10$ rad/s, $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{10}{2\pi} = \boxed{1.59 \text{ Hz}}$

Sol. (Eq. 8/6) is $x = x_0 \cos \omega_n t + (\dot{x}_0/\omega_n)\sin \omega_n t$

where $x_0 = 0.200$ m, $\dot{x}_0 = 0$. Thus $x = 0.2 \cos 10t$

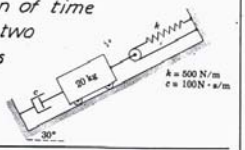
∴ $\dot{x} = -0.2(10)\sin 10t$, $\boxed{|\dot{x}_{max}| = 2 \text{ m/s}}$

$\ddot{x} = -0.2(10)^2 \cos 10t$, $\boxed{|\ddot{x}_{max}| = 20 \text{ m/s}^2}$

JLM

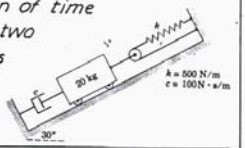
ART. 8/2 FREE VIBRATION OF PARTICLES (DAMPED) NO. 2

The 20-kg body is displaced a distance of 200 mm down the incline from its equilibrium position and released from rest. Express the displacement x from the equilibrium position as a function of time and find the ratio of two successive amplitudes of the damped oscillation.



ART. 8/2 FREE VIBRATION OF PARTICLES (DAMPED) NO. 2

The 20-kg body is displaced a distance of 200 mm down the incline from its equilibrium position and released from rest. Express the displacement x from the equilibrium position as a function of time and find the ratio of two successive amplitudes of the damped oscillation.



$20(9.81)$ N, T, $c\dot{x}$, kx, $30°$, R

$T = T_0 + Kx = 98.1 + 2000x$ N (see Sol. No.1 for equiv. spr. const. $K = 4k = 2000$ N/m)

$\Sigma F_x = m\ddot{x}$ gives

$20(9.81)\sin 30° - (98.1 + 2000x) - 100\dot{x} = 20\ddot{x}$

$20\ddot{x} + 100\dot{x} + 2000x = 0, \quad \ddot{x} + 5\dot{x} + 100x = 0$

Solution (Eq. 8/12) is $x = Ce^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \psi)$

$\omega_n = \sqrt{K/m} = \sqrt{2000/20} = 10$ rad/s, $\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{100}{2(20)(10)} = 0.25$

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 10\sqrt{1-(0.25)^2} = 9.68$ rad/s

$x = Ce^{-2.5t}\sin(9.68t + \psi)$; $x = 0.2$ m & $\dot{x} = 0$ for $t = 0$ give

$0.2 = C\sin\psi$ & $0 = -2.5C\sin\psi + 9.68C\cos\psi$. Solve & get

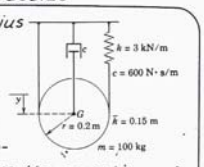
$C = 0.207$ m, $\psi = 1.318$ rad so $\boxed{x = 0.207e^{-2.5t}\sin(9.68t + 1.318)}$

$\delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi(0.25)}{\sqrt{1-(0.25)^2}} = 1.622, \quad \boxed{x_1/x_2 = 5.06}$

JLM

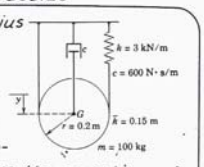
ART. 8/4 VIBRATION OF RIGID BODIES

The 100-kg wheel with radius of gyration $\bar{k}$ is released from rest with G displaced 0.2 m below the equilibrium position. With spring stiffness k and damping constant c shown, derive the equation of motion and express y as a function of time. Find the ratio of two successive amplitudes.



ART. 8/4 VIBRATION OF RIGID BODIES

The 100-kg wheel with radius of gyration $\bar{k}$ is released from rest with G displaced 0.2 m below the equilibrium position. With spring stiffness k and damping constant c shown, derive the equation of motion and express y as a function of time. Find the ratio of two successive amplitudes.



Equil. $T_0 = 981/2$ N, $T = 490.5 + 6000y$ $\quad T = T_0 + 3000(2y)$

$\Sigma M_G = \bar{I}\ddot{\theta}$

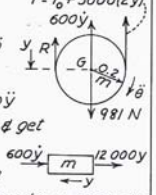
$0.2R - 0.2(490.5 + 6000y) = 100(0.15)^2\ddot{\theta}$

$\Sigma F_y = m\ddot{y}$

$981 - [R + 600\dot{y} + 490.5 + 6000y] = 100\ddot{y}$

Eliminate R, substitute $\ddot{\theta} = \ddot{y}/0.2$ & get

$$\boxed{156.25\ddot{y} + 600\dot{y} + 12\,000y = 0}$$



Motion is equivalent to that of a particle of mass $m = 156.25$ kg, $k = 12\,000$ N/m, $c = 600$ N·s/m

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{12\,000}{156.25}} = 8.76 \frac{rad}{s}$, $\quad \mathcal{J} = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{600}{2(156.25)(8.76)} = 0.219$

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\mathcal{J}^2} = 8.76\sqrt{1-(0.219)^2} = 8.55$ rad/s

From Eq. 8/12, $y = Ce^{-\mathcal{J}\omega_n t}\sin(\omega_d t + \psi)$

With $y = 0.2$ m, $\dot{y} = 0$ for $t = 0$, $\quad \boxed{y = 0.205e^{-1.92t}\sin(8.55t + 1.350)}$

$\delta = \ln\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \frac{2\pi\mathcal{J}}{\sqrt{1-\mathcal{J}^2}} = \frac{2\pi(0.219)}{\sqrt{1-(0.219)^2}} = 1.411$, $\quad \boxed{y_1/y_2 = 4.10}$

ART. 8/5 ENERGY METHODS

Find the natural frequency f_n of vertical oscillation of the 25-kg mass after release from a displaced position. The radius of gyration of the 15-kg pulley is $\bar{k} = 450$ mm, and the spring stiffness is $K = 540$ N/m.



ART. 8/5 ENERGY METHODS

Find the natural frequency f_n of vertical oscillation of the 25-kg mass after release from a displaced position. The radius of gyration of the 15-kg pulley is $\bar{k} = 450$ mm, and the spring stiffness is $K = 540$ N/m.



Let y = downward displacement from equil. position

Take $V_e = 0$ & $V_g = 0$ when $y = 0$

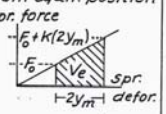
At equil. $F_0 = \frac{1}{2}(40)(9.81) = 196.2$ N

For max. displacement $y = y_m$

$V_g = -40(9.81)y_m = -392.4y_m$

$V_e = 196.2(2y_m) + \frac{1}{2}(540)(2y_m)^2 = 392.4y_m + 1080y_m^2$

$V_{max} = V_g + V_e = 1080y_m^2$



For $y = 0$, $T = T_{max} = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$

$= \frac{1}{2}(40)\bar{v}^2 + \frac{1}{2}(15)(0.450)^2(\bar{v}/0.6)^2$

$= 24.2\bar{v}^2$ where $\bar{v} = \bar{v}_{max}$

For linear response $y = y_m \sin \omega_n t$

$\bar{v}_{max} = \dot{y}_{max} = y_m\omega_n$ so $T_{max} = 24.2y_m^2\omega_n^2$

But $T_{max} = V_{max}$ so $24.2y_m^2\omega_n^2 = 1080y_m^2$

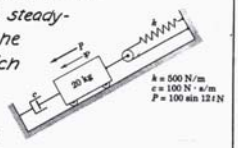
$\omega_n^2 = 1080/24.2$, $\omega_n = 6.68$ rad/s

$f_n = \omega_n/2\pi = 6.68/2\pi = \boxed{1.063 \text{ Hz}}$

JLM

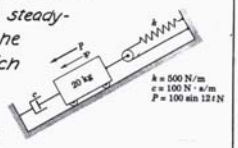
ART. 8/3 FORCED VIBRATION OF PARTICLES

The 20-kg body is subjected to a periodic force $P = 100 \sin 12t$ newtons where t is in seconds. With spring stiffness k and viscous damping constant c as shown, determine the amplitude X of the steady-state vibration and the phase angle ϕ by which X lags P. Also find the amount ΔX by which the undamped amplitude is reduced.



ART. 8/3 FORCED VIBRATION OF PARTICLES

The 20-kg body is subjected to a periodic force $P = 100 \sin 12t$ newtons where t is in seconds. With spring stiffness k and viscous damping constant c as shown, determine the amplitude X of the steady-state vibration and the phase angle ϕ by which X lags P. Also find the amount ΔX by which the undamped amplitude is reduced.



$20(9.81)$ N



$T = T_0 + Kx = 98.1 + 2000x$ N (see No. 1 of 8/2 for equiv. spr. const. $K = 4k = 2000$ N/m)

$P = P_0 \sin \omega t = 100 \sin 12t$ N

Eq. 8/20, $X = \dfrac{P_0/K}{\left\{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\beta\omega/\omega_n]^2\right\}^{1/2}}$

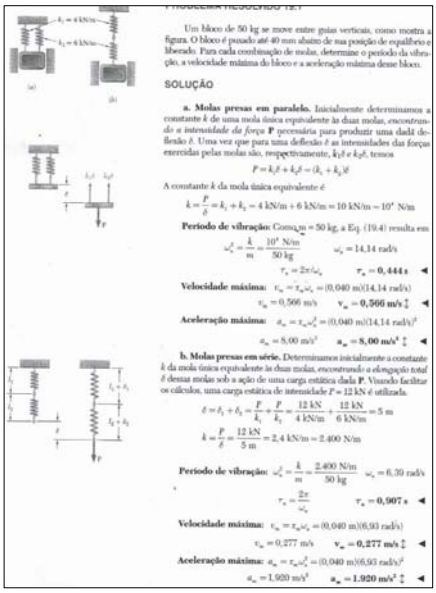
$\omega_n = \sqrt{\dfrac{K}{m}} = \sqrt{\dfrac{2000}{20}} = 10 \dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$, $\beta = \dfrac{c}{2m\omega_n} = \dfrac{100}{2(20)(10)} = 0.25$

$$X = \frac{100/2000}{\left\{[1-(12/10)^2]^2 + [2(0.25)(12/10)]^2\right\}^{1/2}} = \boxed{0.0672 \text{ m}}$$

Eq. 8/21, $\phi = \tan^{-1}\left[\dfrac{2\beta\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right] = \tan^{-1}\left[\dfrac{2(0.25)(12/10)}{1-(12/10)^2}\right] = \boxed{0.701\pi \text{ rad}}$

For $c = 0$, $X = \left|\dfrac{100/2000}{1-(12/10)^2}\right| = 0.1136$ m, $\Delta X = 0.1136 - 0.0672 = \boxed{0.0464 \text{ m}}$

JLM



Um bloco de 50 kg se move entre guias verticais, como mostra a figura. O bloco é puxado até 40 mm abaixo de sua posição de equilíbrio e liberado. Para cada combinação de molas, determine o período da vibração, a velocidade máxima do bloco e a aceleração máxima desse bloco.

SOLUÇÃO

a. Molas presas em paralelo. Inicialmente determinamos a constante k de uma mola única equivalente às duas molas, *encontrando a intensidade da força* $\mathbf{F}$ necessária para produzir uma dada deflexão δ. Uma vez que para uma deflexão δ as intensidades das forças exercidas pelas molas são, respectivamente, $k_1\delta$ e $k_2\delta$, temos

$$P = k_1\delta + k_2\delta = (k_1 + k_2)\delta$$

A constante k da mola única equivalente é

$$k = \frac{P}{\delta} = k_1 + k_2 = 4\ \text{kN/m} + 6\ \text{kN/m} = 10\ \text{kN/m} = 10^4\ \text{N/m}$$

Período de vibração: Como $m = 50$ kg, a Eq. (19.4) resulta em

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} = \frac{10^4\ \text{N/m}}{50\ \text{kg}} \qquad \omega_n = 14{,}14\ \text{rad/s}$$

$$\tau_n = 2\pi/\omega_n \qquad \boldsymbol{\tau_n = 0{,}444\ \text{s}} \blacktriangleleft$$

Velocidade máxima: $v_m = x_m\omega_n = (0{,}040\ \text{m})(14{,}14\ \text{rad/s})$

$$v_m = 0{,}566\ \text{m/s} \qquad \boldsymbol{v_m = 0{,}566\ \text{m/s}\ \updownarrow} \blacktriangleleft$$

Aceleração máxima: $a_m = x_m\omega_n^2 = (0{,}040\ \text{m})(14{,}14\ \text{rad/s})^2$

$$a_m = 8{,}00\ \text{m/s}^2 \qquad \boldsymbol{a_m = 8{,}00\ \text{m/s}^2\ \updownarrow} \blacktriangleleft$$

b. Molas presas em série. Determinamos inicialmente a constante k da mola única equivalente às duas molas, *encontrando a elongação total* δ dessas molas sob a ação de uma carga estática dada $\mathbf{P}$. Visando facilitar os cálculos, uma carga estática de intensidade $P = 12$ kN é utilizada.

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{P}{k_1} + \frac{P}{k_2} = \frac{12\ \text{kN}}{4\ \text{kN/m}} + \frac{12\ \text{kN}}{6\ \text{kN/m}} = 5\ \text{m}$$

$$k = \frac{P}{\delta} = \frac{12\ \text{kN}}{5\ \text{m}} = 2{,}4\ \text{kN/m} = 2.400\ \text{N/m}$$

Período de vibração: $\omega_n^2 = \dfrac{k}{m} = \dfrac{2.400\ \text{N/m}}{50\ \text{kg}}$ $\omega_n = 6{,}93\ \text{rad/s}$

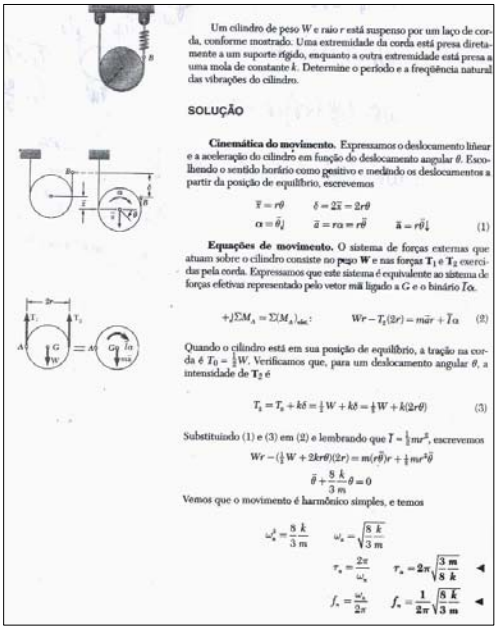
$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \qquad \boldsymbol{\tau_n = 0{,}907\ \text{s}} \blacktriangleleft$$

Velocidade máxima: $v_m = x_m\omega_n = (0{,}040\ \text{m})(6{,}93\ \text{rad/s})$

$$v_m = 0{,}277\ \text{m/s} \qquad \boldsymbol{v_m = 0{,}277\ \text{m/s}\ \updownarrow} \blacktriangleleft$$

Aceleração máxima: $a_m = x_m\omega_n^2 = (0{,}040\ \text{m})(6{,}93\ \text{rad/s})^2$

$$a_m = 1{,}920\ \text{m/s}^2 \qquad \boldsymbol{a_m = 1.920\ \text{m/s}^2\ \updownarrow} \blacktriangleleft$$



Um cilindro de peso W e raio r está suspenso por um laço de corda, conforme mostrado. Uma extremidade da corda está presa diretamente a um suporte rígido, enquanto a outra extremidade está presa a uma mola de constante k. Determine o período e a freqüência natural das vibrações do cilindro.

SOLUÇÃO

Cinemática do movimento. Expressamos o deslocamento linear e a aceleração do cilindro em função do deslocamento angular θ. Escolhendo o sentido horário como positivo e medindo os deslocamentos a partir da posição de equilíbrio, escrevemos

$$\bar{x} = r\theta \qquad \delta = 2\bar{x} = 2r\theta$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \ddot{\theta}\mathbf{j} \qquad \bar{a} = r\alpha = r\ddot{\theta} \qquad \bar{\mathbf{a}} = r\ddot{\theta}\downarrow \tag{1}$$

Equações de movimento. O sistema de forças externas que atuam sobre o cilindro consiste no peso $\mathbf{W}$ e nas forças $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$ exercidas pela corda. Expressamos que este sistema é equivalente ao sistema de forças efetivas representado pelo vetor $m\bar{a}$ ligado a G e o binário $\bar{I}\alpha$.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = \Sigma(M_A)_{\text{efet}}: \qquad Wr - T_2(2r) = m\bar{a}r + \bar{I}\alpha \tag{2}$$

Quando o cilindro está em sua posição de equilíbrio, a tração na corda é $T_0 = \frac{1}{2}W$. Verificamos que, para um deslocamento angular θ, a intensidade de $\mathbf{T}_2$ é

$$T_2 = T_0 + k\delta = \tfrac{1}{2}W + k\delta = \tfrac{1}{2}W + k(2r\theta) \tag{3}$$

Substituindo (1) e (3) em (2) e lembrando que $\bar{I} = \frac{1}{2}mr^2$, escrevemos

$$Wr - (\tfrac{1}{2}W + 2kr\theta)(2r) = m(r\ddot{\theta})r + \tfrac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}$$

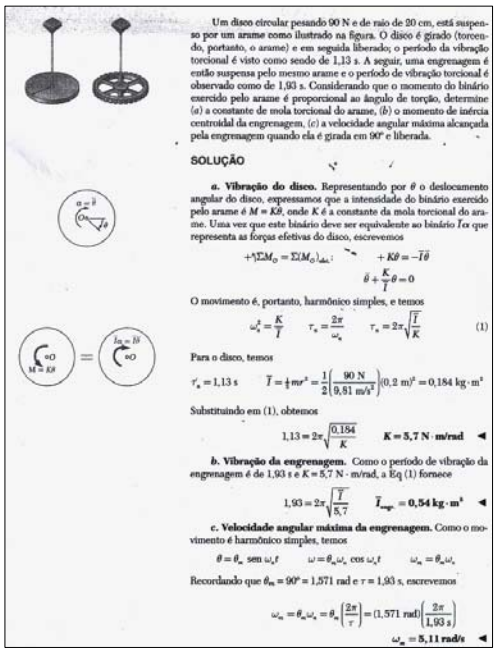
$$\ddot{\theta} + \frac{8}{3}\frac{k}{m}\theta = 0$$

Vemos que o movimento é harmônico simples, e temos

$$\omega_n^2 = \frac{8}{3}\frac{k}{m} \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{8}{3}\frac{k}{m}}$$

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \qquad \boldsymbol{\tau_n = 2\pi\sqrt{\frac{3}{8}\frac{m}{k}}} \blacktriangleleft$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \qquad \boldsymbol{f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{8}{3}\frac{k}{m}}} \blacktriangleleft$$



Um disco circular pesando 90 N e de raio de 20 cm, está suspenso por um arame como ilustrado na figura. O disco é girado (torcendo, portanto, o arame) e em seguida liberado; o período da vibração torcional é visto como sendo de 1,13 s. A seguir, uma engrenagem é então suspensa pelo mesmo arame e o período de vibração torcional é observado como de 1,93 s. Considerando que o momento do binário exercido pelo arame é proporcional ao ângulo de torção, determine (*a*) a constante de mola torcional do arame, (*b*) o momento de inércia centroidal da engrenagem, (*c*) a velocidade angular máxima alcançada pela engrenagem quando ela é girada em 90° e liberada.

SOLUÇÃO

***a.* Vibração do disco.** Representando por θ o deslocamento angular do disco, expressamos que a intensidade do binário exercido pelo arame é $M = K\theta$, onde K é a constante da mola torcional do arame. Uma vez que este binário deve ser equivalente ao binário $\bar{I}\alpha$ que representa as forças efetivas do disco, escrevemos

$$+\circlearrowleft \Sigma M_O = \Sigma (M_O)_{\text{efet}}: \qquad +K\theta = -\bar{I}\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{K}{\bar{I}}\theta = 0$$

O movimento é, portanto, harmônico simples, e temos

$$\omega_n^2 = \frac{K}{\bar{I}} \qquad \tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \qquad \tau_n = 2\pi\sqrt{\frac{\bar{I}}{K}} \tag{1}$$

Para o disco, temos

$$\tau_n = 1{,}13 \text{ s} \qquad \bar{I} = \tfrac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{90 \text{ N}}{9{,}81 \text{ m/s}^2}\right)(0{,}2 \text{ m})^2 = 0{,}184 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Substituindo em (1), obtemos

$$1{,}13 = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}184}{K}} \qquad K = 5{,}7 \text{ N} \cdot \text{m/rad} \quad \blacktriangleleft$$

***b.* Vibração da engrenagem.** Como o período de vibração da engrenagem é de 1,93 s e $K = 5{,}7$ N · m/rad, a Eq (1) fornece

$$1{,}93 = 2\pi\sqrt{\frac{\bar{I}}{5{,}7}} \qquad \bar{I}_{\text{engr.}} = 0{,}54 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad \blacktriangleleft$$

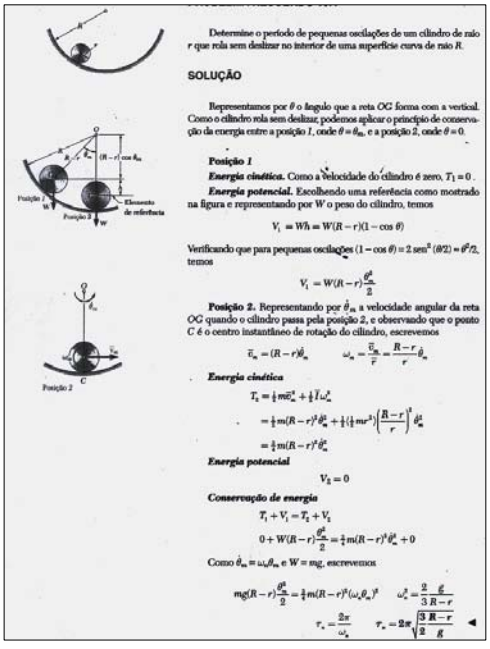
***c.* Velocidade angular máxima da engrenagem.** Como o movimento é harmônico simples, temos

$$\theta = \theta_m \operatorname{sen} \omega_n t \qquad \omega = \theta_m \omega_n \cos \omega_n t \qquad \omega_m = \theta_m \omega_n$$

Recordando que $\theta_m = 90° = 1{,}571$ rad e $\tau = 1{,}93$ s, escrevemos

$$\omega_m = \theta_m \omega_n = \theta_m \left(\frac{2\pi}{\tau}\right) = (1{,}571 \text{ rad})\left(\frac{2\pi}{1{,}93 \text{ s}}\right)$$

$$\omega_m = 5{,}11 \text{ rad/s} \quad \blacktriangleleft$$



Determine o período de pequenas oscilações de um cilindro de raio r que rola sem deslizar no interior de uma superfície curva de raio R.

SOLUÇÃO

Representamos por θ o ângulo que a reta OG forma com a vertical. Como o cilindro rola sem deslizar, podemos aplicar o princípio de conservação da energia entre a posição 1, onde $\theta = \theta_m$, e a posição 2, onde $\theta = 0$.

Posição 1

Energia cinética. Como a velocidade do cilindro é zero, $T_1 = 0$.

Energia potencial. Escolhendo uma referência como mostrado na figura e representando por W o peso do cilindro, temos

$$V_1 = Wh = W(R - r)(1 - \cos\theta)$$

Verificando que para pequenas oscilações $(1 - \cos\theta) = 2\operatorname{sen}^2(\theta/2) = \theta^2/2$, temos

$$V_1 = W(R - r)\frac{\theta_m^2}{2}$$

Posição 2. Representando por $\dot{\theta}_m$ a velocidade angular da reta OG quando o cilindro passa pela posição 2, e observando que o ponto C é o centro instantâneo de rotação do cilindro, escrevemos

$$\bar{v}_m = (R - r)\dot{\theta}_m \qquad \omega_n = \frac{\bar{v}_m}{r} = \frac{R - r}{r}\dot{\theta}_m$$

Energia cinética

$$T_2 = \tfrac{1}{2}m\bar{v}_m^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega_n^2$$

$$= \tfrac{1}{2}m(R - r)^2\dot{\theta}_m^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}mr^2\right)\left(\frac{R - r}{r}\right)^2\dot{\theta}_m^2$$

$$= \tfrac{3}{4}m(R - r)^2\dot{\theta}_m^2$$

Energia potencial

$$V_2 = 0$$

Conservação de energia

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$0 + W(R - r)\frac{\theta_m^2}{2} = \tfrac{3}{4}m(R - r)^2\dot{\theta}_m^2 + 0$$

Como $\dot{\theta}_m = \omega_n\theta_m$ e $W = mg$, escrevemos

$$mg(R - r)\frac{\theta_m^2}{2} = \tfrac{3}{4}m(R - r)^2(\omega_n\theta_m)^2 \qquad \omega_n^2 = \frac{2}{3}\frac{g}{R - r}$$

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \qquad \tau_n = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{R - r}{g}} \quad \blacktriangleleft$$



Um motor que pesa 1.575 N é suportado por quatro molas, cada uma tendo uma constante de 1.350 N/cm. O desbalanceamento do rotor é equivalente a um peso de 0,28 N localizado a 15 cm do eixo de rotação. Sabendo que o motor é restringido a mover-se verticalmente, determine (*a*) a rotação em rpm na qual ocorrerá ressonância, (*b*) a amplitude da vibração do motor a uma rotação de 1.200 rpm.

SOLUÇÃO

***a.* Rotação de ressonância.** A rotação de ressonância é igual à freqüência natural circular ω_n (em rpm) da vibração livre do motor. A massa do motor e a constante equivalente das molas de sustentação são

$$m = \frac{1.575 \text{ N}}{9{,}81 \text{ m/s}^2} = 160{,}55 \text{ kg}$$

$$k = (1.350 \text{ N/cm}) = 5.400 \text{ N/cm} = 540.000 \text{ N/m}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{540.000}{160{,}55}} = 55 \text{ rad/s} = 554 \text{ rpm}$$

Rotação de ressonância = 554 rpm ◄



***b.* Amplitude de vibração a 1.200 rpm.** A velocidade angular do motor e a massa equivalente ao peso de 0,28 N são

$$\omega = 1.200 \text{ rpm} = 125{,}7 \text{ rad/s}$$

$$m = \frac{P}{g} = \frac{0{,}28 \text{ N}}{9{,}81 \text{ m/s}^2} = 0{,}0285 \text{ kg}$$

A intensidade da força centrífuga causada pelo desbalanceamento do rotor é

$$P_m = ma_n = mr\omega^2 = (0{,}0285 \text{ kg})(0{,}15 \text{ m})(125{,}7 \text{ rad/s})^2 = 67{,}55 \text{ N}$$

A deflexão estática que seria causada por uma carga constante P_m é

$$\frac{P_m}{k} = \frac{67{,}55 \text{ N}}{5.400 \text{ N/cm}} = 0{,}0125 \text{ cm}$$

A freqüência forçada circular ω_f do movimento é a velocidade angular do motor,

$$\omega_f = \omega = 125{,}7 \text{ rad/s}$$

Substituindo os valores de P_m/k, ω_f e ω_n na Eq. (19.33), obtemos

$$x_m = \frac{P_m/k}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} = \frac{0{,}0125 \text{ cm}}{1 - (125{,}7/55)^2} = -0{,}00338 \text{ cm}$$

$$\mathbf{x_m = 0{,}00338 \text{ cm (defasado)}}$$ ◄

Nota. Como $\omega_f > \omega_n$, a vibração está defasada 180° em relação à força centrífuga causada pelo desbalanceamento do rotor. Por exemplo, quando a massa desbalanceada está diretamente abaixo do eixo de rotação, a posição do motor é $x_m = 0{,}00338$ cm acima da posição de equilíbrio.