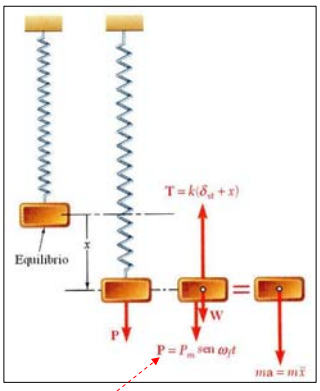
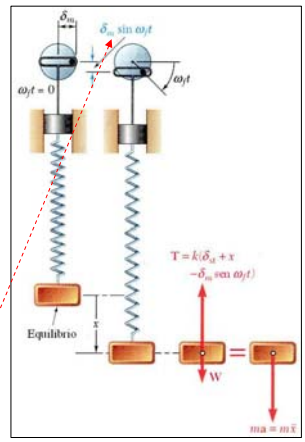


Cap. V – Sistemas de 1 Grau de Liberdade
Vibração Forçada

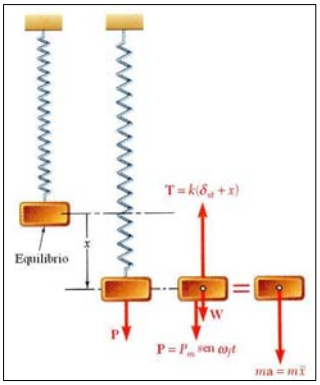
Vibração Forçada não Amortecida

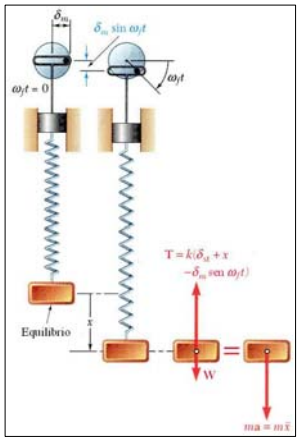




ω_f = freqüência forçada

Vibrações forçadas - ocorrem quando um sistema é sujeito a uma **força periódica** ou a um **deslocamento periódico de um suporte**.

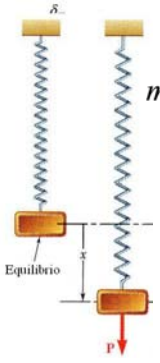




$$+\downarrow \quad \sum F = ma:$$

$$P_m \operatorname{sen}\omega_f t + W - k\left(\delta_{st} + x\right) = m\ddot{x} \qquad W - k\left(\delta_{st} + x - \delta_m \operatorname{sen}\omega_f t\right) = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx = P_m \operatorname{sen}\omega_f t \qquad m\ddot{x} + kx = k\delta_m \operatorname{sen}\omega_f t$$



$$m\ddot{x} + kx = P_m \operatorname{sen}\omega_f t$$



$$m\ddot{x} + kx = k\delta_m \operatorname{sen}\omega_f t$$

Substituindo a solução particular: $x = x_m \operatorname{sen}\omega_f t$

$$-m\omega_f^2 x_m \operatorname{sen}\omega_f t + kx_m \operatorname{sen}\omega_f t = P_m \operatorname{sen}\omega_f t$$

$$x_m = \frac{P_m}{k - m\omega_f^2} = \frac{P_m/k}{1-\left(\omega_f/\omega_n\right)^2} = \frac{\delta_m}{1-\left(\omega_f/\omega_n\right)^2}$$

Solução Completa:

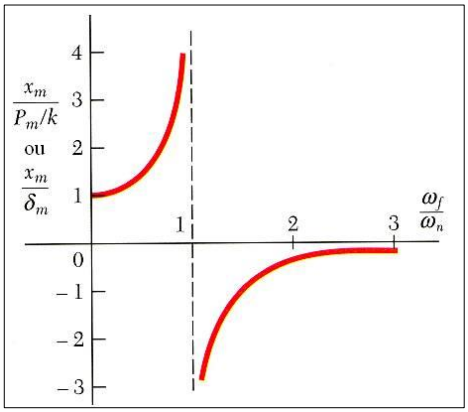
$$x = x_{complementar} + x_{particular}$$

$$= \left[C_1 \operatorname{sen}\omega_n t + C_2 \cos\omega_n t\right] + x_m \operatorname{sen}\omega_f t$$

Transiente + Permanente

Princípio da Superposição para Sistemas Lineares

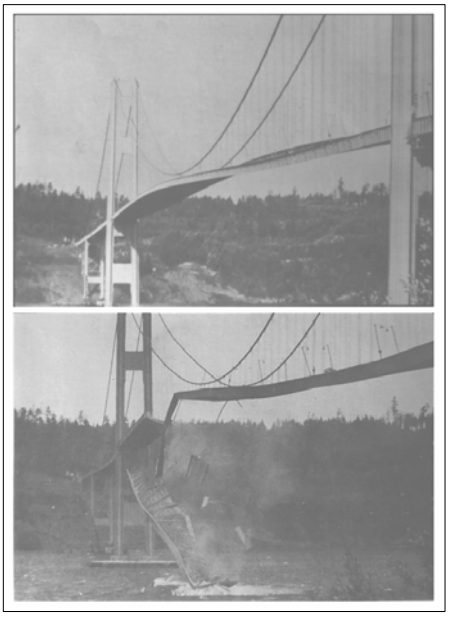
$$x_m = \frac{P_m}{k - m\omega_f^2} = \frac{P_m/k}{1-\left(\omega_f/\omega_n\right)^2} = \frac{\delta_m}{1-\left(\omega_f/\omega_n\right)^2}$$



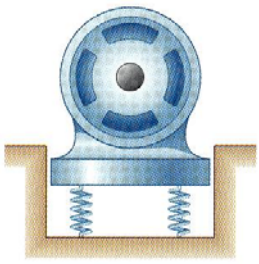
Quando $w_f = w_n$, o carregamento de entrada coloca o sistema em ***ressonância***.

Ex.: Colapso da Ponte de Tacoma Narrows (EUA-1940)

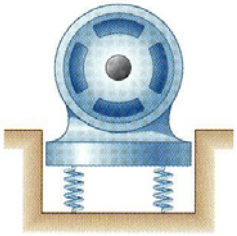
Colapso da Ponte de Tacoma Narrows (EUA-1940)



Ex.5.1: Um motor que pesa 1575N é suportado por quatro molas, cada uma com uma constante de 1350N/cm. O desbalanceamento do motor é equivalente a um peso de 0,28N localizado a 15cm do eixo de rotação.
Determine *a)* a velocidade em rpm na qual ocorrerá ressonância, e *b)* a amplitude máxima de vibração em 1200 rpm.



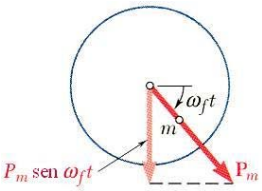
Ex.5.1:



W = 1575N

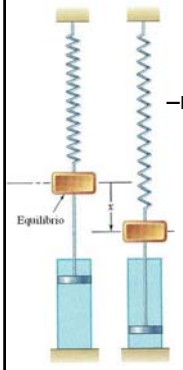
k = 4 x1350N/cm

ω_n = 57,99 rad/s



$$x_m = \frac{P_m}{k - m\omega_f^2} = \frac{P_m/k}{1-\left(\omega_f/\omega_n\right)^2} = \frac{\delta_m}{1-\left(\omega_f/\omega_n\right)^2}$$

Vibração Forçada Amortecida



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_m \operatorname{sen}\omega_f t \qquad x = x_m \operatorname{sen}(\omega_f t - \phi)$$

$$-mx_m\omega_f^2 \operatorname{sen}(\omega_f t - \phi) + cx_m\omega_f \cos(\omega_f t - \phi) + kx_m \operatorname{sen}(\omega_f t - \phi) = P_m \operatorname{sen}\omega_f t$$

$$\frac{x_m}{P_m/k} = \frac{x_m}{\delta_m} = \frac{1}{\sqrt{\left[1-(\omega_f/\omega_n)^2\right]^2 + \left(2\zeta\omega_f/\omega_n\right)^2}}$$

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1}\frac{2\xi\omega_f/\omega_n}{1-(\omega_f/\omega_n)^2}$$

$$-mx_m\omega_f^2 \operatorname{sen}(\omega_f t - \phi) + cx_m\omega_f \cos(\omega_f t - \phi) + kx_m \operatorname{sen}(\omega_f t - \phi) = P_m \operatorname{sen}\omega_f t$$

$$\operatorname{sen}(\omega_f t - \phi) = \operatorname{sen}\omega_f t \cos\phi - \cos\omega_f t \operatorname{sen}\phi$$
$$\cos(\omega_f t - \phi) = \cos\omega_f t \cos\phi + \operatorname{sen}\omega_f t \operatorname{sen}\phi$$

$$\left[(k - m\omega_f^2)\cos\phi + c\omega_f \operatorname{sen}\phi\right]x_m = P_m$$
$$\left[(k - m\omega_f^2)\operatorname{sen}\phi - c\omega_f \cos\phi\right]x_m = 0$$

$$\left[(k - m\omega_f^2)\operatorname{sen}\phi - c\omega_f \cos\phi\right]x_m = 0 \therefore \phi = \operatorname{tg}^{-1}\frac{c\omega_f}{(k - m\omega_f^2)} = \operatorname{tg}^{-1}\frac{2\xi\omega_f/\omega_n}{1-(\omega_f/\omega_n)^2}$$

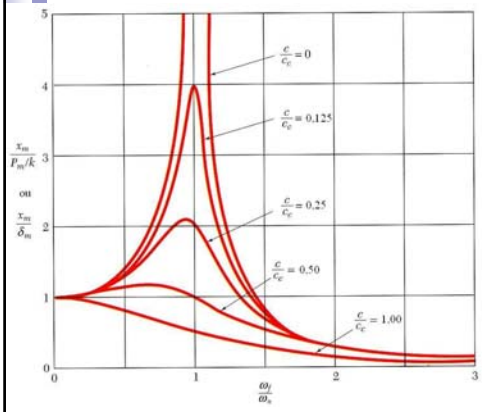
$$\left[(k - m\omega_f^2)\cos\phi + c\omega_f \operatorname{sen}\phi\right]x_m = P_m \therefore \frac{x_m}{P_m/k} = \frac{x_m}{\delta_m} = \frac{1}{\sqrt{\left[1-(\omega_f/\omega_n)^2\right]^2 + \left(2\zeta\omega_f/\omega_n\right)^2}}$$

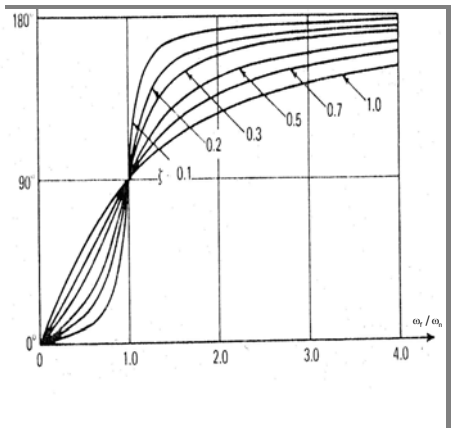
Função de Resposta em Freqüência do Sistema:

$$H(\omega_f) = \frac{1}{\sqrt{\left[1-(\omega_f/\omega_n)^2\right]^2 + \left(2\zeta\omega_f/\omega_n\right)^2}}$$

$$\phi(\omega_f) = \operatorname{tg}^{-1}\frac{2\xi\omega_f/\omega_n}{1-(\omega_f/\omega_n)^2}$$

$$\zeta = \frac{c}{c_c}$$





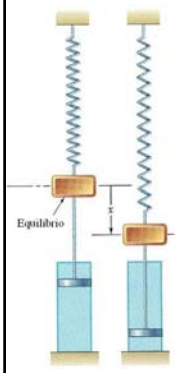
$$\frac{x_m}{P_m/k}=\frac{x_m}{\delta_m}=\frac{1}{\sqrt{\left[1-(\omega_f/\omega_n)^2\right]^2+\left(2\zeta\omega_f/\omega_n\right)^2}}$$

fator de magnificação

$$\phi=\mathrm{tg}^{-1}\frac{2\xi\omega_f/\omega_n}{1-(\omega_f/\omega_n)^2}$$

diferença de fase entre o carregamento externo e a resposta do sistema

Vibração Forçada Amortecida



$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=P_m e^{i\omega_f t}\Rightarrow x(t)=X_m e^{i\omega_f t}$$

$$(-\omega_f^2+i2\zeta\omega_n\omega_f+\omega_n^2)X_m e^{i\omega_f t}=\frac{P_m}{m}e^{i\omega_f t}=\frac{k}{m}\delta_m e^{i\omega_f t}=\omega_n^2\delta_m e^{i\omega_f t}$$

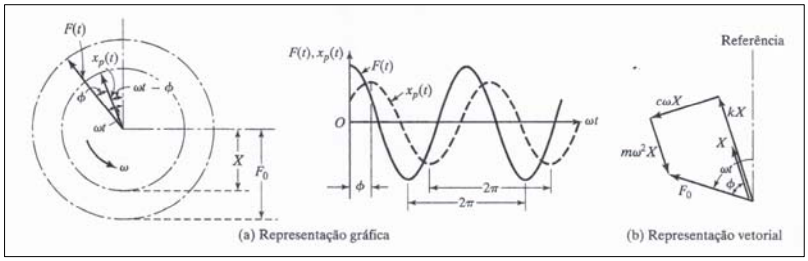
$$X_m=\frac{\omega_n^2\delta_m}{\omega_n^2-\omega_f^2+i2\zeta\omega_n\omega_f}=\frac{\delta_m}{1-(\omega_f/\omega_n)^2+i2\zeta\omega_f/\omega_n}$$

$$\frac{X_m}{\delta_m}=\frac{1}{1-(\omega_f/\omega_n)^2+i2\zeta\omega_f/\omega_n}\therefore\left|\frac{X_m}{\delta_m}\right|=\frac{1}{\sqrt{\left[1-(\omega_f/\omega_n)^2\right]^2+\left(2\zeta\omega_f/\omega_n\right)^2}}$$

$$\mathrm{tg}\phi=\frac{2\zeta\omega_f/\omega_n}{1-(\omega_f/\omega_n)^2}$$

Vibração Forçada Amortecida

Representação Gráfica e Vetorial



Vibração Forçada Amortecida

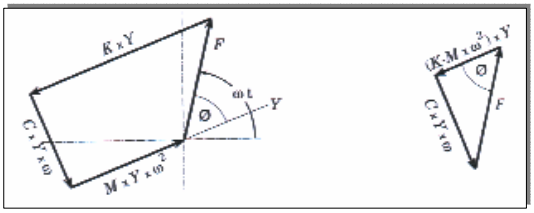
Relações obtidas da representação vetorial

$$(m \times A) + (c \times V) + (k \times D) = F \times \text{sen}(\omega t)$$

$$D = Y \times \text{sen}(\omega t - \phi)$$

$$V = Y \times \omega \times \text{sen}\left(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$A = Y \times \omega^2 \times \text{sen}(\omega t - \phi + \pi)$$



Vibração Forçada Amortecida

$$F^2 = \left[\left(k - m\times\omega^2\right)\times Y\right]^2 + \left[c\times Y\times\omega\right]^2$$

$$F = Y\times\sqrt{\left(k - m\times\omega^2\right)^2 + \left[c\times\omega\right]^2}$$

$$Y = \frac{F}{\sqrt{\left(k - m\times\omega^2\right)^2 + \left[c\times\omega\right]^2}} \qquad tg\phi = \frac{c\times\omega}{k - m\times\omega^2}$$

$\div k$ $\qquad$ $\div k$

$$Y = \frac{F/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{m\times\omega^2}{k}\right)^2 + \left[\frac{c\times\omega}{k}\right]^2}} \qquad tg\phi = \frac{c\times\omega/k}{1 - \frac{m\times\omega^2}{k}}$$

Vibração Forçada Amortecida

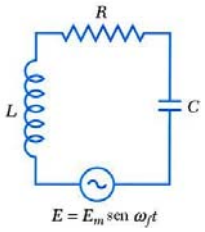
$$Y = \frac{F/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{M\times\omega^2}{k}\right)^2 + \left[\frac{C\times\omega}{k}\right]^2}} \qquad tg\phi = \frac{C\times\omega/k}{1 - \frac{M\times\omega^2}{k}}$$

$$Y = \frac{Y_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left[2\times\zeta\times\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} \qquad tg\phi = \frac{2\times\zeta\times\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$$\frac{\omega}{\omega_n} = \Omega$$

$$\frac{Y}{Y_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \Omega^2\right)^2 + \left[2\times\zeta\times\Omega\right]^2}} \qquad tg\phi = \frac{2\times\zeta\times\Omega}{1 - \Omega^2}$$

Analogia Elétrica



- Considere um circuito elétrico consistindo de um indutor, resistor e capacitor com uma fonte de tensão alternada

$$E_m \operatorname{sen}\omega_f t - L\frac{di}{dt} - Ri - \frac{q}{C} = 0$$

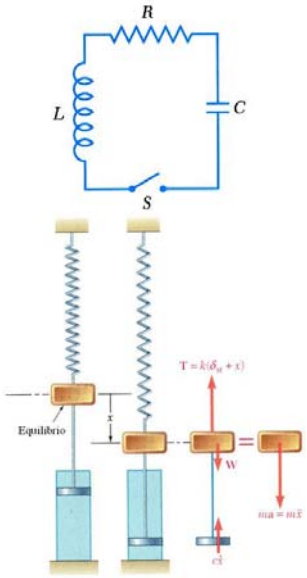
$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = E_m \operatorname{sen}\omega_f t$$

- Oscilações do sistema elétrico são análogas a vibrações forçadas amortecidas de um sistema mecânico.

Características de um Sistema Mecânico e de sua Analogia Elétrica

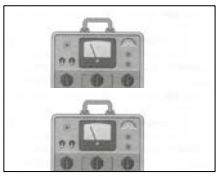
Sistema mecânico		Circuito elétrico	
m	Massa	L	Indutância
c	Coeficiente de amortecimento viscoso	R	Resistência
k	Constante da mola	$1/C$	Recíproco da capacitância
x	Deslocamento	q	Carga
v	Velocidade	i	Corrente
P	Força aplicada	E	Voltagem aplicada

Analogia Elétrica

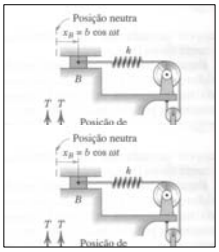


- A analogia entre sistemas elétricos e mecânicos aplica-se também ao transiente assim como a oscilações de estado estacionário.
- Com uma carga $q = q_0$ no capacitor, fechar o interruptor é análogo a liberar a massa do sistema mecânico sem nenhuma velocidade inicial em $x = x_0$.
- Se o circuito incluir uma bateria com tensão constante E, fechar o interruptor é análogo a aplicar subitamente uma força de valor constante P à massa do sistema mecânico.

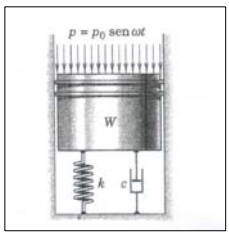
Ex.5.2: Um instrumento de 50 kg é apoiado por quatro molas, cada uma com rigidez de 7500 N/m. Se a base do instrumento está sujeita ao movimento harmônico $x_B(t)=0{,}002\cos 50t$ m, determine a amplitude do movimento do instrumento no regime permanente, considerando o amortecimento desprezível.

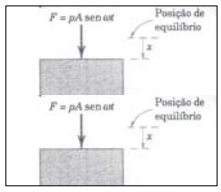


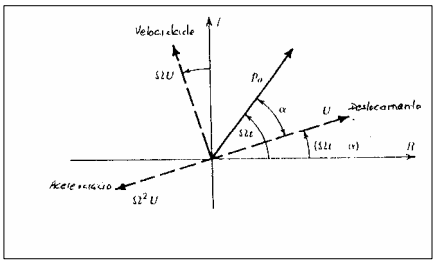
Ex.5.3: Ao ponto de fixação B da mola é imposto um movimento horizontal $x_B(t)=b\cos\omega_f t$. Determinar a freqüência de excitação crítica ω_c para a qual a oscilação da massa m tende a ficar excessivamente alta. Desprezar o atrito e a massa das roldanas, considerando que as duas molas possuem a mesma rigidez k.

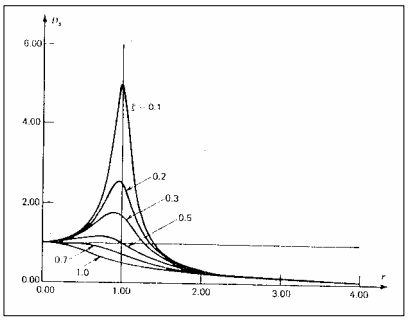


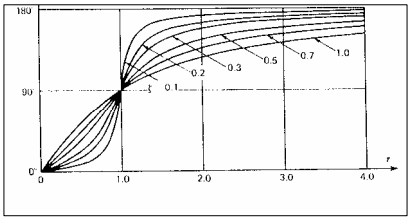
Ex.5.4: O pistão de 45 kg da figura é suportado por uma mola de rigidez k=35kN/m. Um amortecedor com coeficiente de amortecimento c=1250 N.s/m atua em paralelo com a mola. Uma pressão flutuante p=4000sen30t Pa atua sobre o pistão, cuja área superior é de $50x10^{-3}$ m^2. Determine o deslocamento do pistão em regime permanente em função do tempo e a força máxima transmitida à base.

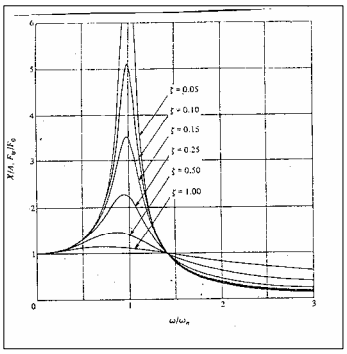


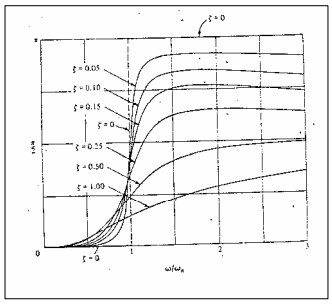









ζ = 0.05
ζ = 0.10
ζ = 0.15
ζ = 0.25
ζ = 0.50
ζ = 1.00
0
1
2
3
4
5
6
ω/ω_n


ζ = 0
ζ = 0.05
ζ = 0.10
ζ = 0.15
ζ = 0.25
ζ = 0.50
ζ = 1.00
0
1
2
3
ω/ω_n