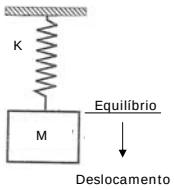
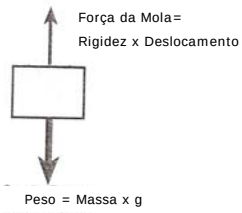


Cap. III– Sistemas de 1 Grau de Liberdade
Vibração Livre sem Amortecimento

Sistemas de 1 Grau de Liberdade
Vibração Livre sem Amortecimento
(tratamento simplificado)







$$(\text{massa} \times \text{aceleração}) = -(\text{rigidez} \times \text{deslocamento})$$

$$(\text{massa} \times \text{aceleração}) + (\text{rigidez} \times \text{deslocamento}) = 0$$

$$(\text{massa} \times \text{aceleração}) + (\text{rigidez} \times \text{deslocamento}) = 0$$

$$(m \times A) + (k \times D) = 0 \Rightarrow A + \frac{k}{m} D = 0$$

considerando: $\text{Deslocamento} = D(t) = D_0 \times e^{i\omega t}$

tem-se: $-D_0 \times \omega^2 \times e^{i\omega t} + \frac{k}{m} \times D_0 \times e^{i\omega t} = 0 \Rightarrow D_0 \times e^{i\omega t} \times \left(-\omega^2 + \frac{k}{m}\right) = 0$

$\left(-\omega^2 + \frac{k}{m}\right) = 0$ $\quad \omega = \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg/\delta_{est}}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{est}}} \Rightarrow f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{est}}}$

Empregando ao pêndulo o conceito de freqüência natural :

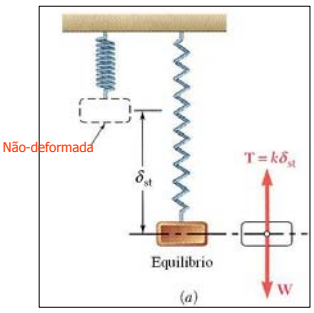
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{m \times g}{L} \times \frac{1}{m}} = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

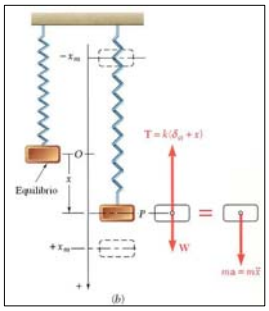
$$\omega_n = \frac{2\pi}{\text{período}} = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\text{período} = 2\pi \times \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Vibração Livre sem Amortecimento
(tratamento mais completo)

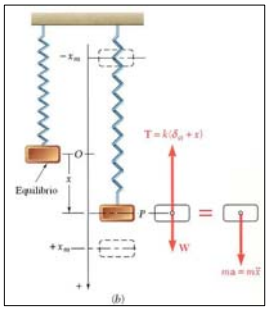
- Se uma partícula for deslocada de uma distância x_m a partir de sua posição de equilíbrio e liberada, terá *movimento harmônico simples*:





$$ma = F = W - k\left(\delta_{st} + x\right) = -kx$$
$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Vibração Livre sem Amortecimento



$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t)$$

Funções harmônicas (seno e coseno) atendem como solução desta equação diferencial (homogênea, linear e de segunda ordem), sendo para este caso:

$$\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \qquad \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Vibração Livre sem Amortecimento

A solução geral é a soma de *duas soluções particulares*:

$$x = C_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$
$$= C_1 \operatorname{sen}\left(\omega_n t\right) + C_2 \cos\left(\omega_n t\right)$$

Sendo x uma função periódica e ω_n a freqüência natural angular do movimento.

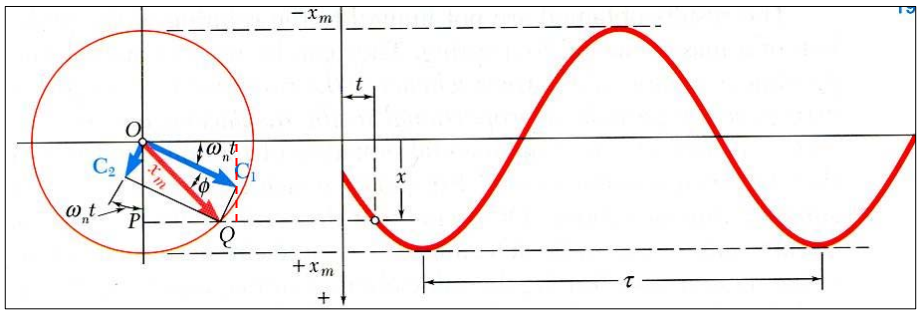
C_1 e C_2 dependem das condições iniciais (de velocidade e deslocamento) impostas ao sistema:

$$x = C_1 \operatorname{sen}\left(\omega_n t\right) + C_2 \cos\left(\omega_n t\right) \qquad v = \dot{x} = C_1 \omega_n \cos\left(\omega_n t\right) - C_2 \omega_n \operatorname{sen}\left(\omega_n t\right)$$

$$C_1 = v_0/\omega_n \qquad C_2 = x_0$$

velocidade e deslocamento para t=0

Vibração Livre sem Amortecimento
Interpretação Gráfica



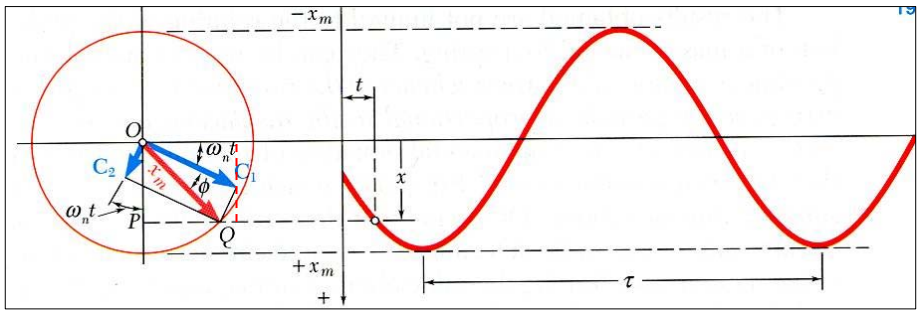
- O deslocamento é equivalente à projeção vertical da soma de dois vetores $C_1 + C_2$ que giram com velocidade angular ω_n, constante, onde:

$$x = C_1 \operatorname{sen}\left(\omega_n t\right) + C_2 \cos\left(\omega_n t\right)$$

$$x = x_m \operatorname{sen}\left(\omega_n t + \phi\right)$$

$$C_1 = \frac{v_0}{\omega_n}$$
$$C_2 = x_0$$

Vibração Livre sem Amortecimento



$$x = x_m \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi)$$

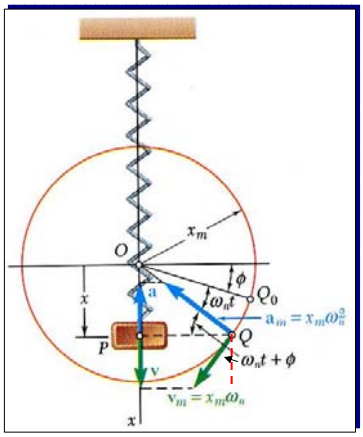
$$x_m = \sqrt{(v_0/\omega_n)^2 + x_0^2} = \text{amplitude}$$

$$\phi = \text{tg}^{-1}(x_0\omega_n/v_0) = \text{ângulo de fase}$$

$$x(t) = \left(\sqrt{(v_0/\omega_n)^2 + x_0^2}\right)\operatorname{sen}\left[\omega_n t + \text{tg}^{-1}(x_0\omega_n/v_0)\right]$$

Vibração Livre sem Amortecimento

- As curvas velocidade-tempo e aceleração-tempo podem ser representadas por curvas senoidais de mesmo período que a curva do deslocamento-tempo, mas com diferentes ângulos de fase.



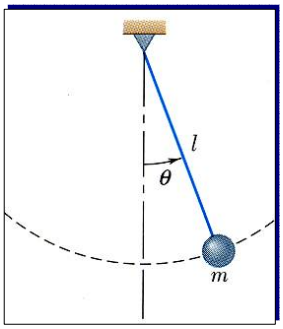
$$x = x_m \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi)$$

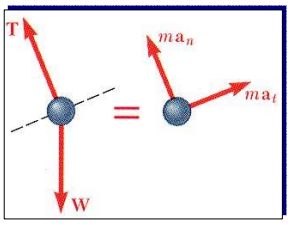
$$\begin{aligned} v &= \dot{x} \\ &= x_m\omega_n \cos(\omega_n t + \phi) \\ &= x_m\omega_n \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi + \pi/2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= \ddot{x} \\ &= -x_m\omega_n^2 \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi) \\ &= x_m\omega_n^2 \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi + \pi) \end{aligned}$$

Vibração Livre sem Amortecimento

Pêndulo Simples





- Os resultados obtidos para o sistema massa-mola podem ser aplicados sempre que a força resultante em uma partícula for proporcional ao deslocamento e direcionada para a posição de equilíbrio.
- Considere componentes tangenciais de aceleração e força para um pêndulo simples,

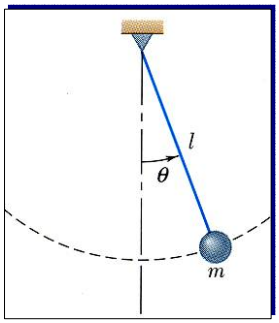
$$\sum F_t = ma_t:$$

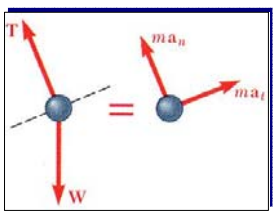
$$-W\operatorname{sen}\theta = ml\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0$$

Vibração Livre sem Amortecimento

Pêndulo Simples





$$\sum F_t = ma_t:$$

$$-W\operatorname{sen}\theta = ml\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0$$

Para ângulos pequenos:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$\theta = \theta_m \operatorname{sen}\left(\omega_n t + \phi\right)$$

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Pêndulo Simples (Solução Exata)

Uma solução exata para $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0$

leva a $\tau_n = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\theta_m/2)\operatorname{sen}^2\phi}}$

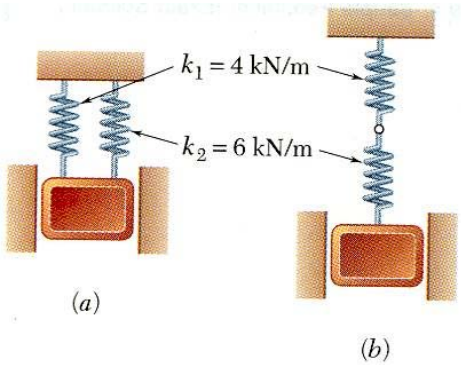
que requer solução numérica.

$$\tau_n = \frac{2K}{\pi}\left(2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right)$$

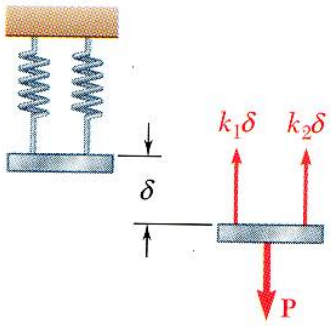
Tabela 19.1. Fator de correção para o período de um Pêndulo Simples

θ_m	0°	10°	20°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
K	1,571	1,574	1,583	1,598	1,686	1,854	2,157	2,768	∞
$2K/\pi$	1,000	1,002	1,008	1,017	1,073	1,180	1,373	1,762	∞

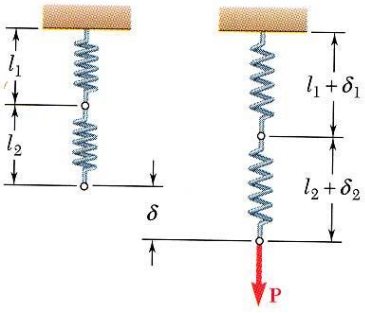
Ex.1: Um bloco de 50 kg se movimenta entre as guias verticais como mostrado. O bloco é puxado 40mm para baixo de sua posição de equilíbrio e liberado.
Para cada arranjo de mola, determine *a)* o período da vibração, *b)* a velocidade máxima do bloco, e *c)* a aceleração máxima do bloco.



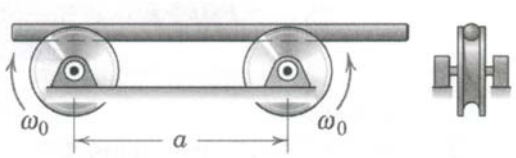
Ex. 1



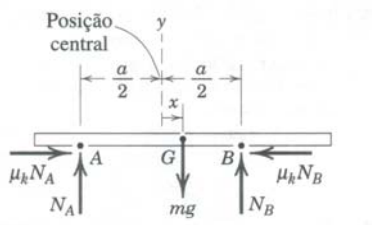
Ex. 1



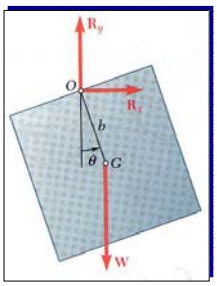
Ex.2: As duas polias fixas, girando em sentidos opostos são colocadas em movimento à mesma velocidade angular ω_0. Uma barra é colocada descentrada das polias, como mostrado. Determinar a frequência natural do movimento resultante da barra. O coeficiente de atrito cinético entre as superfícies em contato é μ_c.

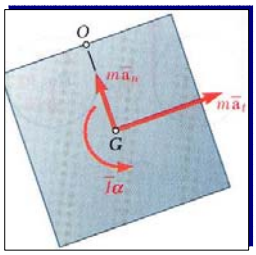


Ex. 2



Vibração Livre de Corpos Rígidos



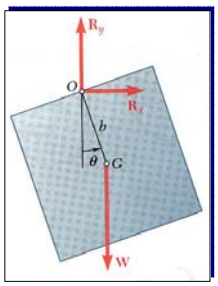


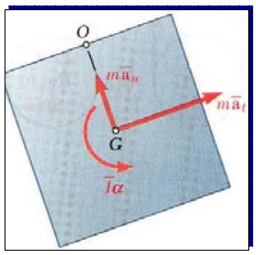
- Se uma equação de movimento tiver a forma $\ddot{x}+\omega_n^2 x=0 \quad \text{ou} \quad \ddot{\theta}+\omega_n^2\theta=0$

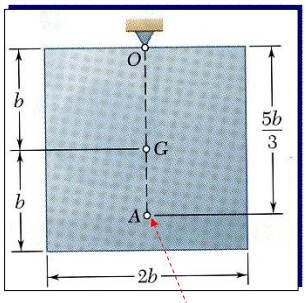
  o movimento correspondente pode ser considerado como movimento harmônico simples.

- O objetivo da análise é determinar ω_n.

Vibração Livre de Corpos Rígidos







- Considere as oscilações de uma placa quadrada:

$$-W\left(b\,\mathrm{sen}\,\theta\right)=\left(mb^2\ddot{\theta}\right)+\bar{I}\ddot{\theta}$$

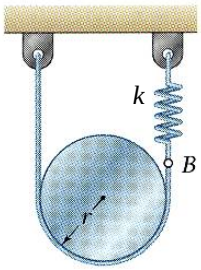
$$\text{mas } \bar{I}=\tfrac{1}{12}m\left[(2b)^2+(2b)^2\right]=\tfrac{2}{3}mb^2,\quad W=mg$$

$$\ddot{\theta}+\frac{3}{5}\frac{g}{b}\,\mathrm{sen}\,\theta\cong\ddot{\theta}+\frac{3}{5}\frac{g}{b}\theta=0$$

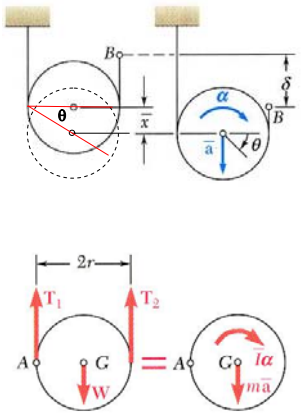
$$\text{então } \omega_n=\sqrt{\frac{3g}{5b}},\quad \tau_n=\frac{2\pi}{\omega_n}=2\pi\sqrt{\frac{5b}{3g}}$$

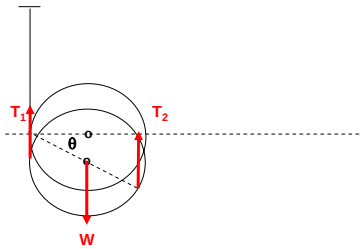
- Para um pêndulo equivalente simples: $l=5b/3$

Ex.3: Um cilindro de peso W é suspenso como mostrado. Determine o período e a freqüência natural das vibrações do cilindro.



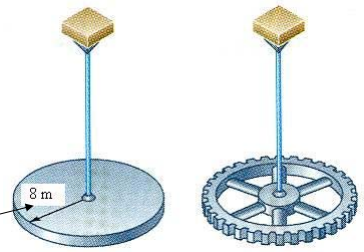
Ex. 3





Ex. 4: O disco e a engrenagem submetem-se à vibração torsional com os períodos mostrados. Suponha que o momento exercido pelo fio é proporcional ao ângulo de torção.
Determine *a)* a constante da mola de torção do fio, *b)* o momento de inércia centroidal da engrenagem, e *c)* a velocidade angular máxima da engrenagem se girada 90º e liberada.

Correção:
W=90N
r=20cm

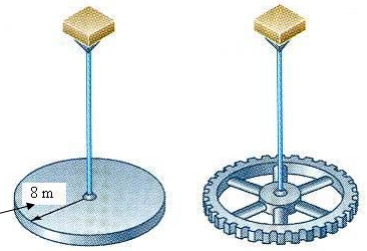


~~$W = 20\ \text{kg}$~~ $\tau_n = 1{,}93\ \text{s}$

$\tau_n = 1{,}13\ \text{s}$

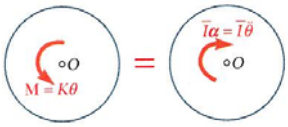
Ex. 4

Correção:
W=90N
r=20cm

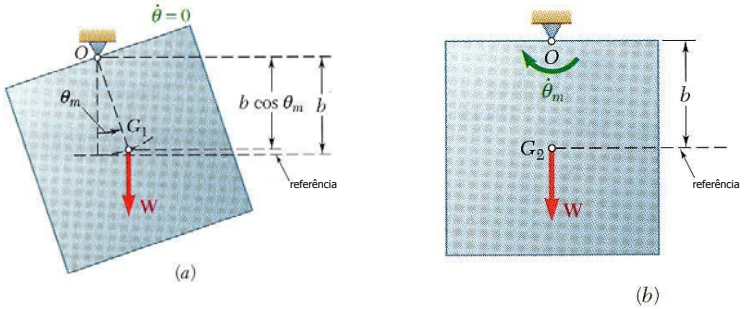


~~$W = 20\ \text{kg}$~~ $\tau_n = 1{,}93\ \text{s}$

$\tau_n = 1{,}13\ \text{s}$



Princípio de Conservação da Energia



- A força resultante sobre uma determinada massa, em movimento harmônico simples, é conservativa, ou seja, a energia total é conservada:

$$T + V = \text{constante}$$

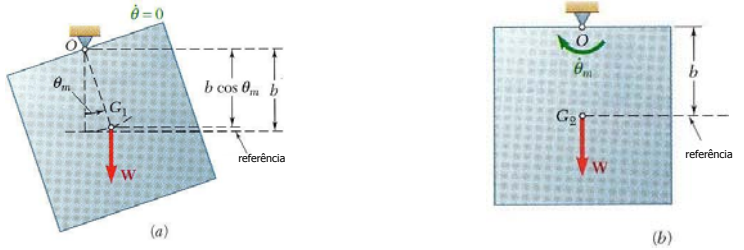
$$\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \text{constante} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d(T+V)}{dt} = 0$$

$$\frac{1}{2}2m\ddot{x}\dot{x} + \frac{1}{2}2k\dot{x}x = 0$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Princípio de Conservação da Energia



- Considere o movimento harmônico simples da placa quadrada:

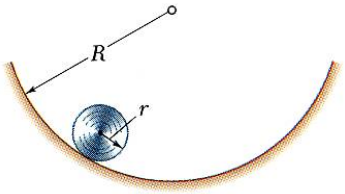
$$V_1 = Wb\left(1-\cos\theta\right) = W_m b\left[2\text{sen}^2\left(\theta_m/2\right)\right]$$
$$\cong \tfrac{1}{2}Wb\theta_m^2$$
$$T_1 = 0$$

$$V_2 = 0$$
$$T_2 = \tfrac{1}{2}I_o\dot{\theta}_m^2$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(\bar{I} + mb^2\right)\dot{\theta}_m^2 = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{3}mb^2 + mb^2\right)\dot{\theta}_m^2$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{5}{3}mb^2\right)\dot{\theta}_m^2 = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{5}{3}mb^2\right)\theta_m^2\omega_n^2$$

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$
$$0 + \tfrac{1}{2}Wb\theta_m^2 = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{5}{3}mb^2\right)\theta_m^2\omega_n^2 + 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{3g/5b}$$

Ex. 5: Determine o período de pequenas oscilações de um cilindro que rola sem deslizar no interior de uma superfície curva.



Ex. 5

