

7. Análise e Projeto de Vigas em Flexão

Conteúdo

Introdução

Diagramas de Esforço Cortante e de Momento Fletor

Problema Exemplo 5.1

Problema Exemplo 5.2

Relações entre Carga, Cortante e Momento Fletor

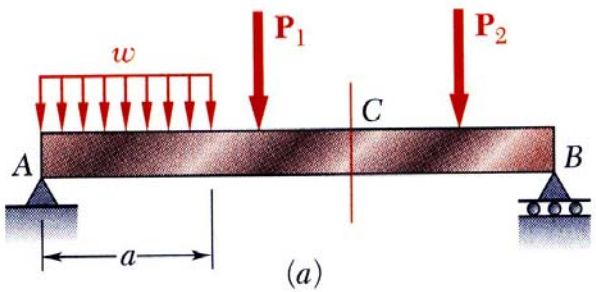
Problema Exemplo 5.3

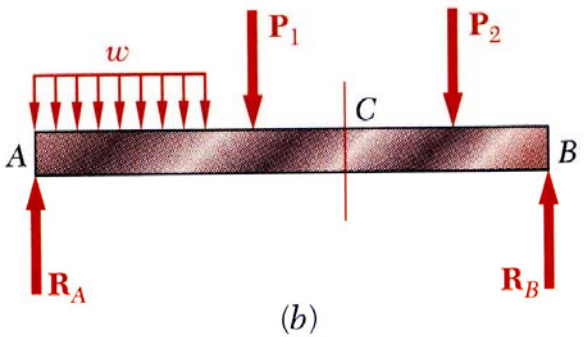
Problema Exemplo 5.5

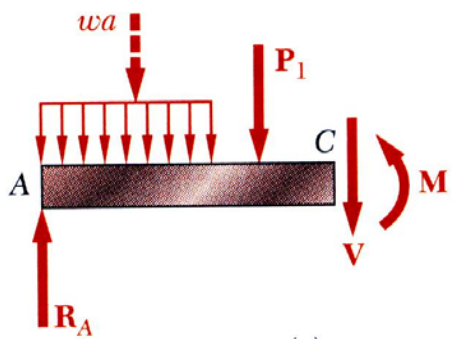
Projeto de Vigas Prismáticas para Flexão

Problema Exemplo 5.8

Introdução







- Objetivo – Análise e projeto de vigas
- *Vigas* - membros estruturais suportando cargas transversais ao longo do comprimento.
- Carregamentos transversais de vigas são classificados como cargas *concentradas* ou cargas *distribuídas*.
- Cargas aplicadas resultam em forças internas consistindo de uma força de cortante (a partir da distribuição da tensão de cisalhamento) e um momento fletor (a partir da distribuição da tensão nomal).
- A tensão normal é freqüentemente o critério de projeto crítico.

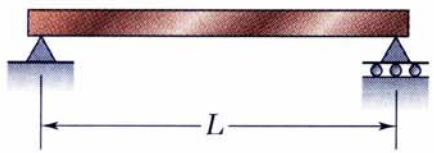
$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \qquad \sigma_m = \frac{|M|c}{I} = \frac{|M|}{S}$$

Requer a determinação da localização e amplitude do maior momento fletor.

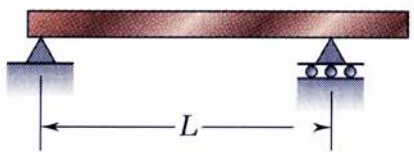
Introdução

Classificação de Apoios em Vigas:

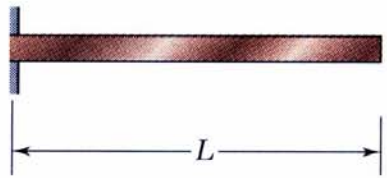
Vigas Estaticamente Determinadas



(*a*) Viga simplesmente apoiada

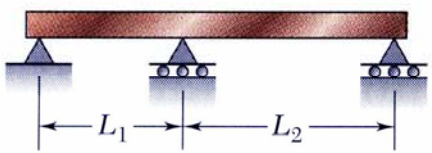


(*b*) Viga "overhanging"

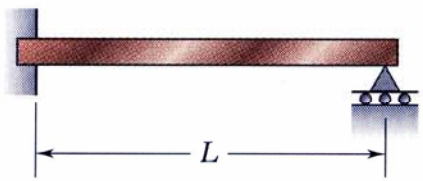


(*c*) Viga cantilever

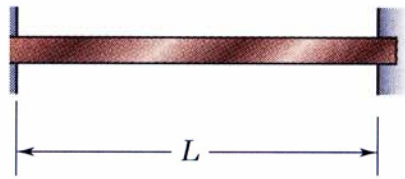
Vigas Estaticamente Indeterminadas



(*d*) Viga contínua

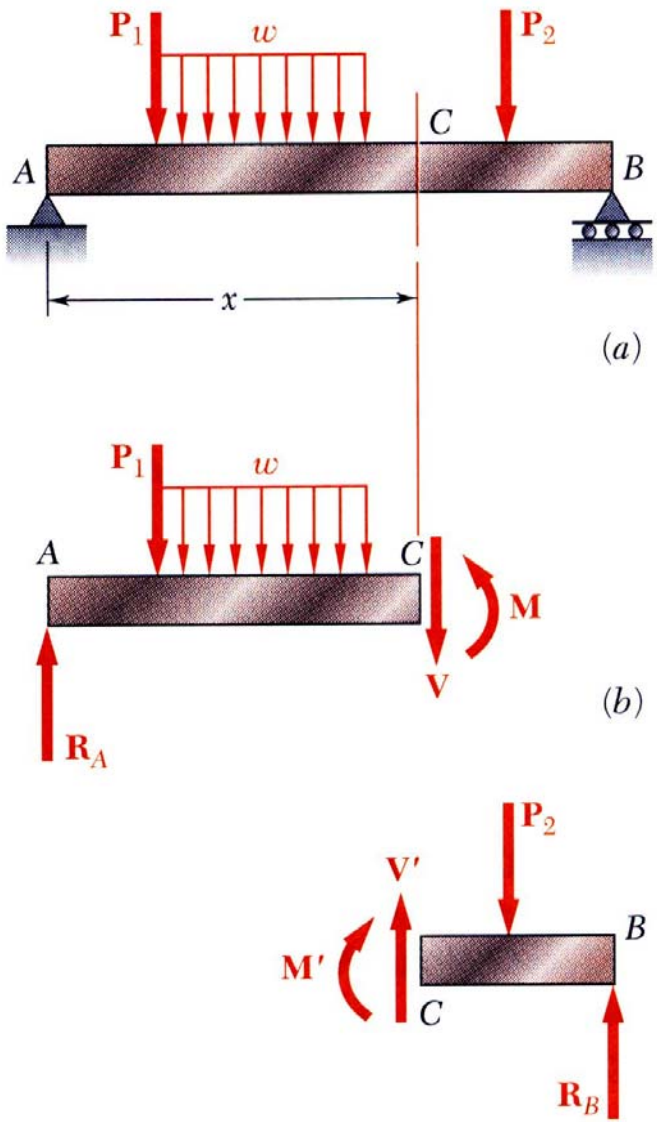


(*e*) Viga fixa em uma extremidade e simplesmente apoiada na outra extremidade

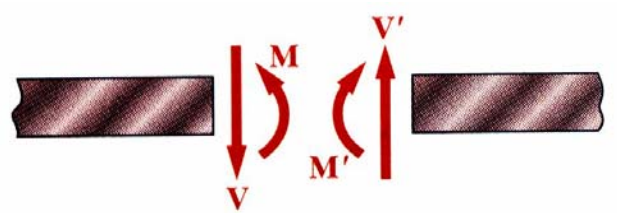


(*f*) Viga fixa

Diagramas de Esforço Cortante e de Momento Fletor



- A determinação das tensões normais e de cisalhamento máximas requer a identificação dos valores máximos da força cortante e do momento fletor.
- A força cortante e o momento fletor num ponto são determinados “cortando” uma seção da viga e aplicando uma análise de equilíbrio nas porções da mesma em ambos os lados da seção.
- Convenção de sinais para forças cortantes *V* e *V’* e momentos fletores *M* e *M’* :



(*a*) Forças internas
(cisalhamento positivo e momento fletor positivo)

EXEMPLO 7.1

Desenhar os diagramas de força cortante e do momento fletor da viga simplesmente apoiada que tem uma força concentrada aplicada no seu ponto médio (Fig. 7.8).

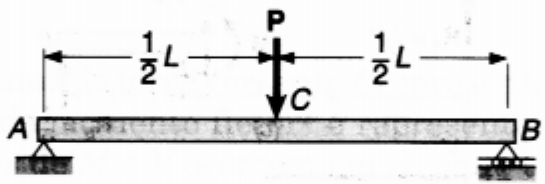


Fig. ex.7.8

Inicialmente, determinamos as reações de apoio, pelo diagrama de corpo livre de toda a viga (Fig. 7.9*a*); a intensidade de cada reação é igual a $P/2$.

Em seguida, cortamos a viga no ponto C, entre A e D, desenhando o diagrama de corpo livre de AC e CB (Fig. 7.9*b*). *Adotando que a força cortante e o momento fletor são positivos*, direcionamos os esforços internos $\mathbf{V}$ e $\mathbf{V}'$ e $\mathbf{M}$ e $\mathbf{M}'$ como indica a Fig. 7.7*b*. O estudo do equilíbrio do corpo livre AC nos leva a escrever que a soma de

componentes verticais e a soma dos momentos em relação a C das forças que agem no corpo livre são nulas. Encontramos então $V = +P/2$ e $M = +Px/2$. Os dois valores, V e M são positivos; isso pode ser verificado se observarmos que a reação em A tende a cortar e flexionar a viga em C como indicam as Figs. 7.7*b* e *c*. Podemos então marcar os valores V e M entre A e D (Figs. 7.9*d* e *e*); a força cortante tem valor constante e igual a $V = P/2$, enquanto o momento fletor cresce linearmente do valor $M = 0$ para $x = 0$ até o valor $M = PL/4$ para $x = L/2$.

Cortamos agora a viga no ponto E entre D e B, considerando o corpo livre EB (Fig. 7.9*c*). Escrevemos então que a soma das componentes verticais e a soma dos momentos em relação a E das forças que agem no corpo livre são nulas. Encontramos os valores $V = -P/2$ e $M = P(L - x)/2$. Vemos que a força cortante é negativa e o momento fletor é positivo; isso pode ser verificado se observarmos que a reação de apoio em B tende a flexionar a viga em E como indica a Fig. 7.7*c*, mas tende a cortar a viga de maneira contrária à indicada pela Fig. 7.7*b*. Podemos então completar os diagramas de força cortante e momento fletor das Figs. 7.9*b* e *e*; a força cortante tem valor constante e igual a $V = -P/2$ entre D e B, enquanto o momento fletor decresce linearmente do valor $M = PL/4$ para $x = L/2$ até o valor $M = 0$ para $x = L$.

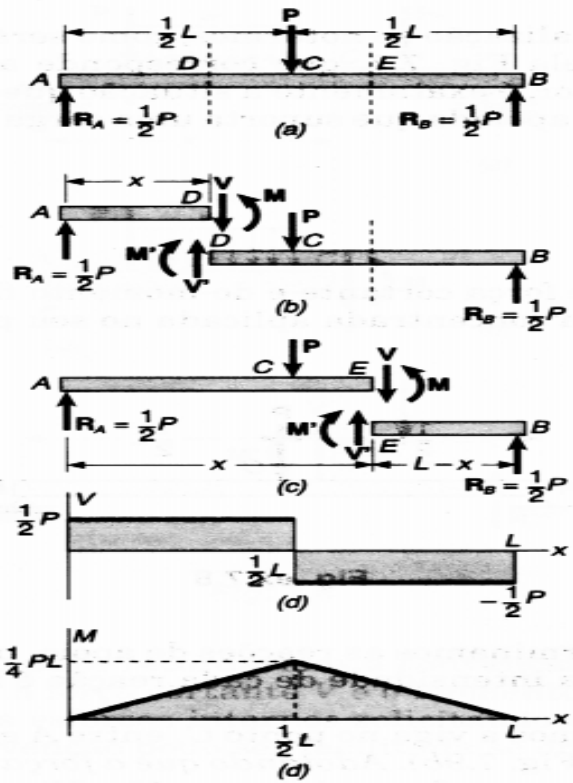
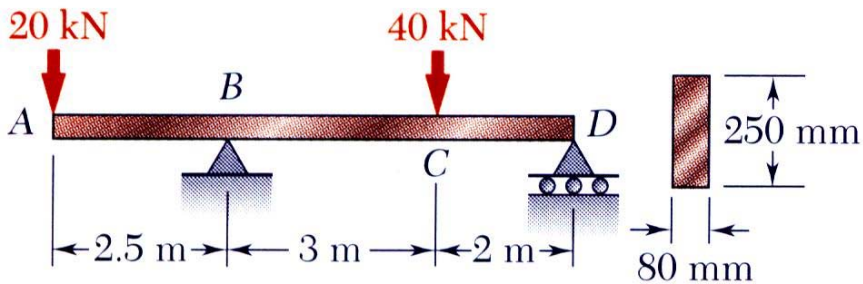


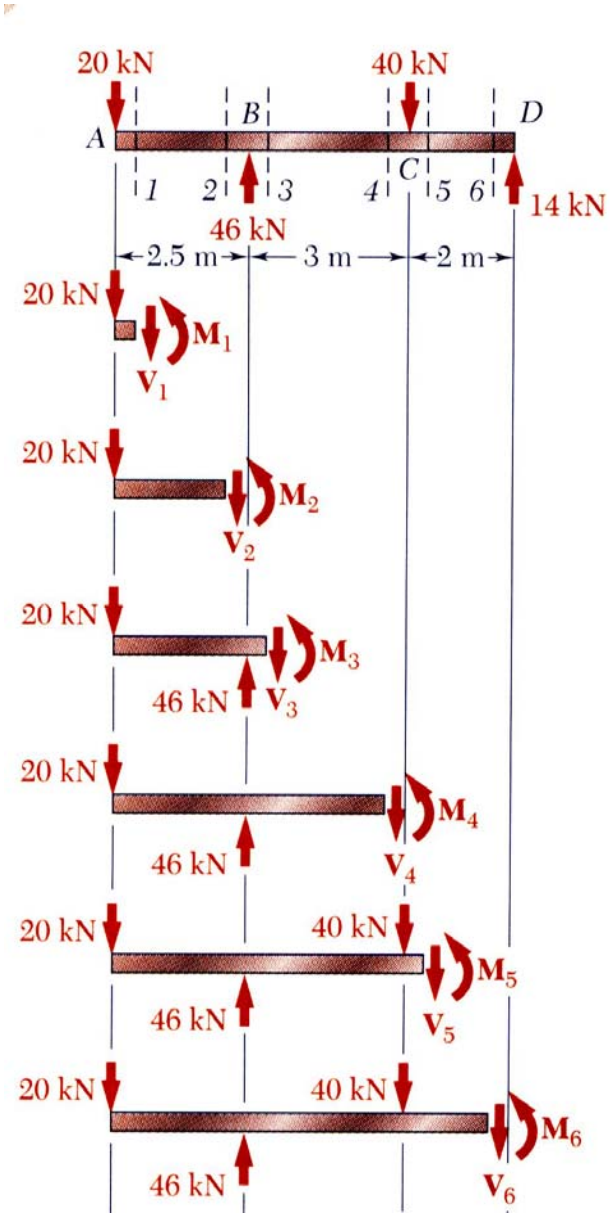
Fig. ex.7.9

Notamos no exemplo anterior que, para uma viga submetida apenas a cargas concentradas, a força cortante fica constante entre os pontos de aplicação de forças, enquanto o momento fletor tem variação linear entre esses pontos. Desse modo, para algumas situações, o desenho dos diagramas fica muito fácil, bastando calcular os valores de V e M em seções que ficam justamente à esquerda e à direita dos pontos de aplicação de cargas e reações (ver Prob. Resolvido 7.1).

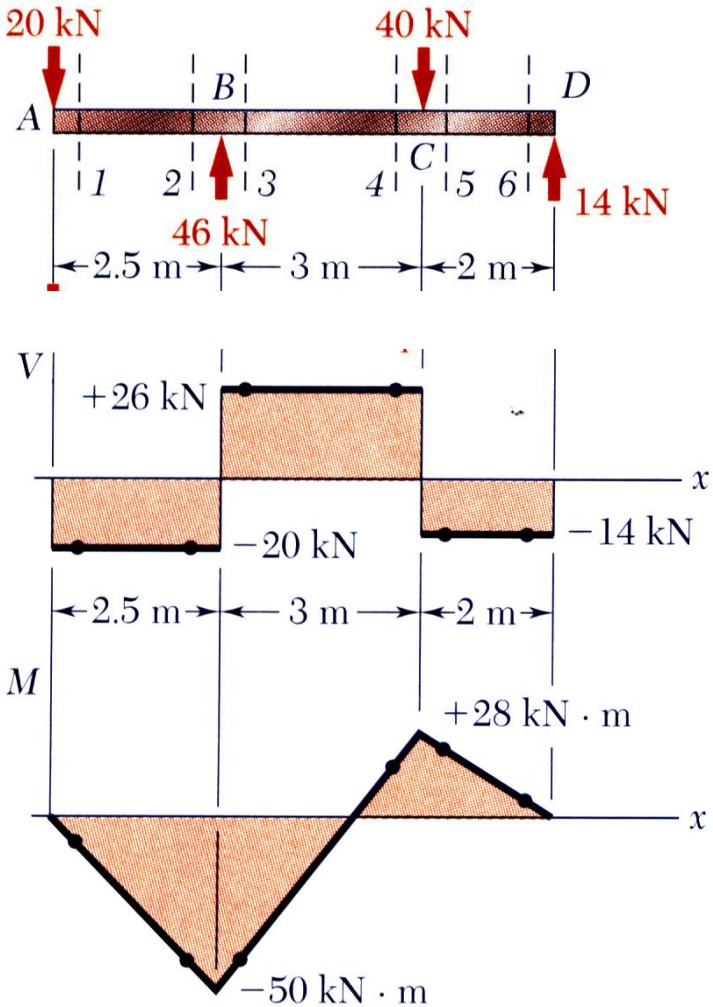
Ex. 7.1: Para a viga de madeira e o carregamento mostrados, desenhe os diagramas de esforço cortante e momento fletor, determinando a tensão normal máxima devido à flexão.



Ex. 7.1

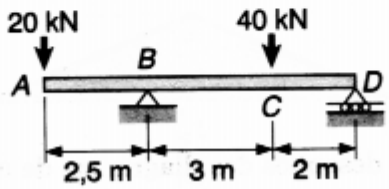

20 kN
40 kN
A
B
C
D
1
2
3
4
5
6
14 kN
46 kN
2.5 m
3 m
2 m
20 kN
M1
V1
20 kN
M2
V2
20 kN
M3
46 kN
V3
20 kN
M4
46 kN
V4
20 kN
40 kN
M5
46 kN
V5
20 kN
40 kN
M6
46 kN
V6

Ex. 7.1


20 kN
40 kN
A
B
C
D
1
2
3
4
5
6
46 kN
14 kN
2.5 m
3 m
2 m
V
+26 kN
−20 kN
−14 kN
x
M
+28 kN · m
−50 kN · m

PROBLEMA RESOLVIDO 7.1

Desenhar os diagramas de força cortante e momento fletor da viga com carregamento indicado.



Solução. Determinamos as reações considerando a viga toda como corpo livre, encontrando

$$\mathbf{R}_B = 46\ \text{kN} \uparrow \qquad \mathbf{R}_D = 14\ \text{kN} \uparrow$$

Inicialmente determinamos os esforços solicitantes internos exatamente à direita da força de 20 kN em A. Considerando como corpo livre a porção da viga à esquerda da seção 1 e adotando que V e M são positivos (de acordo com a convenção estabelecida), escrevemos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -20\ \text{kN} - V_1 = 0 \quad V_1 = -20\ \text{kN}$$
$$+) \Sigma M_1 = 0: \quad (20\ \text{kN})(0\ \text{m}) + M_1 = 0 \quad M_1 = 0$$

Em seguida consideramos como corpo livre a parte da viga à esquerda da Sec. 2, escrevendo

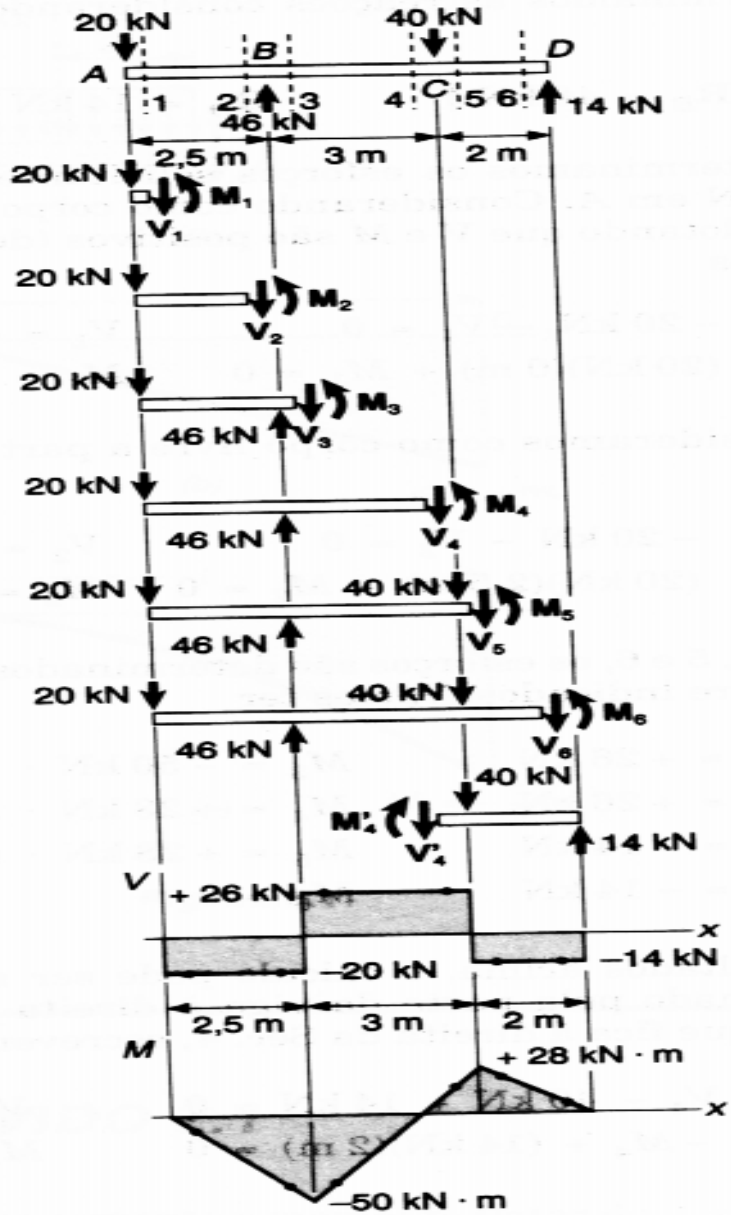
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -20\ \text{kN} - V_2 = 0 \quad V_2 = -20\ \text{kN}$$
$$+) \Sigma M_2 = 0: \quad (20\ \text{kN})(2{,}5\ \text{m}) + M_2 = 0 \quad M_2 = -50\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

Para as Secs. 3, 4, 5 e 6, os esforços são determinados da mesma maneira com os diagramas de corpo livre indicados. Vamos ter

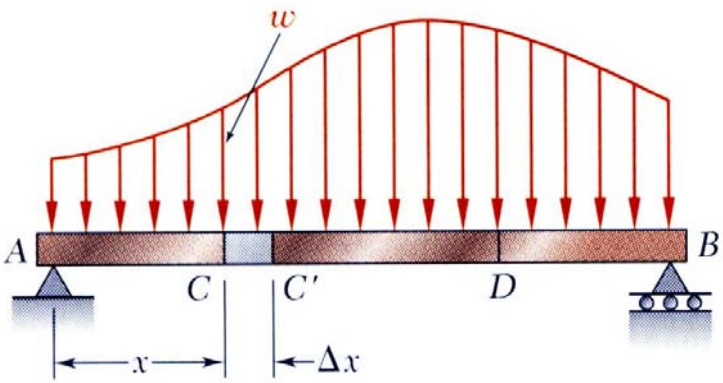
$$V_3 = +26\ \text{kN} \qquad M_3 = -50\ \text{kN} \cdot \text{m}$$
$$V_4 = +26\ \text{kN} \qquad M_4 = +28\ \text{kN} \cdot \text{m}$$
$$V_5 = -14\ \text{kN} \qquad M_5 = +28\ \text{kN} \cdot \text{m}$$
$$V_6 = -14\ \text{kN} \qquad M_6 = 0$$

Para alguns resultados acima, o cálculo pode ser simplificado se considerarmos o corpo livre formado pela parte da viga à direita da seção. Por exemplo, tomando a parte da viga que fica à direita da Sec. 4, escrevemos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad V_4 - 40\ \text{kN} + 14\ \text{kN} = 0 \quad V_4 = -26\ \text{kN}$$
$$+) \Sigma M_4 = 0: \quad -M_4 + (14\ \text{kN})(2\ \text{m}) = 0 \quad M_4 = +28\ \text{kN} \cdot \text{m}$$


20 kN
40 kN
A
B
C
D
1
2
3
4
5
6
46 kN
14 kN
2,5 m
3 m
2 m
M1
V1
M2
V2
M3
V3
M4
V4
M5
V5
M6
V6
M'4
V'4
V
+ 26 kN
–20 kN
–14 kN
x
M
+ 28 kN · m
–50 kN · m

Relações entre Carga, Cortante e Momento Fletor



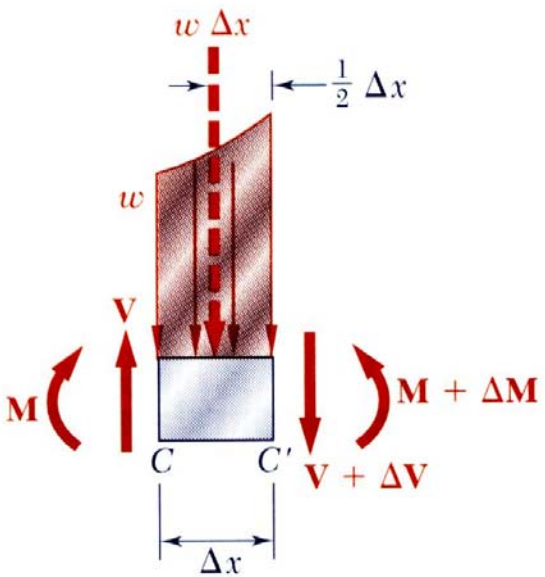
- Relação entre a carga e o cortante:

$$\sum F_y = 0: \quad V - (V + \Delta V) - w\,\Delta x = 0$$

$$\Delta V = -w\,\Delta x$$

$$\frac{dV}{dx} = -w$$

$$V_D - V_C = -\int_{x_C}^{x_D} w\,dx$$



- Relação entre o cortante e momento fletor:

$$\sum M_{C'} = 0: \quad (M + \Delta M) - M - V\,\Delta x + w\Delta x\frac{\Delta x}{2} = 0$$

$$\Delta M = V\,\Delta x - \tfrac{1}{2} w (\Delta x)^2$$

$$\frac{dM}{dx} = V$$

$$M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V\,dx$$

EXEMPLO 7.3

Desenhar o diagrama de força cortante e momento fletor para a viga simplesmente apoiada da Fig. 7.13, determinando depois o valor máximo do momento fletor.

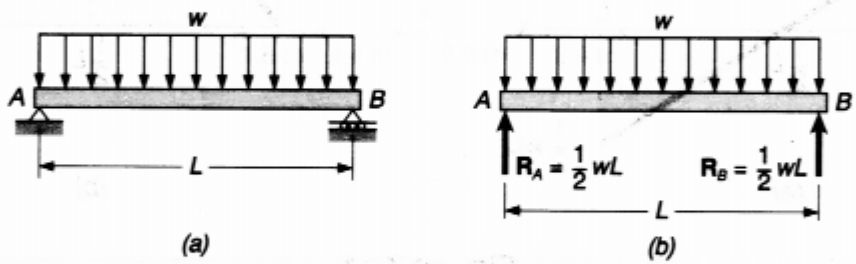


Fig. ex.7.13

Considerando toda a viga como diagrama de corpo livre, determinamos a intensidade das reações dos apoios (Fig. 7.13*b*).

$$R_A = R_B = \tfrac{1}{2} wL$$

Em seguida, desenhamos o diagrama de força cortante. Na seção da extremidade A da viga, a força cortante é igual à reação R_A, isto é, igual a $\frac{1}{2} wL$, como podemos verificar considerando como corpo livre uma pequena parte da viga. A Eq. 7.4 fornece o valor da força cortante V em qualquer ponto da viga a uma distância x do ponto A. Escrevemos então

$$V - V_A = -\int_0^x w \, dx = -wx$$

$$V = V_A - wx = \tfrac{1}{2} wL - wx = w\left(\tfrac{1}{2} L - x\right)$$

O diagrama de força cortante é uma reta inclinada que intercepta o eixo x no ponto $x = L/2$ (Fig. 7.14a). Considerando agora o momento fletor, vemos inicialmente que $M_A = 0$. Para determinarmos o valor de M do momento fletor a uma distância x do ponto A, usamos a Eq. 7.6. Vamos ter

$$M - M_A = \int_0^x V \, dx$$

$$M = \int_0^x w\left(\tfrac{1}{2} L - x\right) dx = \tfrac{1}{2} w(Lx - x^2)$$

O diagrama de momento fletor é uma parábola. O valor máximo do momento fletor ocorre em $x = L/2$, onde V (e portanto dM/dx) é zero. Levando o valor $x = L/2$ à equação acima, obtemos $M = wL^2/8$ (Fig. 7.14b).

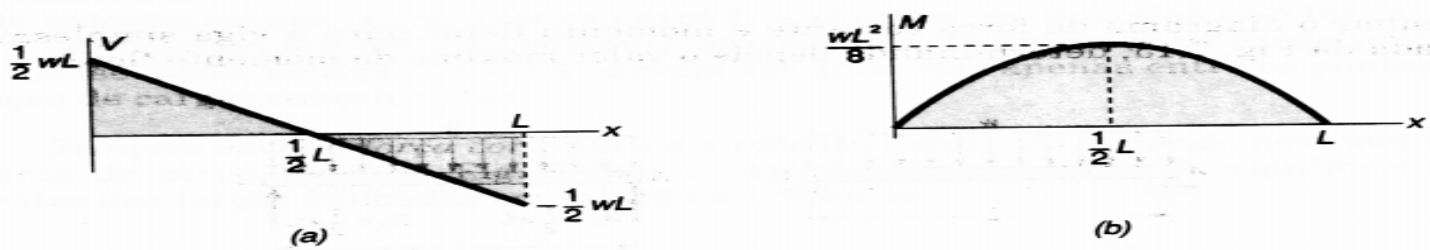


Fig. ex.7.14

Em muitos casos de engenharia, precisamos conhecer o valor do momento fletor em apenas alguns pontos. Tendo sido desenhado o diagrama de força cortante e após determinarmos o valor de M em uma das extremidades da viga, poderemos calcular o valor do momento fletor em qualquer ponto calculando a área delimitada

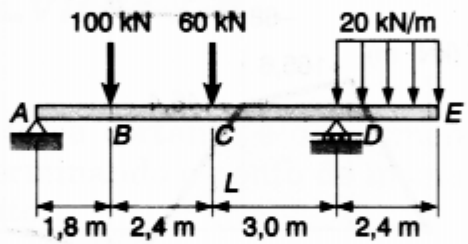
pelo gráfico da força cortante e usando a Equação 7.6. Por exemplo, na viga do Ex. 7.3, sendo $M_A = 0$, podemos obter o valor do momento fletor máximo da viga calculando a área do triângulo sombreado no diagrama de força cortante da Fig. 7.14*a*. Temos

$$M_{máx} = \frac{1}{2}\frac{L}{2}\frac{wL}{2} = \frac{wL^2}{8}$$

Neste exemplo, vemos que o diagrama de carga é uma reta horizontal, o diagrama de força cortante é uma reta inclinada e o diagrama de momento fletor é uma parábola. Se o diagrama de carga fosse uma reta inclinada (primeiro grau), o diagrama de força cortante seria uma parábola (segundo grau) e o diagrama de momento fletor seria uma parábola cúbica (terceiro grau). Os diagramas de força cortante e de momento fletor serão sempre, respectivamente um grau e dois graus acima do diagrama de carga. Tendo em mente essa propriedade, ficamos aptos a esboçar os diagramas de força cortante e momento fletor sem a necessidade de determinarmos as funções $V(x)$ e $M(x)$, bastando calcular alguns valores de M e V. Podemos conseguir esboços bem precisos se nos lembrarmos do fato de que, em qualquer ponto onde os diagramas sejam curvas contínuas, o declive da curva de força cortante é igual a $-w$ e o declive da curva do momento fletor é igual a V.

PROBLEMA RESOLVIDO 7.3

Desenhar os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga e carregamento indicados, determinando a localização e intensidade: (*a*) da força cortante máxima; (*b*) do momento fletor máximo; (*c*) do momento fletor mínimo.



Solução. Calculamos as reações dos apoios considerando a viga toda como um corpo livre.

$$R_D = 116\,\text{kN} \qquad R_A = 92\,\text{kN}$$

Vemos que em A e E o momento fletor é nulo; desse modo, em duas seções (marcadas por pequenas circunferências) já são conhecidos os momentos fletores para a construção do diagrama.

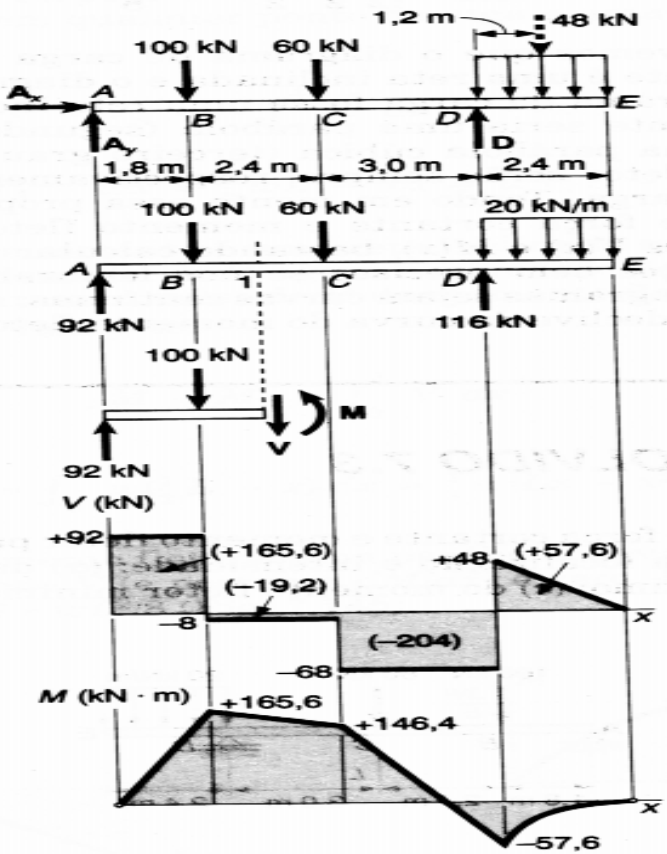


Diagrama de força cortante. Como $dV/dx = -w$, vemos que entre as cargas concentradas o declive do gráfico de força cortante é zero (e portanto a força cortante é constante). A força cortante em qualquer ponto pode ser obtida se dividirmos a viga em duas partes, considerando cada uma delas como um corpo livre. Usando por exemplo a parte da viga à esquerda da seção 1, obtemos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad +92 - 100 - V = 0$$
$$V = -8\ \text{kN}$$

Diagrama de momento fletor. Sabemos que a área sob o diagrama de força cortante entre dois pontos é igual à variação do momento fletor entre esses pontos. Calculamos então a área de cada parte do diagrama de força cortante, marcando seu valor, por conveniência, no próprio diagrama. Sendo $M_A = 0$, escrevemos

$$M_B - M_A = +165{,}6 \qquad M_B = +165{,}6\ \text{kN} \cdot \text{m}$$
$$M_C - M_B = -19{,}2 \qquad M_C = +146{,}4\ \text{kN} \cdot \text{m}$$
$$M_D - M_C = -20{,}4 \qquad M_D = -57{,}6\ \text{kN} \cdot \text{m}$$
$$M_E - M_D = +57{,}6 \qquad M_E = 0$$

O valor encontrado $M_E = 0$, que já era conhecido, serve como verificação dos resultados obtidos.

A força cortante é constante entre duas forças concentradas sucessivas, de modo que o declive dM/dx é igualmente constante. O diagrama de momento fletor pode ser desenhado unindo-se por linhas retas os pontos conhecidos. Dos diagramas de V e M temos

(*a*) $V_{\text{máx}} = 92\ \text{kN}$ entre A e B

(*b*) $M_{\text{máx}} = +165{,}6\ \text{kN} \cdot \text{m}$ no ponto B.