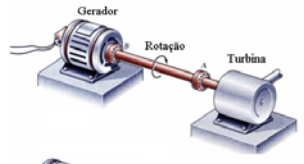


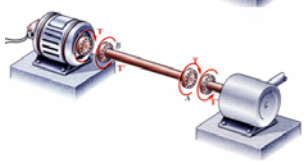
3. Torção

Conteúdo

Introdução
Cargas de Torção em Eixos Circulares
Torque Total Devido a Tensões Internas
Componentes Axiais de Cisalhamento
Deformações do Eixo
Deformação de Cisalhamento
Tensões na Faixa Elástica
Tensões Normais
Modos de Falha de Torção
Problema Exemplo 3.1
Ângulo de Torção na Faixa Elástica
Eixos Estaticamente Indeterminados
Problema Exemplo 3.4

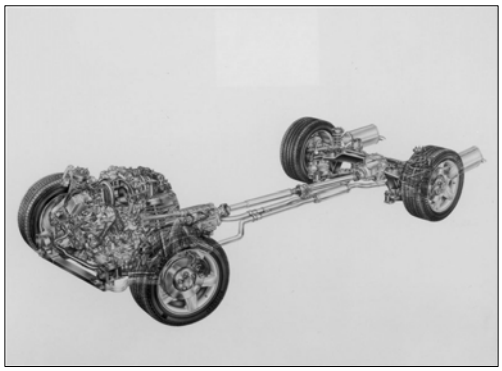
Cargas de Torção em Eixos Circulares



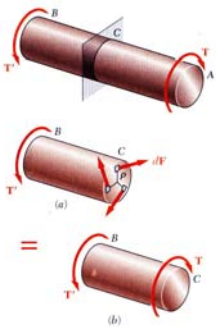


- Análise das tensões e deformações em eixos circulares sujeitos a momentos de torção ou *torques*.
- A turbina exerce torque T no eixo.
- O eixo transmite o torque para o gerador.
- O gerador reage com um torque igual e oposto T', que é transmitido à turbina.

Ex.: Sistema de Transmissão de Potência de um Veículo



Momento Torsor Devido a Tensões Internas

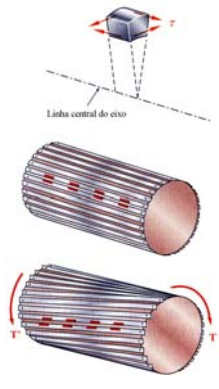


- O torque resultante interno, atuante nas seções do eixo, é dado por:

$$T = \int \rho \, dF = \int \rho (\tau \, dA)$$

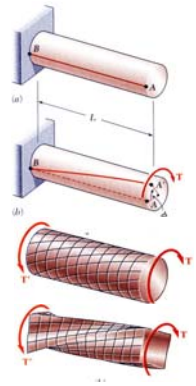
- Apesar do torque total, devido às tensões de cisalhamento, ser conhecido, a distribuição das tensões não é conhecida.
- A distribuição das tensões de cisalhamento é estaticamente indeterminada – o que implica na necessidade de se considerar as deformações decorrentes.
- Ao contrário da tensão normal devido às cargas axiais, a distribuição das tensões de cisalhamento, devidas às cargas de torção, não pode ser assumida como uniforme.

Componentes Axiais de Cisalhamento



- O torque aplicado ao eixo produz tensões de cisalhamento nas faces perpendiculares à seção.
- As condições de equilíbrio requerem a existência de tensões iguais nas faces dos dois planos que contêm a linha central do eixo.
- A existência dos componentes de cisalhamento axiais é demonstrada considerando um eixo composto de varetas axiais.
- As varetas deslizam umas em relação às outras, quando torques iguais e opostos são aplicados às extremidades do eixo.

Deformações do Eixo

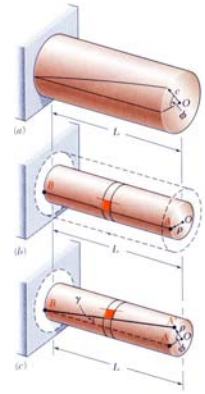


- O ângulo de torção do eixo é proporcional ao torque aplicado e ao comprimento do eixo:

$$\phi \propto T$$
$$\phi \propto L$$

- Quando sujeita à torção, toda seção transversal de um eixo circular permanece plana e não distorcida.
- As seções transversais para eixos circulares vazados e maciços permanecem planas e não distorcidas porque um eixo circular é axissimétrico.
- As seções transversais de eixos não-circulares (não-axissimétricos) distorcem quando sujeitas à torção.

Deformação de Cisalhamento



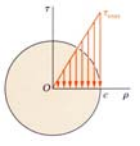
- Considere uma camada interior do eixo. Se uma carga de torção é aplicada, um elemento nesta camada se deforma como na figura.
- Como as extremidades do elemento permanecem paralelas, a deformação específica de cisalhamento é igual ao arco gerado na superfície do cilindro.
- Portanto:

$$s = \rho\phi \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{\rho\phi}{L}$$

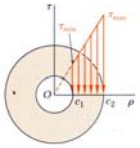
- Assim, a deformação específica de cisalhamento é proporcional ao ângulo de torção e ao raio.

$$\gamma_{max} = \frac{c\phi}{L} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{max}$$

Tensões na Faixa Elástica



$$J = \tfrac{1}{2}\pi c^4$$



$$J = \tfrac{1}{2}\pi\left(c_2^4 - c_1^4\right)$$

- Multiplicando a equação anterior pelo módulo de elasticidade de cisalhamento G:

$$G\gamma = \frac{\rho}{c}G\gamma_{max}$$

A partir da Lei de Hooke, $\tau = G\gamma$, então:

$$\tau = \frac{\rho}{c}\tau_{max}$$

Donde se conclue que a tensão de cisalhamento varia linearmente com a posição radial na seção.

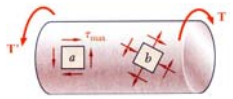
- Lembrando que a soma dos momentos de torção, a partir da distribuição de tensões internas, é igual ao torque resultante na seção:

$$T = \int \rho\tau\, dA = \frac{\tau_{max}}{c}\int \rho^2\, dA = \frac{\tau_{max}}{c}J$$

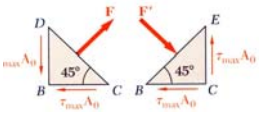
- O que resulta em:

$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J} \quad \text{e} \quad \tau = \frac{T\rho}{J}$$

Tensões Normais



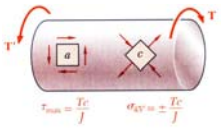
- Elementos com faces paralelas e perpendiculares ao eixo longitudinal estão sujeitos a tensões de cisalhamento somente. Tensões normais e de cisalhamento, ou uma combinação de ambas, podem ser encontradas para outras orientações.



- Considerando um elemento a 45º em relação ao eixo:

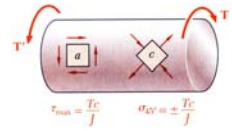
$$F = 2\left(\tau_{\max} A_0\right)\cos 45^\circ = \tau_{\max} A_0 \sqrt{2}$$

$$\sigma_{45^\circ} = \frac{F}{A} = \frac{\tau_{\max} A_0 \sqrt{2}}{A_0 \sqrt{2}} = \tau_{\max}$$



- O elemento *a* está em cisalhamento puro.
- O elemento *c* está sujeito a uma tensão de tração em duas faces e de compressão nas outras duas.
- Note que todas as tensões para os elementos *a* e *c* têm a mesma magnitude.

Fratura por Torção



- Materiais dúteis geralmente falham por cisalhamento, e materiais frágeis por tração.

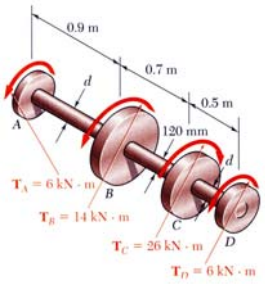


- Quando sujeita à torção, uma amostra dútil quebra ao longo de um plano de cisalhamento máximo, isto é, um plano perpendicular à linha central do eixo.

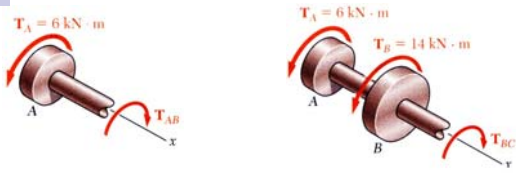


- Quando sujeita à torção, uma amostra frágil quebra ao longo de planos perpendiculares à direção na qual a tensão normal é máxima, isto é, ao longo das superfícies a 45º da linha central do eixo.

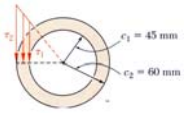
Ex. 3.1: O eixo *BC* é vazado com diâmetros interno e externo de 90 mm e 120 mm, respectivamente. Os eixos *AB* e *CD* são sólidos de diâmetro *d*. Para o carregamento mostrado, determine (a) a tensão de cisalhamento mínima e máxima no eixo *BC*, (b) o diâmetro necessário *d* dos eixos *AB* e *CD* se a tensão de cisalhamento admissível nestes eixos for 65 MPa.

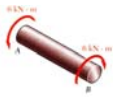


Ex. 3.1:

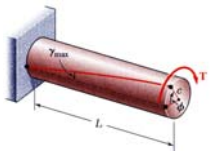


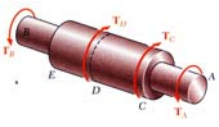
Ex. 3.1:





Ângulo de Torção no Regime Elástico





- Lembrando que o ângulo de torção e a deformação de cisalhamento máxima estão relacionados por:

$$\gamma_{max} = \frac{c\phi}{L}$$

- E na faixa elástica, a deformação e a tensão de cisalhamento estão relacionadas pela Lei de Hooke:

$$\gamma_{max} = \frac{\tau_{max}}{G} = \frac{Tc}{JG}$$

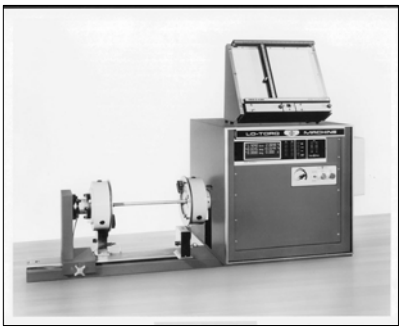
- Igualando as duas expressões para deformação de cisalhamento e resolvendo para o ângulo de torção, temos:

$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

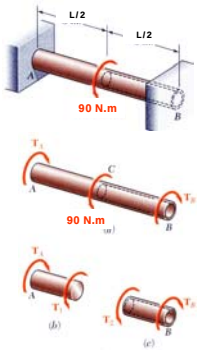
- Se o carregamento torsional ou a seção transversal do eixo mudam ao longo do comprimento, o ângulo de torção total é dado pela soma dos ângulos dos segmentos:

$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i}$$

Máquina de Ensaio de Torção



Eixos Estaticamente Indeterminados



- Dadas as dimensões do eixo e o torque aplicado, gostaríamos de encontrar as reações ao torque em *A* e *B*.
- A partir de uma análise de corpo-livre do eixo,

$$T_A + T_B = 90$$

o que não é suficiente para encontrar os torques nas extremidades, sendo o problema, portanto, estaticamente indeterminado.

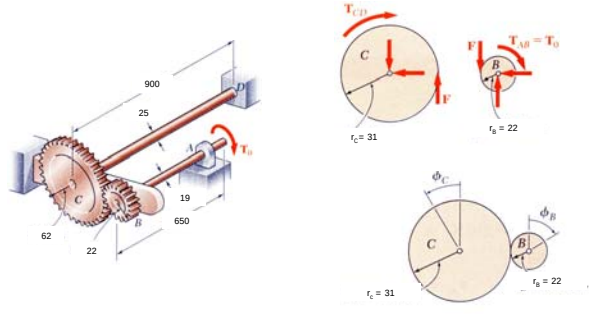
- Dividir o eixo em duas partes, que devem ter deformações compatíveis:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{T_A L_1}{J_1 G} - \frac{T_B L_2}{J_2 G} = 0 \qquad T_B = \frac{L_1 J_2}{L_2 J_1} T_A$$

- Substituir na equação de equilíbrio original:

$$T_A + \frac{L_1 J_2}{L_2 J_1} T_A = 90$$

Ex. 3.4: Dois eixos maciços de aço estão conectados por engrenagens. Sabendo que para cada eixo G = 77,2 GPa e que a tensão de cisalhamento admissível é 55 MPa, determine (*a*) o maior torque que pode ser aplicado à extremidade do eixo *AB*, (*b*) o ângulo correspondente através do qual a extremidade *A* do eixo *AB* gira.

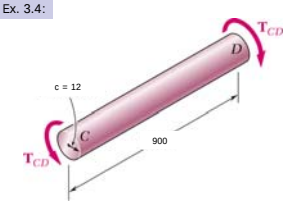


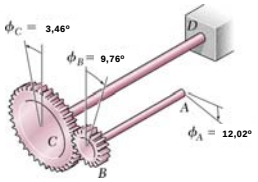
Ex. 3.4:


ϕ_C
ϕ_B
C
B
r_c = 31
r_B = 22

$T_{AB} = T_0$
A
c = 9,5
$T_{AB} = T_0$
B
650

Ex. 3.4:


T_{CD}
D
c = 12
C
900
T_{CD}


ϕ_C = 3,46°
ϕ_B = 9,76°
D
A
C
B
ϕ_A = 12,02°