

1. Introdução.
O Conceito de Tensão.

Conteúdo

Conceito de Tensão

Exemplo Ilustrativo

Carga Axial: Tensão Normal

Carregamento Centrado e Excêntrico

Tensão de Cisalhamento

Exemplos

Tensão de Esmagamento

Análise de Tensões e Exemplo de Projeto

Tensão em um Plano Oblíquo

Tensões Máximas

Tensão sob Carregamento Geral

Estado de Tensões

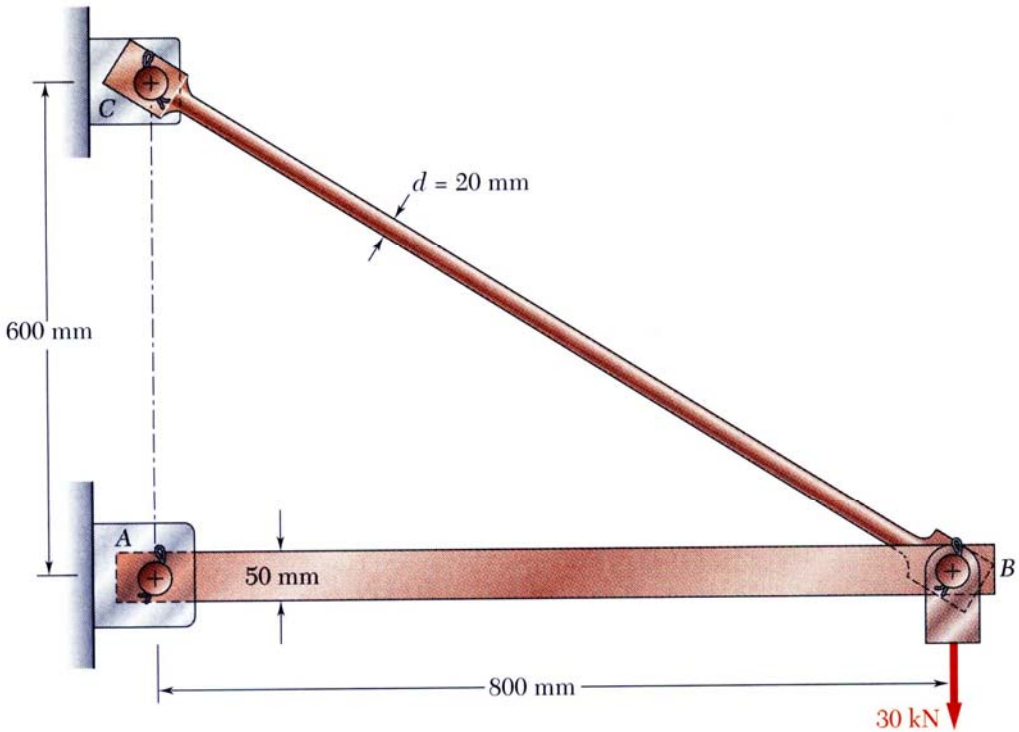
Coeficiente de Segurança

Conceito de Tensão

- O objetivo principal do estudo da Resistência dos Materiais é prover ao futuro engenheiro os meios para a análise e para o projeto de diversas máquinas e estruturas de suporte.

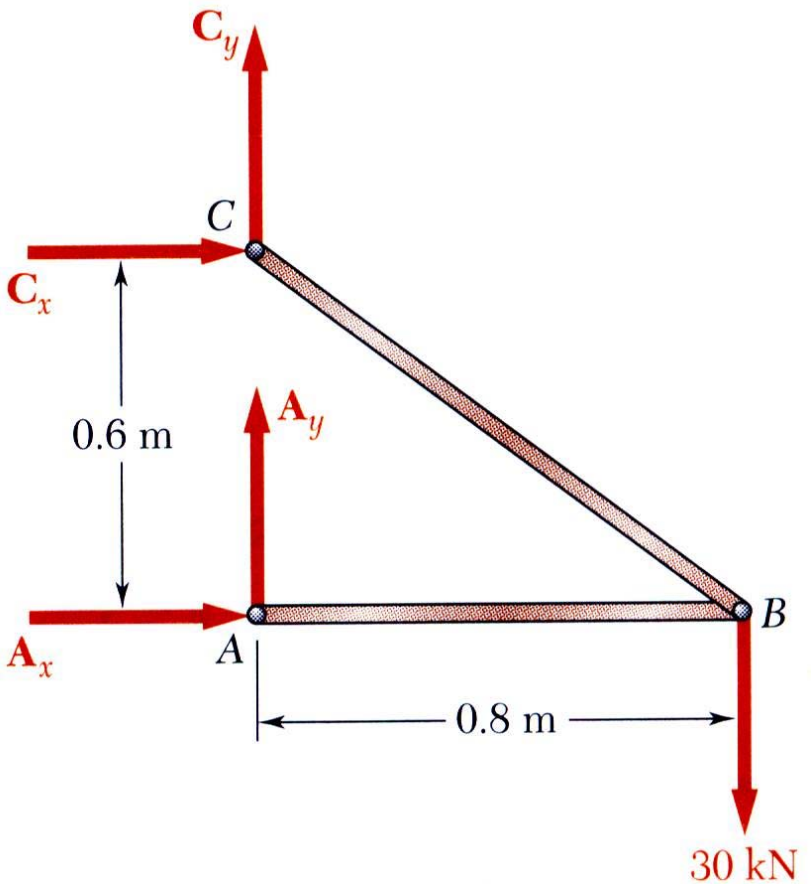
- Ambos, a análise e o projeto de uma dada estrutura, envolvem a determinação das *tensões e deformações*, atuantes sobre a mesma.

Exemplo Ilustrativo



- A estrutura foi projetada para suportar uma carga de 30 kN, conforme mostrado.
- Esta consiste de duas barras ligadas por pinos, na junção e nos suportes.
- Primeiramente, deve-se fazer a análise estática da peça no sentido de se determinar a força interna em cada membro estrutural e as reações nos suportes.

Diagrama de Corpo Livre da Estrutura



- A estrutura é isolada dos suportes e as forças externas e reações são indicadas.
  - Condições de equilíbrio estático:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0 = A_x(0.6\,\text{m}) - (30\,\text{kN})(0.8\,\text{m})$$

$$A_x = 40\,\text{kN}$$

$$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0 = A_x + C_x$$

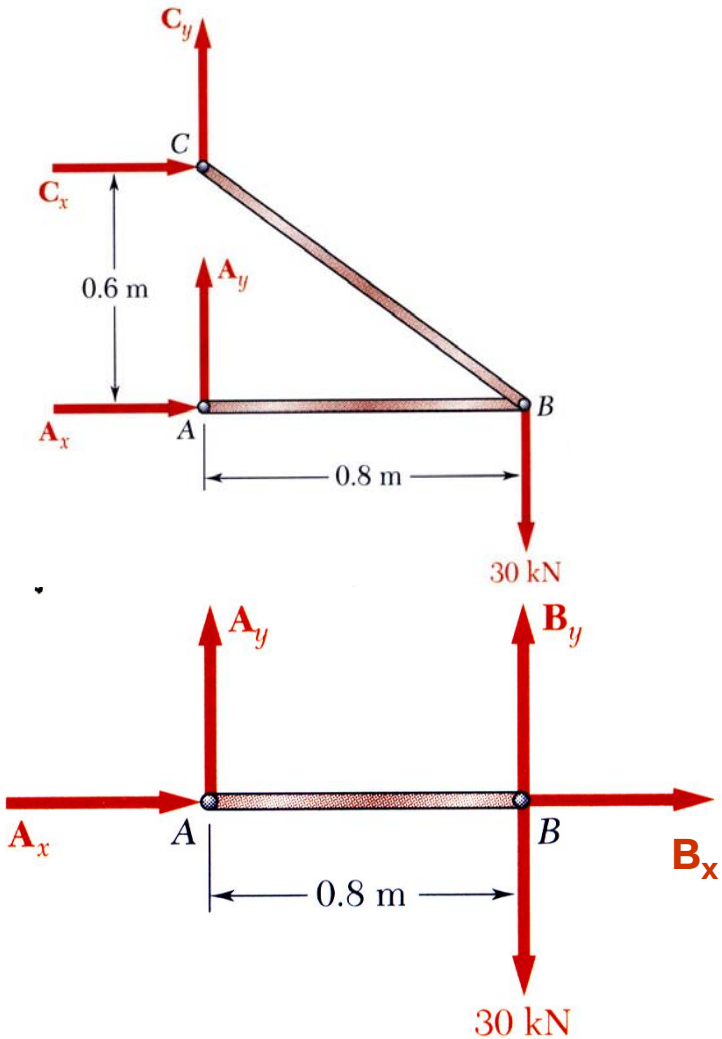
$$C_x = -A_x = -40\,\text{kN}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 = A_y + C_y - 30\,\text{kN} = 0$$

$$A_y + C_y = 30\,\text{kN}$$

- A_y e C_y não podem ser determinadas a partir destas equações.

Diagrama de Corpo Livre da Barra AB:



- Assim como a estrutura completa, cada componente deve satisfazer às condições de equilíbrio estático.

- Considere o diagrama de corpo livre da barra AB:

$$+\circlearrowleft \quad \Sigma M_B = 0 = -A_y(0.8\,\mathrm{m})$$

$$A_y = 0$$

Substitua na equação de equilíbrio de forças em y e calcule C_y:

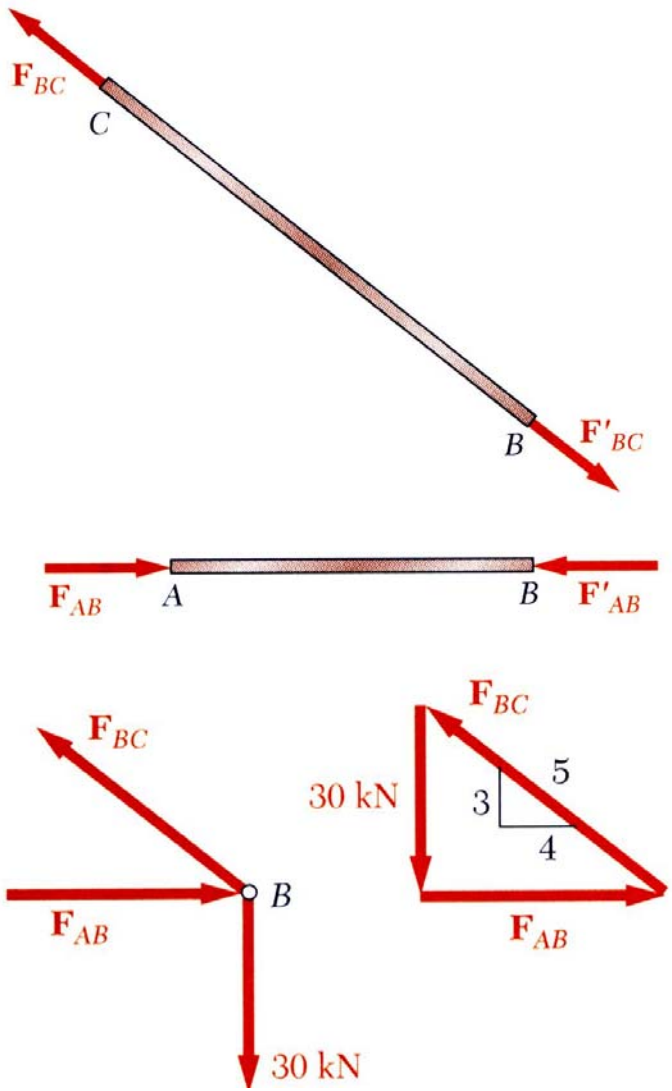
$$C_y = 30\,\mathrm{kN}$$

- Resultados:

$$A_x = 40\,\mathrm{kN} \quad C_x = -40\,\mathrm{kN} \quad C_y = 30\,\mathrm{kN}$$

As forças de reação são direcionadas ao longo das barras.

Alternativa: Método das Juntas



- As barras são membros de duas forças, i.e., estão sujeitas a apenas duas forças que são aplicadas nas suas extremidades.

- Para o equilíbrio, as forças devem ser paralelas a um eixo entre os pontos de aplicação da força, iguais em magnitude, e em direções opostas.

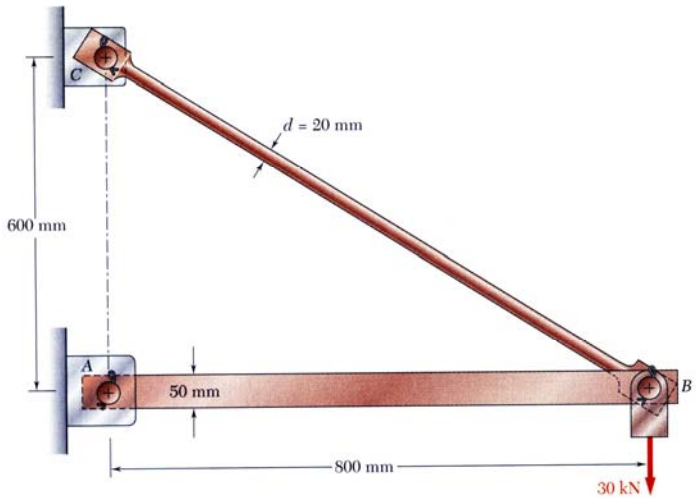
- As juntas devem satisfazer às condições para equilíbrio estático, que podem ser expressas na forma de um triângulo de forças:

$$\Sigma F_B = 0$$

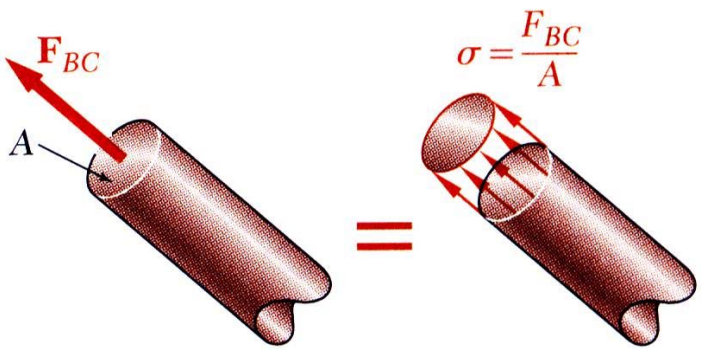
$$\frac{F_{AB}}{4} = \frac{F_{BC}}{5} = \frac{30\,\text{kN}}{3}$$

$$F_{AB} = 40\,\text{kN} \qquad F_{BC} = 50\,\text{kN}$$

Análise da Resistência



d_{BC} = 20 mm



A estrutura pode suportar com segurança uma carga de 30 kN?

- A partir da análise estática:

  F_{AB} = 40 kN (compresssão)

  F_{BC} = 50 kN (tração)

- Em qualquer seção da barra BC, a força interna é 50 kN com uma intensidade de força ou tensão de:

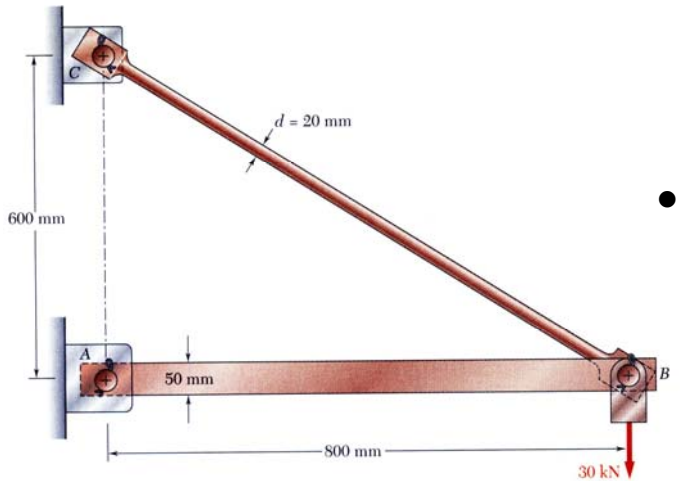
$$\sigma_{BC} = \frac{P}{A} = \frac{50x10^{3}N}{314x10^{-6}m^{2}} = 159\ MPa$$

- A partir das propriedades do material (aço), a tensão admissível é

$$\sigma_{adm} = 165\ MPA$$

- Conclusão: a resistência da barra BC é adequada.

Revisão do Projeto



- A revisão do projeto da estrutura requer a seleção apropriada das dimensões dos componentes e dos materiais, de forma a alcançar os requisitos de desempenho.
- Por razões de custo, peso, disponibilidade, etc, decide-se construir a barra em alumínio (σ_{adm}= 100MPa). Neste caso, qual seria o valor apropriado para o diâmetro da barra?

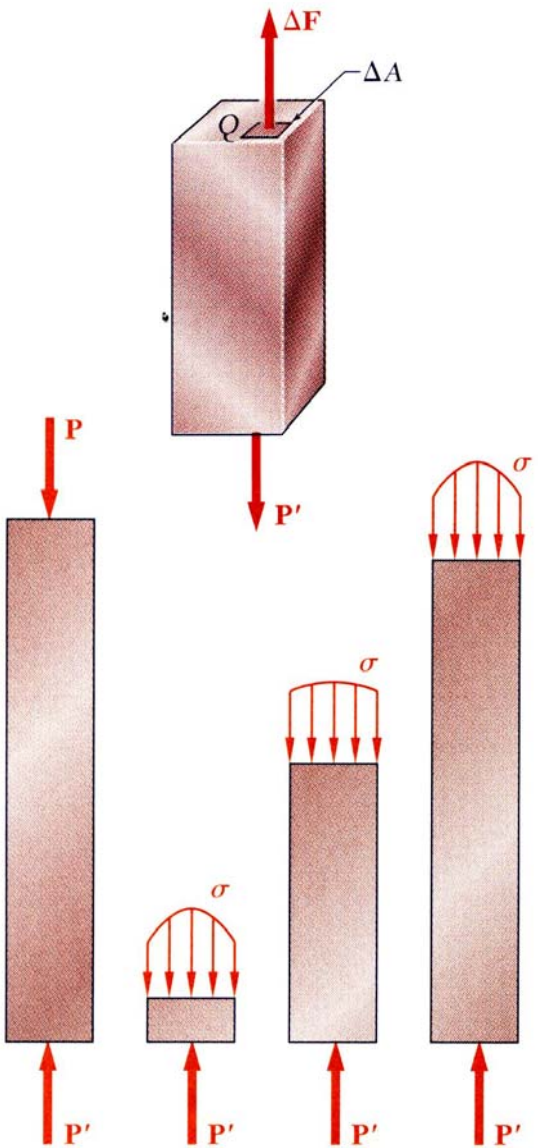
$$\sigma_{adm} = \frac{P}{A} \qquad A = \frac{P}{\sigma_{adm}} = \frac{50x10^{3}N}{100x10^{6}Pa} = 500x10^{-6}m^{2}$$

$$A = \pi d^2/4$$

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4\left(500x10^{-6}m^{2}\right)}{\pi}} = 2.52x10^{-2}m = 25.2mm$$

- Dessa forma, uma barra de alumínio com diâmetro mínimo de 26 mm é adequada.

Carga Axial: Tensão Normal



- A resultante das forças internas em uma peça carregada axialmente é *normal* a uma seção perpendicular ao seu eixo longitudinal.

- A intensidade da força sobre esta seção é definida como a tensão normal.

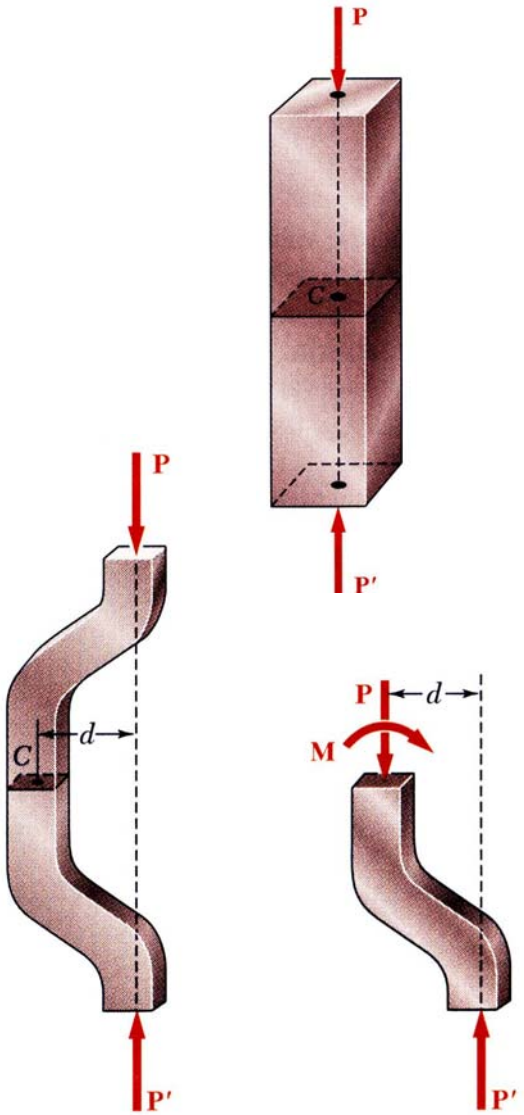
$$\sigma = \lim \Delta F/\Delta A \qquad \sigma_{med} = \frac{P}{A}$$

- A tensão normal em um ponto particular pode não ser igual à tensão média, mas a resultante da distribuição de tensão deve satisfazer a:

$$P = \sigma_{med} A = \int dF = \int_A \sigma dA$$

- A distribuição real de tensão é estaticamente indeterminada, i.e., não pode ser obtida a somente a partir da estática.

Carregamento Centrado e Excêntrico



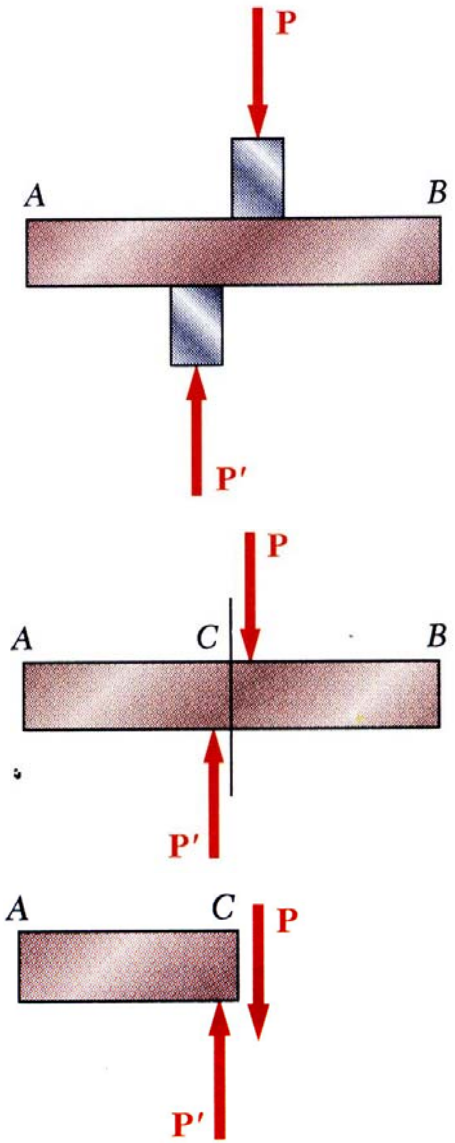
- Uma distribuição uniforme de tensão em uma seção implica em que a linha de ação da resultante das forças internas passe através do centro da seção.

- Uma distribuição uniforme de tensão só é possível se os carregamentos concentrados nas extremidades forem aplicados no centro da seção, sendo definido assim como *carregamento centrado*.

- Se uma peça sob a ação de duas forças é *excentricamente carregada*, então a resultante da distribuição de tensão numa seção deve produzir uma força axial e um momento.

- A distribuição de tensão em peças excentricamente carregadas não pode ser uniforme ou simétrica.

Tensão de Cisalhamento



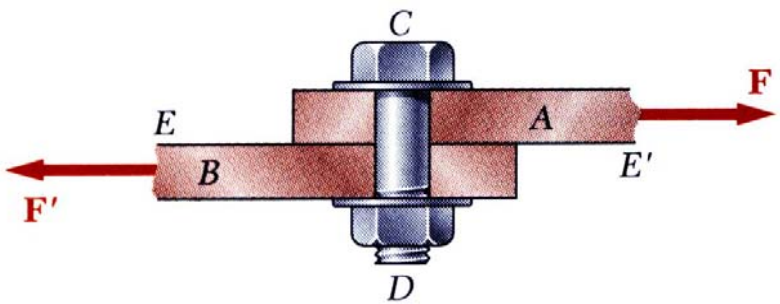
- As forças *P* e *P′* são aplicadas transversalmente à peça *AB.*
- As forças internas correspondentes agem na seção *C* e são chamadas *forças de cisalhamento*.
- A resultante da distribuição da força de cisalhamento interna é definida como o *cisalhamento* da seção e é igual ao carregamento *P*.
- A tensão de cisalhamento média correspondente é:

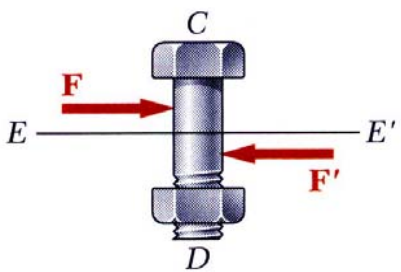
$$\zeta_{med} = \frac{P}{A}$$

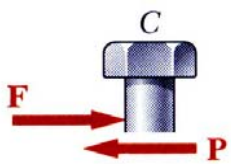
- A distribuição real de tensão de cisalhamento varia a partir de zero na superfície da peça até valores máximos, que podem ser muito maiores que o valor médio.
- Dessa forma, a distribuição de tensão de cisalhamento não pode ser assumida como uniforme.

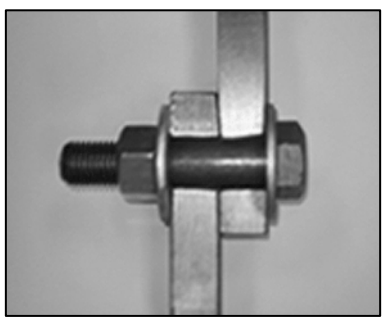
Cisalhamento - Exemplos

Cisalhamento Simples



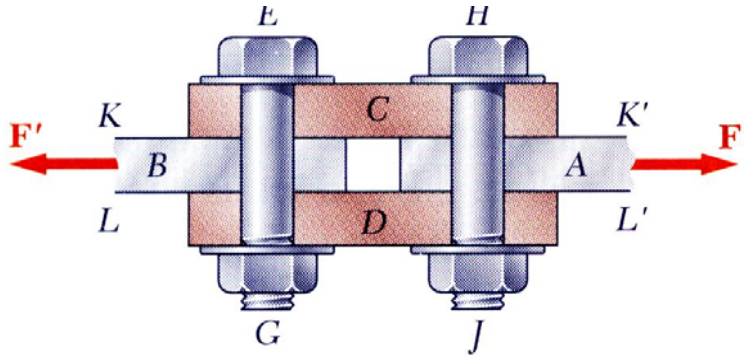


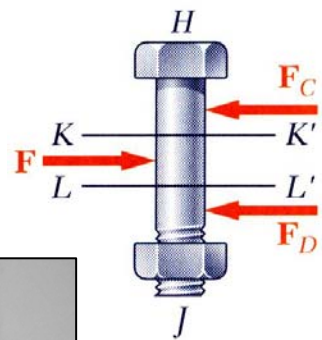


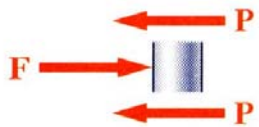


$$\zeta_{med} = \frac{P}{A} = \frac{F}{A}$$

Cisalhamento Duplo

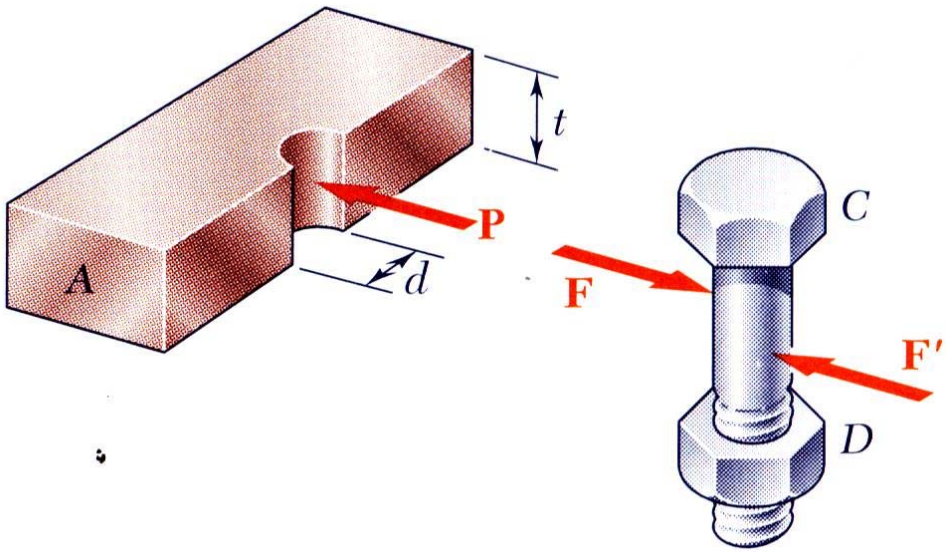


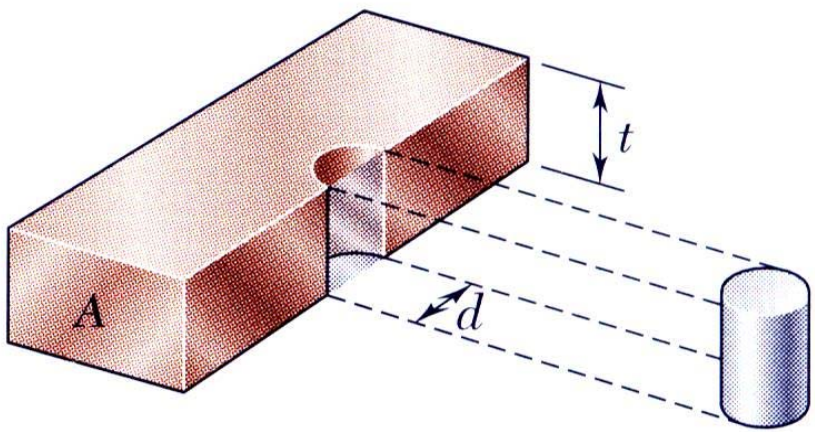




$$\zeta_{med} = \frac{P}{A} = \frac{F}{2A}$$

Tensão de Esmagamento

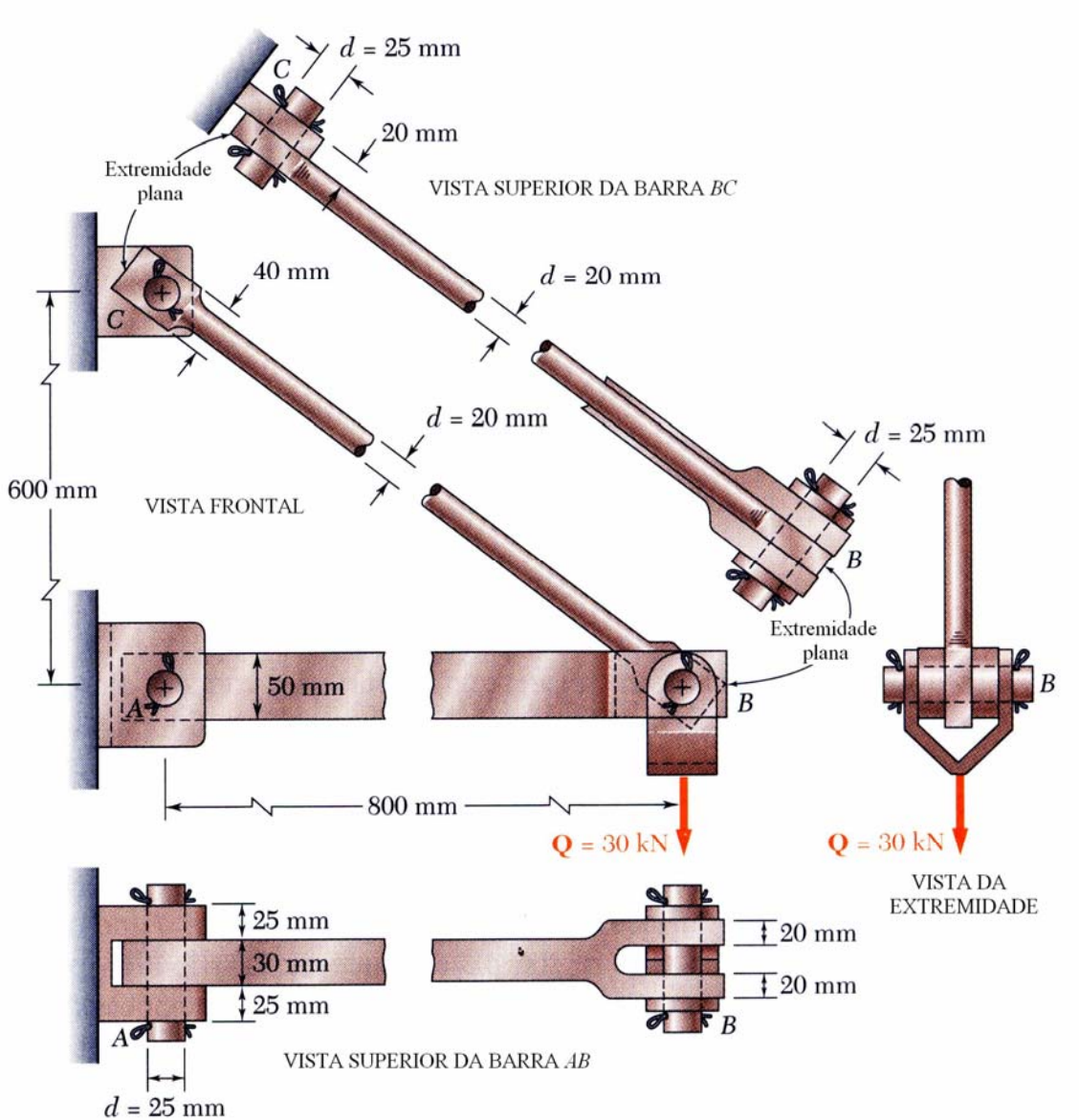




- Parafusos, rebites e pinos criam tensões nos pontos de contato das peças que conectam.
- A resultante da distribuição da força na superfície é igual e oposta à força exercida no pino.
- A intensidade da força média correspondente é chamada tensão de esmagamento,

$$\sigma_e = \frac{P}{A} = \frac{P}{t\,d}$$

Análise de Tensões e Exemplo de Projeto



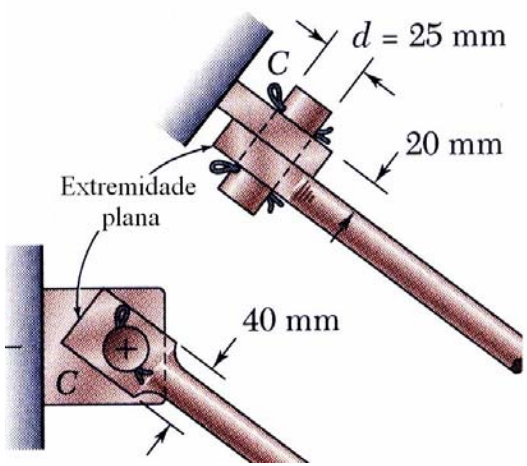
- Determine as tensões nas barras e conexões da estrutura mostrada.

- A partir da análise estática:

  F_{AB} = 40 kN (compressão)
  F_{BC} = 50 kN (tração)

- Devem-se considerar as tensões normais máximas em *AB* e *BC*, a tensão de cisalhamento e a tensão de esmagamento em cada conexão de pino.

Tensões Normais nas Barras



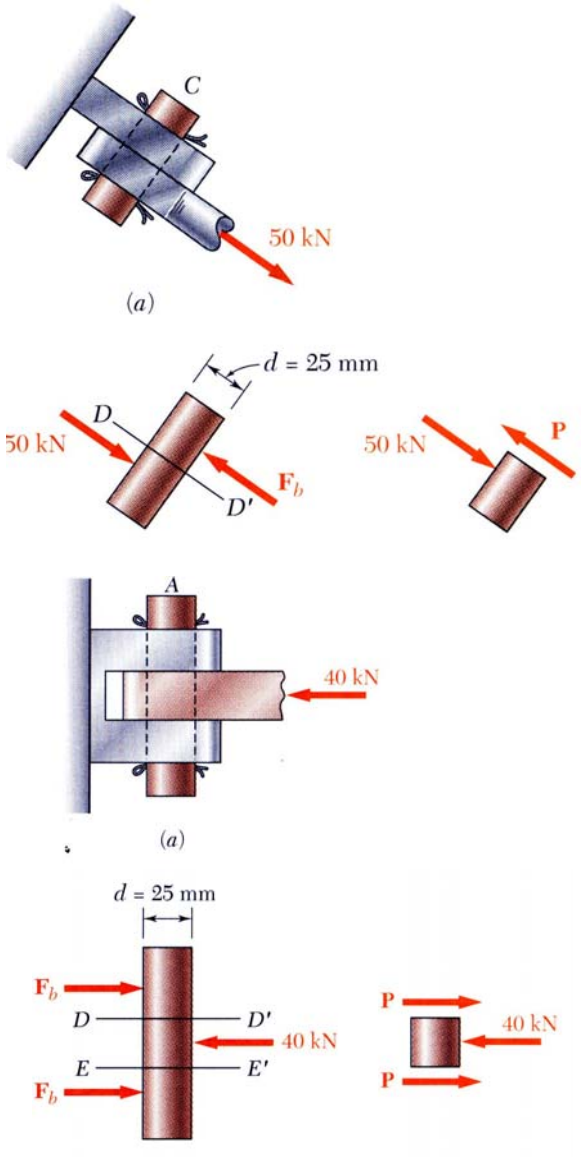
- A barra *BC* está em tração com uma força axial de 50 kN.
- No centro da barra a tensão normal média na seção transversal circular ($A = 314\text{x}10^{-6}\text{m}^2$) é $\sigma_{BC} = +159$ MPa.
- Nas extremidades planas da barra, a menor área de seção transversal ocorre na linha central do pino,

$$A = (20\,\text{mm})(40\,\text{mm} - 25\,\text{mm}) = 300\text{x}10^{-6}\,\text{m}^2$$

$$\sigma_{BC,extr} = \frac{P}{A} = \frac{50\text{x}10^{3}\,\text{N}}{300\text{x}10^{-6}\,\text{m}^2} = 167\,\text{MPa}$$

- A barra *AB* está em compressão com uma força axial de 40 kN e tensão normal média de –26.7 MPa.
- As seções de área mínima nas extremidades da barra *AB* não estão tensionadas já que a barra está em compressão.

Tensões de Cisalhamento nos Pinos



- Área da seção transversal para os pinos em *A*, *B*, e *C*,

$$A = \pi r^2 = \pi(25/2)^2 = 491 \times 10^{-6}\ m^2$$

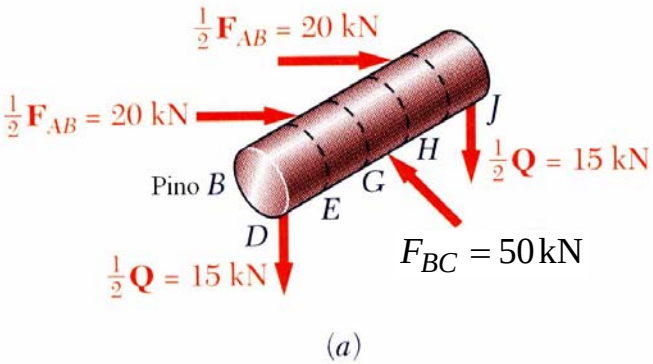
- A força no pino em *C* é igual à força exercida pela barra *BC*,

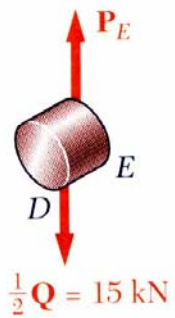
$$\zeta_{C,med} = \frac{P}{A} = \frac{50x10^3 N}{491x10^{-6} m^2} = 102\,MPa$$

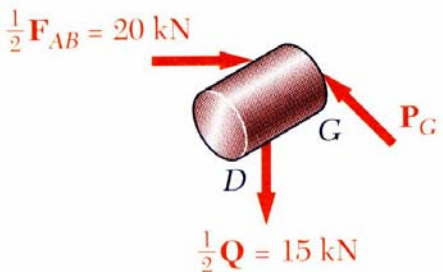
- O pino em *A* está em cisalhamento duplo com uma força total igual à força exercida pelo barra *AB*,

$$\zeta_{A,med} = \frac{P}{A} = \frac{20\,kN}{491 \times 10^{-6} m^2} = 40.7\,MPa$$

Tensões de Cisalhamento nos Pinos







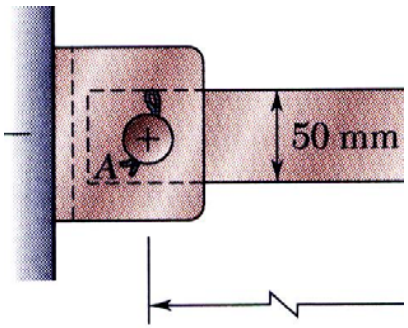
- Divida o pino em *B* em seções, para determinar a seção com a maior força de cisalhamento.

$$P_E = 15\,\text{kN}$$
$$P_G = 25\,\text{kN} \quad \text{(maior)}$$

- Avalie a tensão de cisalhamento média correspondente,

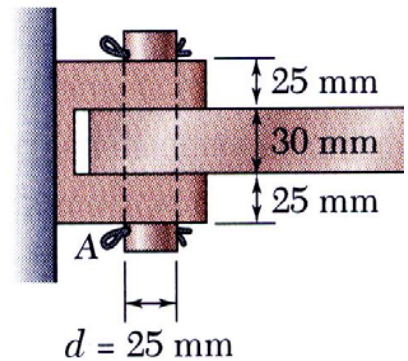
$$\zeta_{B,med} = \frac{P_G}{A} = \frac{25\,\text{kN}}{491\text{x}10^{-6}\,\text{m}^2} = 50.9\,\text{MPa}$$

Tensões de Esmagamento



- Para determinar a tensão de esmagamento em *A* na barra *AB*, temos t = 30 mm e d = 25 mm,

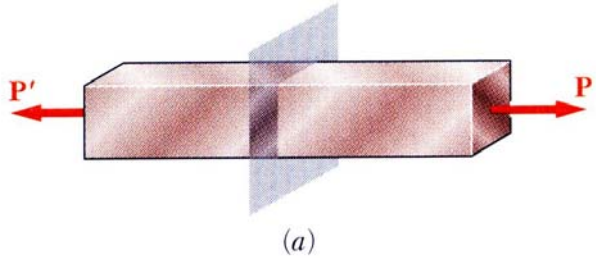
$$\sigma_b = \frac{P}{td} = \frac{40\,\text{kN}}{(30\,\text{mm})(25\,\text{mm})} = 53.3\,\text{MPa}$$

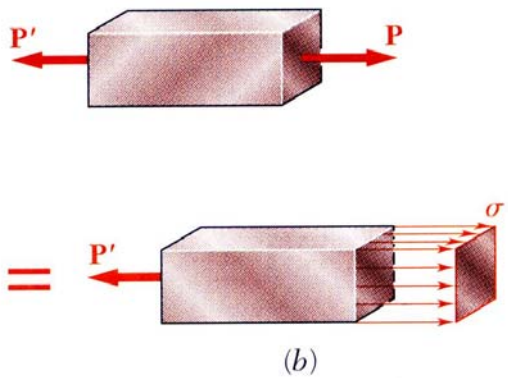


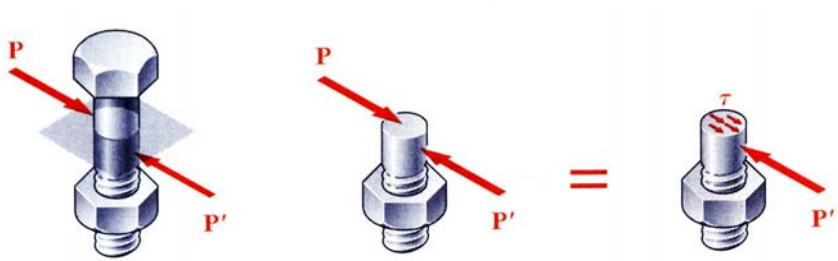
- Para determinar a tensão de esmagamento em *A* no suporte, temos t = 2(25 mm) = 50 mm e d = 25 mm,

$$\sigma_b = \frac{P}{td} = \frac{40\,\text{kN}}{(50\,\text{mm})(25\,\text{mm})} = 32.0\,\text{MPa}$$

Tensão em peças sob ação de duas forças

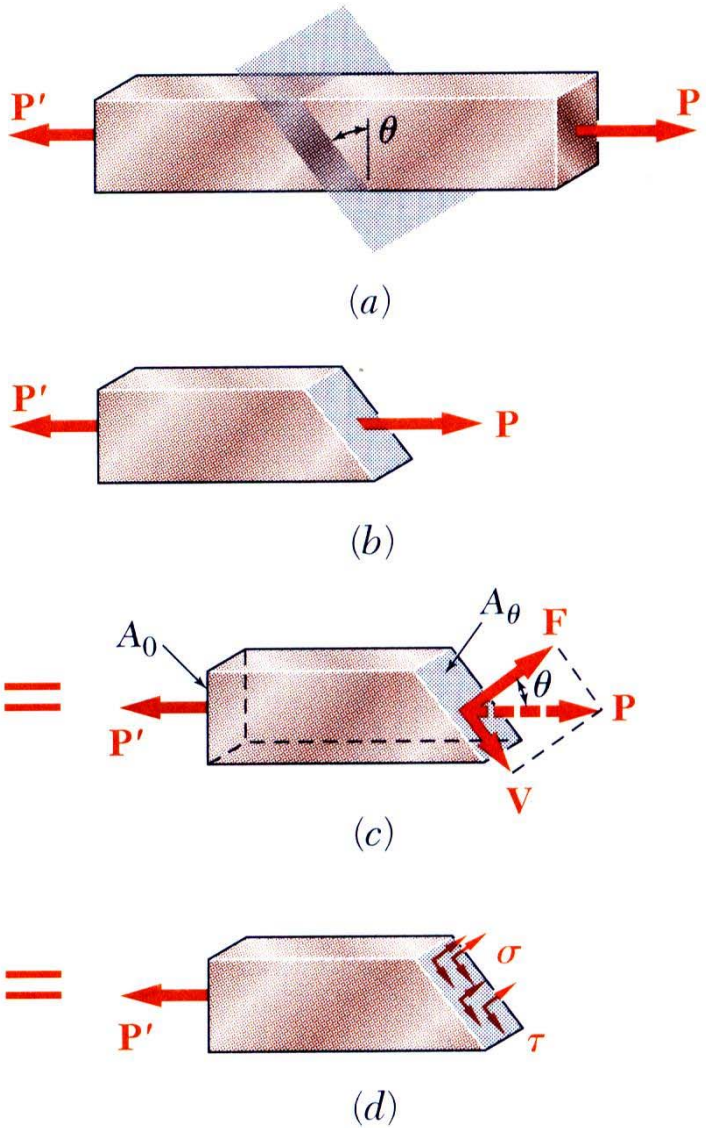






- Forças axiais resultam em apenas tensões normais num plano perpendicular ao eixo da peça.
- Forças transversais em parafusos e pinos resultam em apenas tensões de cisalhamento no plano perpendicular ao eixo do parafuso ou pino.
- Será mostrado a seguir que tanto forças axiais como transversais podem produzir tanto tensões normais como de cisalhamento com respeito a outro plano que não o perpendicular ao eixo longitudinal.

Tensões em um Plano Oblíquo



- Considere uma seção através da peça, formando um ângulo θ com o plano normal.
- A partir das condições de equilíbrio, as forças distribuídas no plano devem ser equivalentes à força *P.*
- Expresse *P* em componentes normal e tangencial à seção oblíqua,

$$F = P\cos\theta \qquad V = P\operatorname{sen}\theta$$

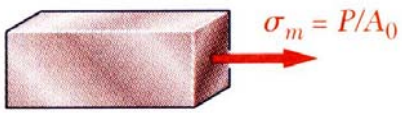
- As tensões normais médias e de cisalhamento no plano oblíquo são:

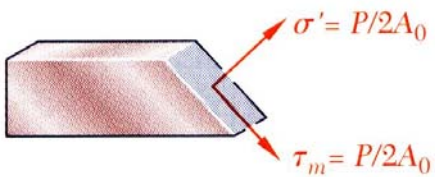
$$\sigma = \frac{F}{A_\theta} = \frac{P\cos\theta}{A_0/\cos\theta} = \frac{P}{A_0}\cos^2\theta$$

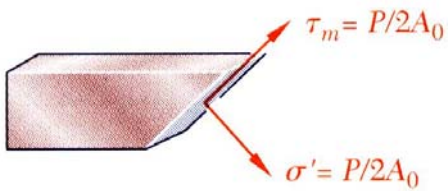
$$\zeta = \frac{V}{A_\theta} = \frac{P\operatorname{sen}\theta}{A_0/\cos\theta} = \frac{P}{A_0}\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

Tensões Máximas









- Tensões normais e de cisalhamento num plano oblíquo:

$$\sigma = P/A\,(\cos^2\theta) \qquad \zeta = P/A_0\,(\text{sen}\theta\cos\theta)$$

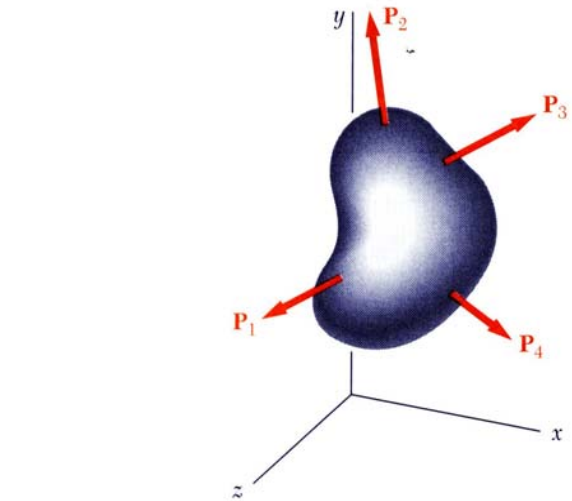
- A tensão normal máxima ocorre quando o plano de referência é perpendicular ao eixo da peça:

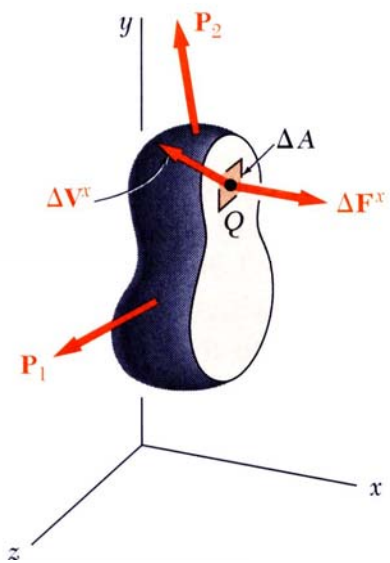
$$\sigma_m = P/A_0 \qquad \zeta` = 0$$

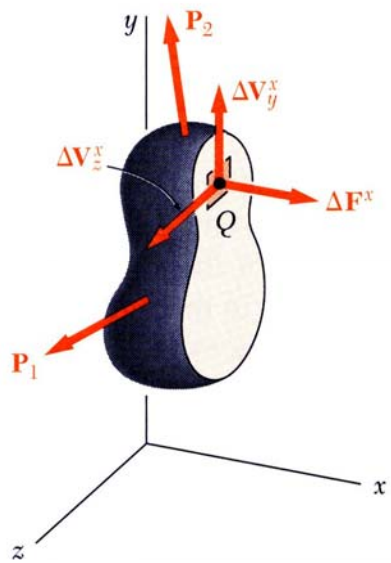
- A tensão de cisalhamento máxima ocorre para um plano a $\pm$ 45º com relação ao eixo:

$$\zeta_m = P/A_0\text{sen}45\cos45 = P/2A_0 = \sigma`$$

Tensão sob Carregamento Geral







- Uma peça sujeita a uma combinação geral de carregamento é dividida em dois segmentos através de um plano passando pelo ponto *Q.*

- A distribuição das componentes de tensão internas pode ser definida como:

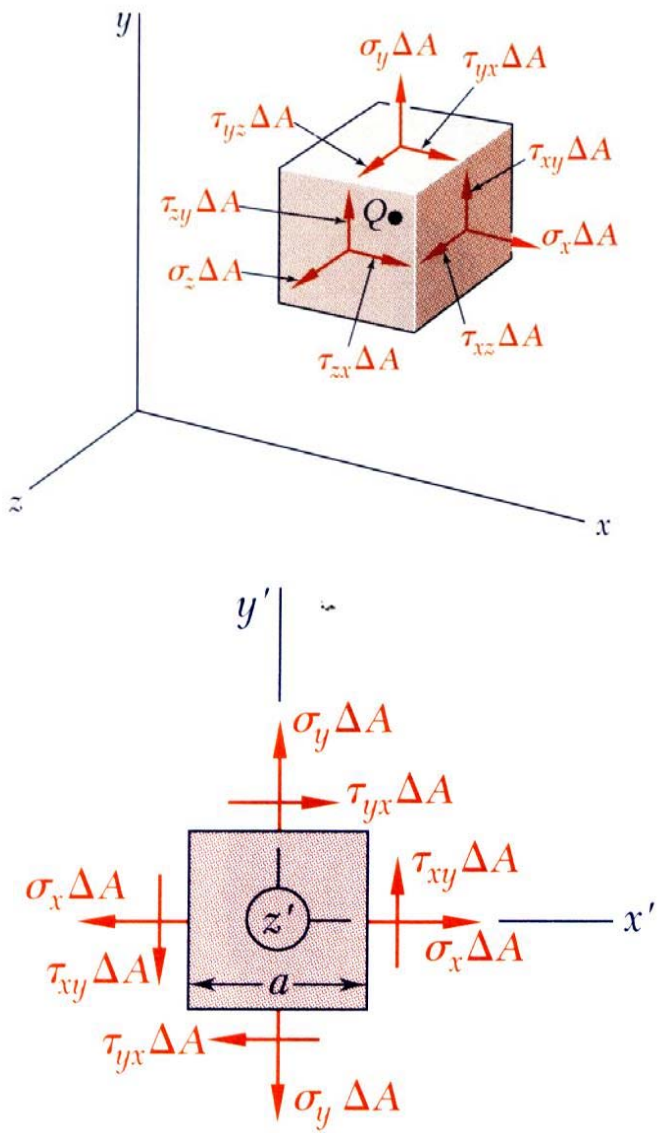
$$\sigma_x = \lim \Delta F_x/\Delta A$$

$$\zeta_{xy} = \lim \Delta V_{xy}/\Delta A$$

$$\zeta_{xz} = \lim \Delta V_{xz}/\Delta A$$

- Para o equilíbrio, devem ser exercidas no outro segmento da peça uma distribuição de tensão e uma força interna iguais e opostas.

Estado de Tensões



- Componentes de tensão são definidas para os planos paralelos aos eixos *x*, *y* e *z*. Para o equilíbrio, tensões iguais e opostas são exercidas nos planos posteriores.
- A combinação de forças geradas pelas tensões deve satisfazer às condições de equilíbrio:

$$\Sigma F_x = \Sigma F_y = \Sigma F_z = 0$$

$$\Sigma M_x = \Sigma M_y = \Sigma M_z = 0$$

- Considere os momentos sobre o eixo *z*:

$$\Sigma M_z = 0 = (\zeta_{xy} \Delta A)a - (\zeta_{yx} \Delta A)a$$

$$\zeta_{xy} = \zeta_{yx}$$

Similarmente, $\zeta_{yz} = \zeta_{zy}$ e $\zeta_{xz} = \zeta_{zx}$

- Resulta que apenas 6 componentes de tensão são necessárias para definir o estado completo de tensões.

Coeficiente de Segurança

Membros estruturais ou de máquinas devem ser projetados de forma que as tensões de trabalho sejam menores que a resistência máxima (tensão última) do material.

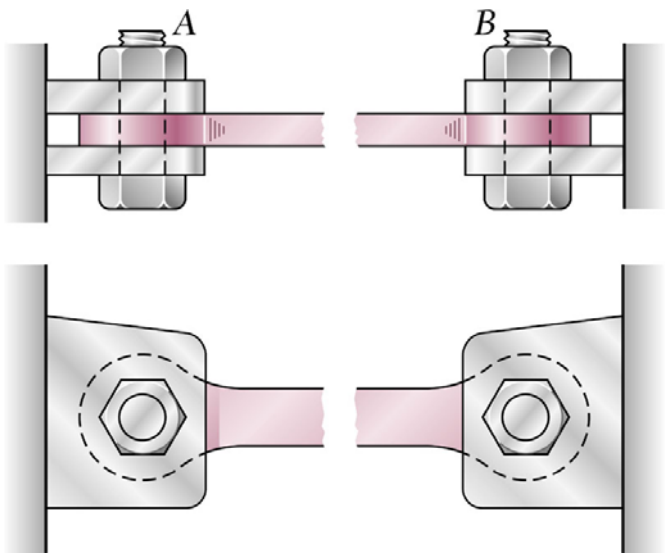
FS : Fator de segurança

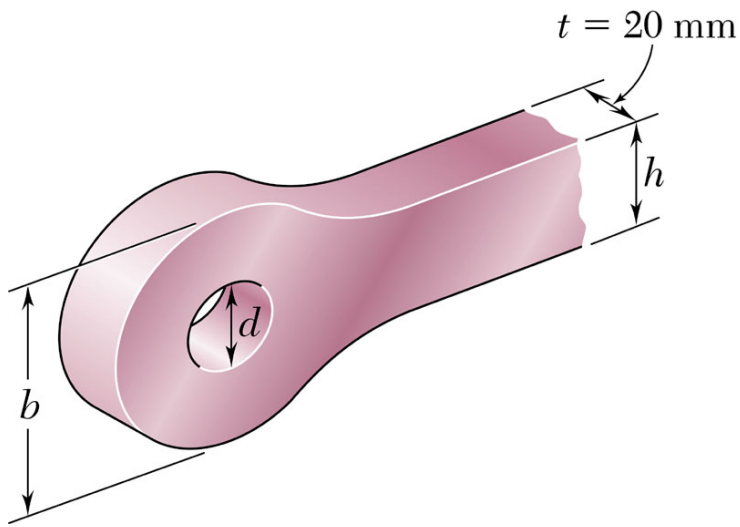
$$FS = \sigma_u / \sigma_{adm} = \frac{\text{tensão última}}{\text{tensão admissível}}$$

Considerações sobre o fator de segurança:

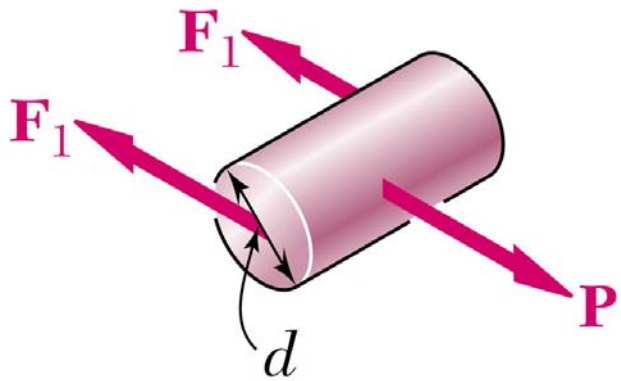
- incerteza nas propriedades do material
- incerteza dos carregamentos
- incerteza da análise
- número de ciclos de carregamento
- tipos de falha
- requisitos de manutenção e efeitos de deterioração
- importância do membro para a integridade da estrutura completa
- risco para vida e propriedade
- influência na função da máquina

Ex. 1.2: A barra de ligação de aço mostrada deve suportar uma força de tração de intensidade 120 kN quando rebitada entre suportes duplos em A e B. A barra será feita a partir de uma chapa de 20 mm de espessura. Para a classe do aço a ser usado, as tenões admissíveis máximas são σ=175MPa, ζ=100MPa e σ_e=350MPa. Projete a barra determinando os valores necessários para (a) o diâmetro d do parafuso, (b) a dimensão b em cada extremidade, (c) a dimensão h.

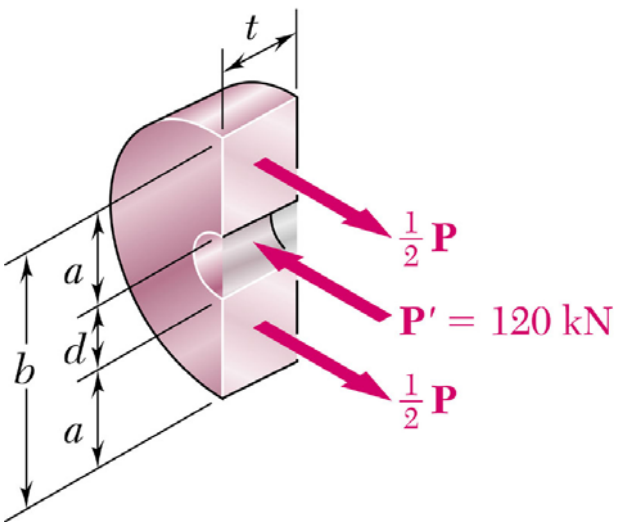


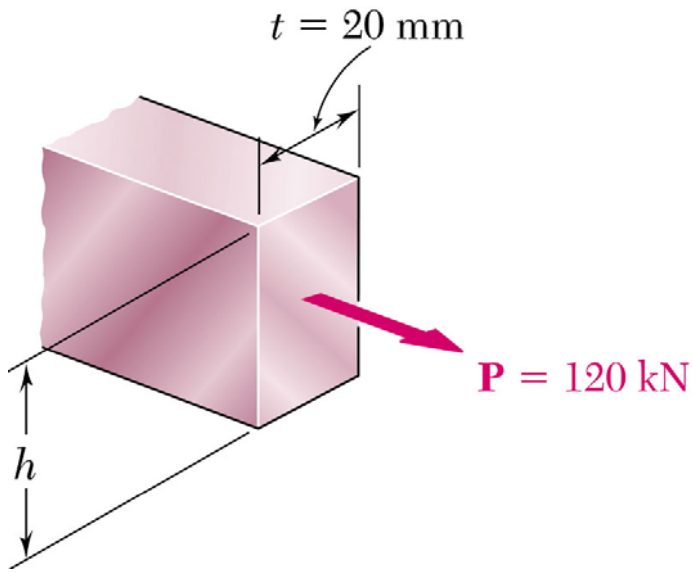


Ex. 1.2

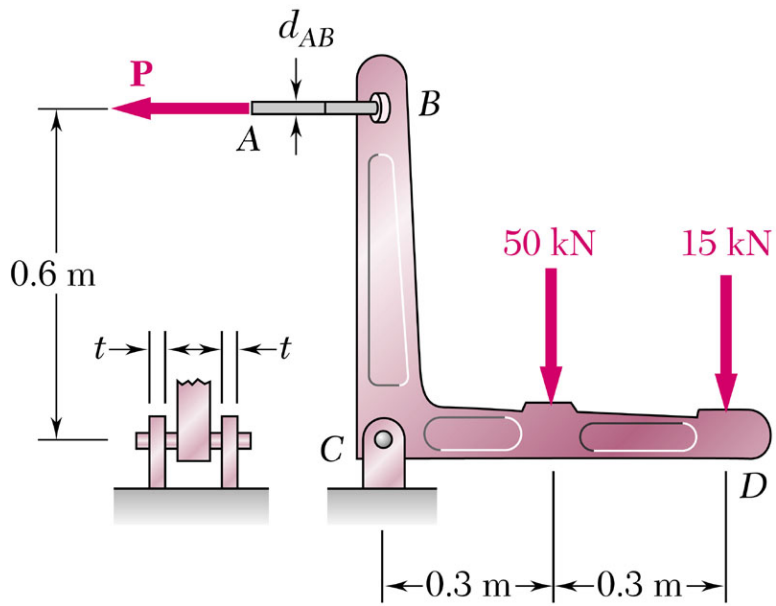


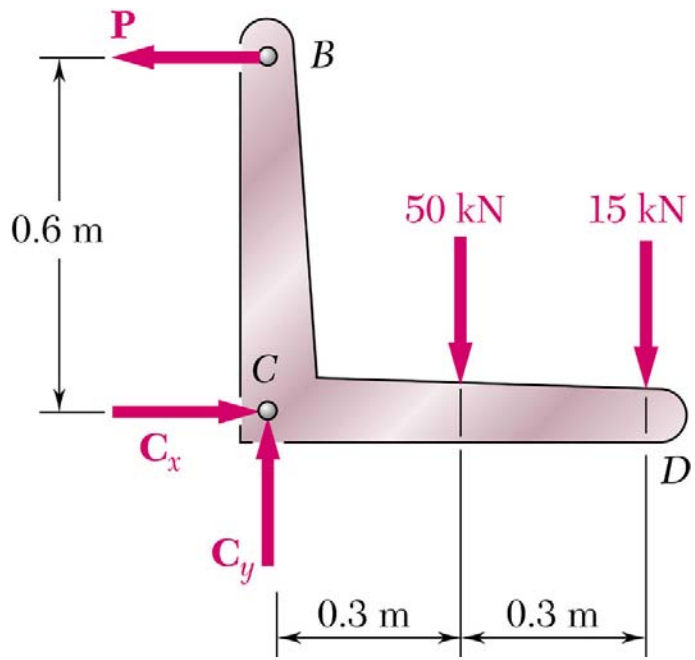
$$F_1 = \frac{1}{2}P$$

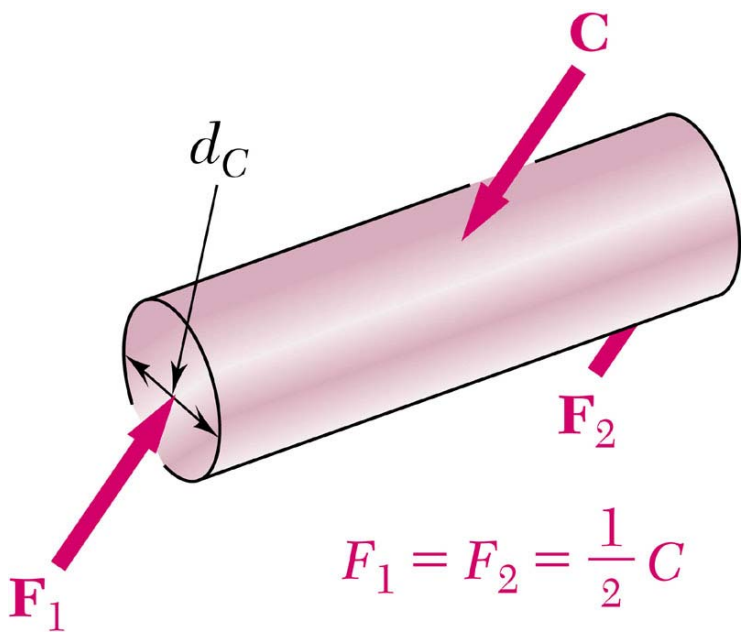


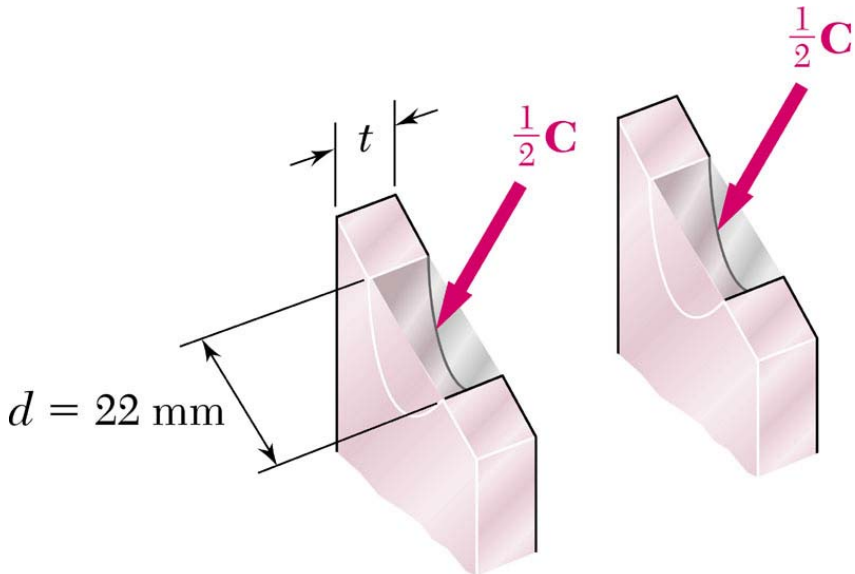


Ex. 1.3: São aplicadas duas forças ao suporte BCD mostrado. (a) Sabendo que a barra AB deve ser feita de aço tendo um limite de tensão normal de 600MPa, determine o diâmetro da barra para o qual o coeficiente de segurança com relação à falha seja igual a 3,3. (b) O pino em C deve ser feito de um aço com limite de tensão ao cisalhamento de 350 MPa. Determine o diâmetro do pino C para o qual o coeficiente de segurança ao cisalhamento seja também 3,3. (c) Determine a espessura necessária para o suporte em C, sabendo que a tensão de esmagamento admissível do aço utilizado é de 300MPa.






C
d_C
$\mathbf{F}_2$
$\mathbf{F}_1$
$F_1 = F_2 = \frac{1}{2} C$


$\frac{1}{2}$C
t
$\frac{1}{2}$C
$d = 22$ mm