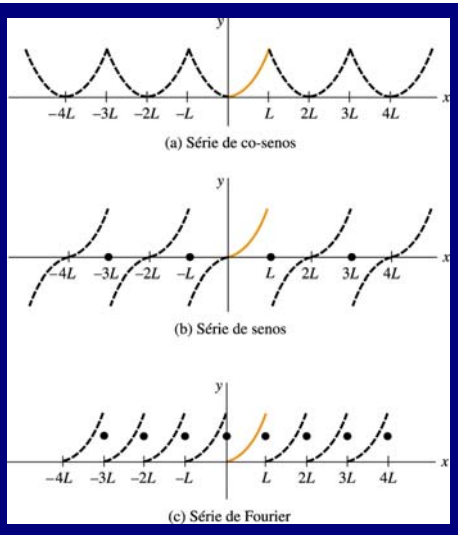


VI– Análise de Fourier

Espaços Vetoriais

Introdução Nas seções anteriores, trabalhamos com pontos e vetores em espaços de duas e três dimensões. Matemáticos no século dezenove, de forma especial os matemáticos ingleses Arthur Cayley (1821 – 1895) e James Joseph Sylvester (1814 – 1897) e o matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805 – 1865), perceberam que os conceitos de *ponto* e *vetor* poderiam ser generalizados. Mostrou-se que os vetores poderiam ser descritos ou definidos por propriedades analíticas ao invés de propriedades geométricas. Tal fato se constituiu em um avanço verdadeiramente significativo na história da matemática. Não há necessidade de pararmos em três dimensões; quádruplos $\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$, quíntuplos $\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \rangle$ e enuplas $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ ordenados de números reais podem ser pensados tanto como vetores quanto pares ordenados $\langle a_1, a_2 \rangle$ e triplos ordenados $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, a única diferença estando no fato de perdermos nossa habilidade de visualizar diretamente segmentos de reta ou setas em espaços de 4, 5 ou n dimensões.

Espaços Vetoriais

■ **Espaço *n*** Em termos formais, um **vetor em um espaço *n*** é qualquer enupla $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ de números reais denominados de componentes de **a**. O conjunto de todos vetores em um espaço *n* é representado por R^n. Os conceitos de adição vetorial, multiplicação escalar, igualdade e assim por diante, listados na Definição 1.2, se aplicam a R^n de modo natural. Por exemplo, se $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$, então a adição e a multiplicação escalar no espaço *n* são definidas por

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n \rangle \quad \text{e} \quad k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, \ldots, ka_n \rangle. \tag{1}$$

O **vetor zero** em R^n é $\langle 0, 0 \ldots, 0 \rangle$. O conceito de **comprimento** de um vetor $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ no espaço *n* é apenas uma extensão daquele conceito em duas e três dimensões:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}.$$

Espaços Vetoriais

O comprimento de um vetor é também denominado de **norma**. Um **vetor unitário** é um vetor cuja norma é 1. Para um vetor não-zero **a**, o processo de construção de um vetor unitário **u** multiplicando-se **a** pelo recíproco da sua norma, isto é, $\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a}$, é referido como **normalização de a**. Por exemplo, se $\mathbf{a} = \langle 3, 1, 2, -1\rangle$, então $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{15}$, e um vetor unitário é

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{15}}\mathbf{a} = \left\langle \frac{3}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{15}}, -\frac{1}{\sqrt{15}} \right\rangle.$$

O **produto interno padrão**, também conhecido como **produto interno euclidiano** ou **produto escalar**, de dois vetores de ordem n $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n\rangle$ é o número real definido por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle \cdot \langle b_1, b_2, \ldots, b_n\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n. \qquad (2)$$

Dois vetores não-zero **a** e **b** em R^n são ditos ser **ortogonais** se e somente se $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Por exemplo, $\mathbf{a} = \langle 3, 4, 1, -6\rangle$ e $\mathbf{b} = \langle 1, \frac{1}{2}, 1, 1\rangle$ são ortogonais em R^4 pois $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 + 1 \cdot 1 + (-6) \cdot 1 = 0$.

■ **Espaço vetorial** Podemos ir além da notação de um vetor como uma enupla ordenada em R^n. Um vetor pode ser definido como qualquer coisa que queiramos que seja: uma enupla ordenada, um número, um conjunto de números ou mesmo uma função. Porém, estamos particularmente interessados em vetores que sejam elementos em um tipo especial de conjunto chamado **espaço vetorial**. Dois tipos de objetos, **vetores** e **escalares**, e duas operações algébricas análogas àquelas indicadas em (1) são fundamentais à notação do espaço vetorial. Para um conjunto de vetores, queremos ser capazes de adicionar dois vetores nesse conjunto e obter outro vetor no mesmo conjunto, e queremos multiplicar um vetor por um escalar e obter um vetor no mesmo conjunto. Para que um conjunto de objetos esteja em um espaço vetorial, é necessário que o conjunto possua essas duas operações algébricas junto com determinadas outras propriedades. Essas propriedades, os *axiomas* de um espaço vetorial, são apresentadas a seguir.

Considere V como sendo um conjunto de elementos no qual duas operações denominadas **adição vetorial** e **multiplicação escalar** estão definidas. Assim, V é dito ser um **espaço vetorial** se as dez propriedades a seguir são satisfeitas.

Axiomas para adição vetorial:

(*i*) Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ estão em V, então $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ está em V.

(*ii*) Para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ em V, $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$. (Lei comutativa)

(*iii*) Para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ em V, $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$. (Lei associativa)

(*iv*) Existe um único vetor $\mathbf{0}$ em V tal que

$$\mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$$ (vetor zero)

(*v*) Para cada $\mathbf{x}$ em V, existe um vetor $-\mathbf{x}$ tal que

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$ (Negativo de um vetor)

Axiomas para a multiplicação escalar:

(*vi*) Se k for qualquer escalar e $\mathbf{x}$ estiver em V, então $k\mathbf{x}$ estará em V

(*vii*) $k(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = k\mathbf{x} + k\mathbf{y}$ (Lei distributiva)

(*viii*) $(k_1 + k_2)\mathbf{x} = k_1\mathbf{x} + k_2\mathbf{x}$ (Lei distributiva)

(*ix*) $k_1(k_2\mathbf{x}) = (k_1k_2)\mathbf{x}$

(*x*) $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$

Exemplo 2 Um exemplo de um espaço vetorial

Considere o conjunto V de números reais positivos. Se x e y denotarem números reais positivos, então escrevemos vetores em V como $\mathbf{x} = x$ e $\mathbf{y} = y$. Agora a *adição* de vetores é definida por

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = xy$$

e a *multiplicação escalar* é definida por

$$k\mathbf{x} = x^k.$$

Determine se V é um espaço vetorial.

Solução Avaliaremos todos os dez axiomas.

(*i*) Para $\mathbf{x} = x > 0$ e $\mathbf{y} = y > 0$, $\mathbf{x} + \mathbf{y} = xy > 0$. Assim, a soma $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ está em V; V está fechado sob adição.

(*ii*) Como a multiplicação de números reais positivos é comutativa, temos para todo $\mathbf{x} = x$ e $\mathbf{y} = y$ em V, $\mathbf{x} + \mathbf{y} = xy = yx = \mathbf{y} + \mathbf{x}$. Assim, a adição é comutativa.

(*iii*) Para todo $\mathbf{x} = x$, $\mathbf{y} = y$, $\mathbf{z} = z$ em V,

$$\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = x(yz) = (xy)z = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}.$$

Dessa forma, a adição é associativa.

(*iv*) Como $\mathbf{1} + \mathbf{x} = 1x = x = \mathbf{x}$ e $\mathbf{x} + \mathbf{1} = x1 = x = \mathbf{x}$, o vetor zero $\mathbf{0}$ é $\mathbf{1} = 1$.

(*v*) Se definirmos $-\mathbf{x} = \dfrac{1}{x}$, então

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = x\frac{1}{x} = 1 = \mathbf{1} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \frac{1}{x}x = 1 = \mathbf{1} = \mathbf{0}.$$

Portanto, o negativo de um vetor é seu recíproco.

(*vi*) Se k for qualquer escalar e $\mathbf{x} = x > 0$ for qualquer vetor, então $k\mathbf{x} = x^k > 0$. Conseqüentemente, V está fechado sob multiplicação escalar.

(*vii*) Se k for qualquer escalar, então

$$k(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (xy)^k = x^k y^k = k\mathbf{x} + k\mathbf{y}.$$

(*viii*) Para escalares k_1 e k_2,

$$(k_1 + k_2)\mathbf{x} = x^{(k_1 + k_2)} = x^{k_1}x^{k_2} = k_1\mathbf{x} + k_2\mathbf{x}.$$

(*ix*) Para escalares k_1 e k_2,

$$k_1(k_2\mathbf{x}) = (x^{k_2})^{k_1} = x^{k_1 k_2} = (k_1 k_2)\mathbf{x}.$$

(*x*) $1\mathbf{x} = x^1 = x = \mathbf{x}$.

Como todos os axiomas da Definição 1.5 foram satisfeitos, concluímos que V é um espaço vetorial. ❑

A seguir são indicados alguns espaços vetoriais importantes – mencionamos alguns deles anteriormente. As operações de adição vetorial e multiplicação escalar são as operações usuais associadas com o conjunto.

- O conjunto R de números reais
- O conjunto R^2 de pares ordenados
- O conjunto R^3 de triplos ordenados
- O conjunto R^n de enuplas ordenadas
- O conjunto P_n de polinômios de grau menor ou igual a n
- O conjunto P de todos os polinômios
- O conjunto de funções reais f definidas por todo o eixo real
- O conjunto $C[a, b]$ de funções reais f contínuas no intervalo fechado $a \leq x \leq b$
- O conjunto $C(-\infty,\infty)$ de funções reais f contínuas por todo o eixo real
- O conjunto $C^n[a, b]$ de todas as funções reais f para as quais $f, f', f'', \ldots, f^{(n)}$ existem e são contínuas no intervalo $[a, b]$

Subespaço Pode ocorrer de um subconjunto de vetores W de um espaço vetorial V ser por si só um espaço vetorial.

Se um subconjunto W de um espaço vetorial V for por si só um espaço vetorial sujeito às operações de adição vetorial e multiplicação escalar definidas em V, então W é denominado um **subespaço** de V.

Todo espaço vetorial V tem ao menos dois subespaços: o próprio V e o subespaço zero $\{\mathbf{0}\}$; $\{\mathbf{0}\}$ é um subespaço, pois o vetor zero tem que ser um elemento em todo espaço vetorial.

Para mostrar que um subconjunto W de um espaço vetorial V é um subespaço, não é necessário demonstrar que todos os dez axiomas da Definição 1.5 são satisfeitos. Como todos os vetores em W estão também em V, esses vetores tem que satisfazer axiomas tais como (*ii*) e (*iii*). Em outras palavras, W herda a maioria das propriedades de um espaço vetorial a partir de V. Como indica o próximo teorema, precisamos somente checar os dois axiomas de fechamento para demonstrar que um subconjunto W é um subespaço de V.

Um subconjunto não-vazio W de um espaço vetorial V é um subconjunto de V se e somente se W for fechado sob adição vetorial e multiplicação escalar definidas em V:

(*i*) Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ estiverem em W, então $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ estará em W.

(*ii*) Se $\mathbf{x}$ estiver em W e k for qualquer escalar, então $k\mathbf{x}$ estará em W.

Exemplo 3 Um subespaço

Suponha **f** e **g** funções reais contínuas definidas por todo o eixo real. Então sabemos do cálculo que **f** + **g** e *k***f**, para qualquer número real *k*, são funções contínuas e reais. A partir disso, podemos concluir que $C(-\infty,\infty)$ é um subespaço do espaço vetorial de funções reais definidas por todo o eixo real. ❑

Exemplo 4 Um subespaço

O conjunto P_n de polinômios de grau menor ou igual a n é um subespaço de $C(-\infty,\infty)$, o conjunto de funções reais contínuas por todo o eixo real. ❑

É sempre uma boa idéia ter visualizações concretas de espaços e subespaços vetoriais. Os subespaços do espaço vetorial R^3 de vetores tridimensionais podem ser facilmente visualizados pensando-se o vetor como um ponto (a_1, a_2, a_3). Obviamente, $\{0\}$ e R^3 por si só são subespaços; outros subespaços são todas as retas passando pela origem e todos os planos passando pela origem. As retas e planos tem que passar através da origem, pois o vetor zero $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ tem que ser um elemento em cada subespaço.

Independência linear

Um conjunto de vetores $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ é dito ser **linearmente independente** se as únicas constantes que satisfazem a equação

$$k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \cdots + k_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0} \qquad (3)$$

forem $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$. Se o conjunto de vetores não for linearmente independente, então ele é dito ser **linearmente dependente**.

Em R^3, os vetores $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle$ e $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$ são linearmente independentes, pois a equação $k_1\mathbf{i} + k_2\mathbf{j} + k_3\mathbf{k} = 0$ é igual a

$$k_1\langle 1, 0, 0\rangle + k_2\langle 0, 1, 0\rangle + k_3\langle 0, 0, 1\rangle = \langle 0, 0, 0\rangle \quad \text{ou} \quad \langle k_1, k_2, k_3\rangle = \langle 0, 0, 0\rangle.$$

Pela igualdade de vetores, (*ii*) da Definição 1.2, concluímos que $k_1 = 0$, $k_2 = 0$ e $k_3 = 0$. Na Definição 1.7, dependência linear significa que existem constantes $k_1, k_2, \ldots, k_n$ *nem todas zero*, de modo que $k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \ldots + k_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$. Por exemplo, em R^3 os vetores $\mathbf{a} = \langle 1,1,1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2,-1,4\rangle$ e $\mathbf{c} = \langle 5,2,7\rangle$ são linearmente dependentes, pois (3) é satisfeito quando $k_1 = k_2 = 1$ e $k_3 = -1$:

$$3\langle 1, 1, 1\rangle + \langle 2, -1, 4\rangle - \langle 5, 2, 7\rangle = \langle 0, 0, 0\rangle \quad \text{ou} \quad 3\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

Observamos que dois vetores são linearmente independentes se nenhum deles for um múltiplo constante do outro.

■ **Base** Qualquer vetor em R^3 pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores linearmente independentes **i**, **j** e **k**. Na Seção 1.2, dizemos que esses vetores formam uma **base** para o sistema de vetores tridimensionais.

Considere um conjunto de vetores $B = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ em um espaço vetorial V. Se o conjunto B for linearmente independente e se todo vetor em V puder ser escrito como uma combinação linear desses vetores, então B é dito ser uma **base** para V.

■ **Bases padrão** Apesar de não sermos capazes de demonstrar isso nesse curso, todo espaço vetorial possui uma base. O espaço vetorial P_n de todos os polinômios de grau menor ou igual a n tem a base $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$, pois qualquer vetor (polinômio) $p(x)$ de grau n ou menor pode ser escrito como a combinação linear $p(x) = c_n x^n + \ldots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$. Um espaço vetorial pode ter muitas bases. Mencionamos anteriormente que o conjunto de vetores $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ é uma base para R^3. Porém, pode-se demonstrar que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, onde

$$\mathbf{u}_1 = \langle 1, 0, 0\rangle, \qquad \mathbf{u}_2 = \langle 1, 1, 0\rangle, \qquad \mathbf{u}_3 = \langle 1, 1, 1\rangle$$

é um conjunto linearmente independente (veja o Problema 23 nos Exercícios 1.6) e, além disso, mesmo o vetor $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ pode ser escrito como uma combinação linear $\mathbf{a} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3$. Portanto, o conjunto de vetores é outra base para R^3. De fato, qualquer conjunto de *três* vetores linearmente independentes é uma base para aquele espaço. Entretanto, o conjunto $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ é referido como a **base padrão** para R^3. A base padrão para o espaço P_n é, obviamente, $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$. Para o espaço vetorial R^n, a base padrão consiste dos n vetores

$$\mathbf{e}_1 = \langle 1, 0, 0, \ldots, 0\rangle, \ \mathbf{e}_2 = \langle 0, 1, 0, \ldots, 0\rangle, \ldots, \ \mathbf{e}_n = \langle 0, 0, 0, \ldots, 1\rangle.$$

Se B for uma base para um espaço vetorial V, então para todo vetor $\mathbf{v}$ em V existem escalares c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ de modo que

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{x}_2 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n. \tag{5}$$

Os escalares c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ na combinação linear (5) são chamados de **coordenadas de v relativas à base** B. Em R^n, a notação da enupla $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ para um vetor **a** significa que números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são as coordenadas de **a** *relativas à base padrão* com $\mathbf{e}_i$'s na ordem exata indicada em (4).

■ **Dimensão** Se um espaço vetorial V tem uma base B constituída por n vetores, então pode-se demonstrar que *toda* base para aquele espaço tem que conter n vetores. Isso nos leva à próxima definição.

> O número de vetores em uma base B para um espaço vetorial V é dito ser a **dimensão** do espaço.

Exemplo 5 Dimensões de alguns espaços vetoriais

(a) Em concordância com a nossa intuição, as dimensões dos espaços vetoriais R, R^2, R^3 e R^n são, respectivamente, 1, 2, 3 e n.

(b) Como existem $n + 1$ vetores na base padrão $B = \{1, x, x^2, ..., x^n\}$, as dimensões do espaço vetorial P_n de polinômios de grau menor ou igual a n é $n + 1$.

(c) Ao espaço vetorial zero $\{\mathbf{0}\}$ é dada consideração especial. Esse espaço contém somente $\mathbf{0}$, e como $\{\mathbf{0}\}$ é um conjunto linearmente dependente, ele não é uma base. Nesse caso, é comum tomarmos o conjunto vazio como a base e *definirmos* a dimensão de $\{\mathbf{0}\}$ como zero. ❑

Se a base de um espaço vetorial contiver um número finito de vetores, então dizemos que o espaço vetorial é de **dimensão finita**, do contrário é de **dimensão infinita**. A função espaço $C^n(I)$ de n vezes funções diferenciáveis contínuas em um intervalo I é um exemplo de um espaço vetorial de dimensão infinita.

Equações diferenciais lineares

Considere a equação diferencial linear homogênea de ordem n

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \qquad (6)$$

em um intervalo I no qual os coeficientes sejam contínuos e $a_n(x) \neq 0$ para todo x no intervalo. Uma solução y_1 de (6) é necessariamente um vetor no espaço vetorial $C^n(I)$. Além disso, que se y_1 e y_2 são soluções de (6), então a soma $y_1 + y_2$ e qualquer múltiplo constante ky_1 são também soluções. Como o conjunto solução é fechado sob adição e multiplicação escalar, decorre do Teorema 1.4 que o conjunto solução de (6) é um subespaço de $C^n(I)$. Por conseguinte, o conjunto solução de (6) merece ser chamado de **espaço solução** da equação diferencial. Sabemos também que se $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ são soluções linearmente independentes de (6), então sua solução geral da equação diferencial é a combinação linear

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x).$$

Relembre que qualquer solução da equação pode ser determinada a partir dessa solução geral pela especialização das constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Portanto, o conjunto de soluções linearmente independente $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ é uma base para o espaço solução. A dimensão desse espaço solução é n.

Exemplo 6 Dimensão de um espaço solução

A solução geral da equação diferencial linear homogênea de segunda ordem $y'' + 25y = 0$ é $y = c_1 \cos 5x + c_2 \operatorname{sen} 5x$. Uma base para o espaço solução é constituída pelos vetores linearmente independentes $\{\cos 5x, \operatorname{sen} 5x\}$. O espaço solução é bidimensional. ❑

O conjunto de soluções de uma equação diferencial linear não-homogênea não é um espaço vetorial. Diversos axiomas de um espaço vetorial não são satisfeitos; principalmente, o conjunto de soluções não contém um vetor zero. Em outras palavras, $y = 0$ não é uma solução de uma equação diferencial linear não-homogênea.

■ ***Span*** Considerando que S representa qualquer conjunto de vetores $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ em um espaço vetorial V, então o conjunto de *todas* as combinações lineares dos vetores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ em S,

$$\{k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \cdots + k_n\mathbf{x}_n\},$$

onde os k_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ são escalares, é chamado de ***span*** dos vetores e escrito Span(S) ou Span($\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$). Deixa-se como um exercício demonstrar que o Span(S) é um subespaço do espaço vetorial V. Veja o Problema 33 nos Exercícios 1.6. Span(S) é dito ser um subespaço *gerado* pelos vetores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$. Se V = Span(S), então dizemos que S é um **conjunto de *span*** (ou conjunto gerador) para o espaço vetorial V, ou que S gera (***spans***) V. Por exemplo, cada um dos três conjuntos

$$\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}, \quad \{\mathbf{i}, \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}\}, \quad \text{e} \quad \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}\}$$

são conjuntos geradores para o espaço vetorial R^3. Observe, porém, que os primeiros dois conjuntos são linearmente dependentes, enquanto o terceiro conjunto é dependente. Com esses novos conceitos, podemos reformular as Definições 1.8 e 1.9 da seguinte maneira:

> *Um conjunto* S *de vetores* $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ *em um espaço vetorial* V *é uma* **base** *para* V *se* S *for linearmente independente e for um conjunto de* span *para* V. *O número de vetores nesse conjunto de* span S *é a* **dimensão** *do espaço* V.

Observações

(i) Suponha que V seja um espaço vetorial real arbitrário. Se existir um produto interno definido em V, não é necessário que ele se assemelhe ao produto interno padrão ou euclidiano definido em R^n. Representaremos um produto interno que *não* seja o produto interno euclidiano pelo símbolo $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Veja os Problemas 30, 31 e 38(b) nos Exercícios 1.6.

(*ii*) Um espaço vetorial V no qual um produto interno foi definido é denominado um **espaço produto interno**. Um espaço vetorial V pode ter mais do que um produto interno definido nele. Por exemplo, um produto interno não-euclidiano definido em R^2 é $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1v_1 + 4u_2v_2$, onde $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2\rangle$ e $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$. Veja os Problemas 37 e 38(a) nos Exercícios 1.6.

(*iii*) Grande parte do nosso trabalho nos últimos capítulos desse texto ocorreu em um espaço vetorial de dimensão infinita. Como tal, precisamos estender a definição de independência linear de um conjunto finito de vetores $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n\}$ dado na Definição 1.7 para um conjunto infinito:

> Um conjunto infinito de vetores $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ...\}$ é dito ser **linearmente independente** se *todo* subconjunto finito do conjunto S for linearmente independente. Se o conjunto S não for linearmente independente, então ele é **linearmente dependente**.

Notamos que se S contiver um subconjunto linearmente dependente, então todo o conjunto S é linearmente dependente.

O espaço vetorial P de todos os polinômios tem a base padrão $B = \{1, x, x^2, ...\}$. O conjunto infinito B é linearmente independente.

Funções Ortogonais

Em cálculo, você viu que uma função f suficientemente diferenciável poderia ser substituída por uma série de Taylor, que é essencialmente uma série de potências de x. O principal conceito examinado nesse capítulo também envolve a expansão de uma função em uma série infinita. No início dos anos de 1800, o matemático Francês Joseph Fourier antecipou a idéia de expandir uma função f em uma série de funções trigonométricas. Acontece que as séries de Fourier são apenas casos especiais de um tipo mais geral de representação em série para uma função utilizando um conjunto infinito de funções ortogonais. A noção de um conjunto de funções ortogonais nos leva de volta aos autovalores e o conjunto de autofunções correspondente.

Introdução Em determinadas áreas da matemática avançada, uma função é considerada como sendo uma generalização de um vetor. Nessa seção, veremos como os dois conceitos vetoriais de produto interno, ou escalar, e ortogonalidades de vetores podem ser estendidas para as funções. O restante do capítulo é uma aplicação prática dessa discussão.

Produto interno Recordando, se $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ forem dois vetores em R^3 ou tridimensionais, então o produto interno ou produto escalar de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é um número real (ou escalar) definido como a soma dos produtos das suas componentes correspondentes:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = \sum_{k=1}^{3} u_kv_k.$$

O produto interno $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ possui as seguintes propriedades:

(*i*) $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$

(*ii*) $(k\mathbf{u}, \mathbf{v}) = k(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, k um escalar

(*iii*) $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ e $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$ se $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$

(*iv*) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

Qualquer generalização do produto interno tem essas mesmas propriedades.

Suponha que f_1 e f_2 sejam funções definidas em um intervalo $[a,b]$.* Como uma integral definida no intervalo do produto $f_1(x)f_2(x)$ possui as propriedades (*i*)-(*iv*) do produto interno de vetores, sempre que a integral existir a seguinte definição é válida.

* O intervalo poderia também ser $(-\infty, \infty)$, $[0,\infty)$, e assim por diante.

O **produto interno** de duas funções f_1 e f_2 em um intervalo $[a,b]$ é o número

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x)f_2(x)\,dx.$$

Funções ortogonais Motivados pelo fato de que dois vetores **u** e **v** são ortogonais sempre que o produto interno deles for nulo, definimos as **funções ortogonais** de uma maneira similar.

Duas funções f_1 e f_2 são ditas ser **ortogonais** em um intervalo $[a,b]$ se

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x) f_2(x)\, dx = 0.$$

Por exemplo, as funções $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = x^3$ são ortogonais no intervalo $[-1,1]$ pois

$$(f_1, f_2) = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot x^3\, dx = \tfrac{1}{6}x^6\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

Ao contrário da análise vetorial, onde a palavra *ortogonal* é um sinônimo para *perpendicular*, no contexto presente o termo *ortogonal* e a condição (1) não têm significado geométrico.

Conjuntos ortogonais Estamos inicialmente interessados em conjuntos infinitos de funções ortogonais.

Um conjunto de funções reais $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \ldots\}$ é dito ser **ortogonal** em um intervalo $[a,b]$ se

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = 0, \quad m \neq n. \tag{2}$$

Conjuntos ortonormais A norma, ou comprimento $\|\mathbf{u}\|$, de um vetor $\mathbf{u}$ pode ser escrita em termos do produto interno. A expressão $(\mathbf{u},\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|^2$ é denominada como norma quadrada, sendo que a norma é $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}$. De modo similar, a **norma quadrada** de uma função ϕ_n é $\|\phi_n(x)\|^2 = (\phi_n, \phi_n)$, e assim a **norma**, ou o seu comprimento generalizado, é $\|\phi_n(x)\| = \sqrt{(\phi_n, \phi_n)}$. Em outras palavras, a norma quadrada e a norma de uma função ϕ_n em um conjunto ortogonal $\{\phi_n(x)\}$ são, respectivamente,

$$\|\phi_n(x)\|^2 = \int_a^b \phi_n^2(x)\,dx \quad \text{e} \quad \|\phi_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b \phi_n^2(x)\,dx}. \tag{3}$$

Se $\{\phi_n(x)\}$ for um conjunto ortogonal de funções no intervalo $[a,b]$ com a propriedade de que $\|\phi_n(x)\| = 1$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, então $\{\phi_n(x)\}$ é dito ser um **conjunto ortonormal** no intervalo.

Exemplo 1 Conjunto ortogonal de funções

Mostre que o conjunto $\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots\}$ é ortogonal no intervalo $[-\pi, \pi]$.

Solução Se identificarmos $\phi_0(x) = 1$ e $\phi_n(x) = \cos nx$, precisamos então mostrar que $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_0(x)\phi_n(x)\,dx = 0$, $n \neq 0$, e $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = 0$, $m \neq n$. Temos, no primeiro caso,

$$(\phi_0, \phi_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0(x)\phi_n(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n}[\operatorname{sen} n\pi - \operatorname{sen}(-n\pi)] = 0, \quad n \neq 0,$$

e no segundo,

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]\,dx \quad \leftarrow \text{identidade trigonométrica}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(m+n)x}{m+n} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad m \neq n.$$

Exemplo 2 Normas

Determine as normas de cada função no conjunto ortogonal indicado no Exemplo 1.

■ **Solução** Para $\phi_0(x) = 1$, temos a partir de (3)

$$\|\phi_0(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$$

de modo que $\|\phi_0(x)\| = \sqrt{2\pi}$. Para $\phi_n(x) = \cos nx$, $n > 0$, segue-se que

$$\|\phi_n(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [1 + \cos 2nx]\, dx = \pi.$$

Portanto, para $n > 0$, $\|\phi_n(x)\| = \sqrt{\pi}$. ❑

Qualquer conjunto ortogonal de funções não nulas $\{\phi_n(x)\}$, $n = 0,1,2,...$, pode ser *normalizado* – isto é, ser transformado em um conjunto ortonormal – dividindo-se cada função por sua norma. Decorre dos Exemplos 1 e 2 que o conjunto

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots\right\}$$

é ortonormal no intervalo $[-\pi,\pi]$.

Analogia com vetores Faremos mais uma analogia entre vetores e funções. Suponha $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ como sendo três vetores não nulos mutuamente ortogonais em três dimensões. Tal conjunto ortogonal pode ser utilizado como uma base em três dimensões; isto é, qualquer vetor tridimensional pode ser escrito como uma combinação linear

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3, \tag{4}$$

onde c_i, $i = 1,2,3$, são escalares chamados de componentes do vetor. Cada componente c_i pode ser escrita em termos de $\mathbf{u}$ e o vetor correspondente $\mathbf{v}_i$. Para vermos isso, calculamos o produto interno de (4) com $\mathbf{v}_1$:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) = c_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) + c_2(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) + c_3(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1) = c_1\|\mathbf{v}_1\|^2 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0.$$

Logo,
$$c_1 = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1)}{\|\mathbf{v}_1\|^2}.$$

De modo similar, temos que as componentes c_2 e c_3 são dadas por

$$c_2 = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_2)}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \quad \text{e} \quad c_3 = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_3)}{\|\mathbf{v}_3\|^2}.$$

Portanto, (4) pode ser expressa como

$$\mathbf{u} = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1)}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_2)}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 + \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_3)}{\|\mathbf{v}_3\|^2}\mathbf{v}_3 = \sum_{n=1}^{3}\frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_n)}{\|\mathbf{v}_n\|^2}\mathbf{v}_n. \tag{5}$$

Expansão em séries ortogonais Considere $\{\phi_n(x)\}$ como sendo um conjunto ortogonal infinito de funções em um intervalo $[a,b]$. Perguntamos: se $y = f(x)$ for uma função definida no intervalo $[a,b]$, é possível determinar um conjunto de coeficientes c_n, $n = 0, 1, 2,...$, para o qual

$$f(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) + \cdots ? \tag{6}$$

Como na discussão anterior para se obter as componentes de um vetor, podemos determinar os coeficientes c_n utilizando o produto interno. Multiplicando (6) por $\phi_m(x)$ e integrando no intervalo $[a,b]$, obtemos

$$\int_a^b f(x)\phi_m(x)\,dx = c_0\int_a^b \phi_0(x)\phi_m(x)\,dx + c_1\int_a^b \phi_1(x)\phi_m(x)\,dx + \cdots + c_n\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)\,dx + \cdots$$

$$= c_0(\phi_0, \phi_m) + c_1(\phi_1, \phi_m) + \cdots + c_n(\phi_n, \phi_m) + \cdots.$$

Por ortogonalidade, cada termo no lado direito da última equação é nulo *exceto* quando $m = n$. Nesse caso, temos

$$\int_a^b f(x)\phi_n(x)\,dx = c_n\int_a^b \phi_n^2(x)\,dx.$$

Segue-se que os coeficientes exigidos são:

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)\,dx}{\int_a^b \phi_n^2(x)\,dx}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Em outras palavras,
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x), \tag{7}$$

onde
$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)\,dx}{\|\phi_n(x)\|^2}. \tag{8}$$

Com a notação de produto interno, (7) se escreve

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f, \phi_n)}{\|\phi_n(x)\|^2} \phi_n(x). \tag{9}$$

Logo, (9) é vista como sendo a função análoga do resultado vetorial indicado em (5).

Conjunto ortogonal/função de peso

Um conjunto de funções reais $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x),...\}$ é dito ser **ortogonal em relação à função de peso** $w(x)$ em um intervalo $[a,b]$ se

$$\int_a^b w(x)\phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = 0, \quad m \neq n.$$

A consideração usual é que $w(x) > 0$ no intervalo de ortogonalidade $[a,b]$. O conjunto $\{1,\cos x, \cos 2x,...\}$ no Exemplo 1 é ortogonal em relação à função de peso $w(x) = 1$ no intervalo $[-\pi,\pi]$.

Se $\{\phi_n(x)\}$ for ortogonal em relação a uma função de peso $w(x)$ no intervalo $[a,b]$, então multiplicar (6) por $w(x)\phi_n(x)$ e integrar resulta em

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)w(x)\phi_n(x)\,dx}{\|\phi_n(x)\|^2}, \tag{10}$$

onde

$$\|\phi_n(x)\|^2 = \int_a^b w(x)\phi_n^2(x)\,dx. \tag{11}$$

A série (7) com coeficientes definidos por (8) ou (10) é dita ser uma **expansão em séries ortogonais** de f ou uma **série de Fourier generalizada**.

■ **Conjuntos completos** O procedimento destacado para determinar os coeficientes c_n era *formal*; isto é, questões básicas sobre se uma expansão em série ortogonal tal como (7) é ou não de fato possível foram ignoradas. Ademais, para expandir f em uma série de funções ortogonais, certamente é necessário que f não seja ortogonal para cada ϕ_n do conjunto ortogonal $\{\phi_n(x)\}$. (Se f fosse ortogonal para todo ϕ_n, então $c_n = 0, n = 0,1,2,...$). Para evitar esse último problema, consideraremos pelo restante dessa discussão que um conjunto ortogonal é **completo**. Isso significa que a única função ortogonal contínua para cada membro do conjunto é a função zero.

A Série de Fourier

Introdução Vimos na seção anterior que se $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x),...\}$ for um conjunto de funções reais que seja ortogonal em um intervalo $[a,b]$ e se f for uma função definida no mesmo intervalo, então podemos expandir formalmente f em uma série ortogonal $c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + ...$ Nessa seção, expandiremos funções em termos de um conjunto ortogonal especial de funções trigonométricas.

Série trigonométrica No Problema 12 nos Exercícios 3.1, tivemos que demonstrar que o conjunto de funções trigonométricas

$$\left\{1, \cos\frac{\pi}{p}x, \cos\frac{2\pi}{p}x, \cos\frac{3\pi}{p}x, \ldots, \operatorname{sen}\frac{\pi}{p}x, \operatorname{sen}\frac{2\pi}{p}x, \operatorname{sen}\frac{3\pi}{p}x, \ldots\right\} \qquad (1)$$

era ortogonal no intervalo $[-p,p]$. Esse conjunto terá importância especial mais adiante na solução de determinados tipos de problemas de valor de contorno envolvendo equações diferenciais parciais lineares. Em tais aplicações, precisaremos expandir uma função f definida em $[-p,p]$ em uma série ortogonal constituída por funções trigonométricas em (1), isto é,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{p}x + b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\right). \qquad (2)$$

Os coeficientes $a_0, a_1, a_2,..., b_1, b_2,...$, podem ser determinados exatamente do mesmo modo da discussão geral da expansões em séries ortogonais nas páginas 108 e 109. Antes de procedermos, note que escolhemos escrever o coeficientes de 1 no conjunto (1) como $a_0/2$ em vez de a_0; trata-se de uma questão de conveniência pois assim a fórmula de a_n se reduz em a_0 para $n = 0$.

Integrando agora ambos os lados de (2) de $-p$ a p, obtemos

$$\int_{-p}^{p} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-p}^{p} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-p}^{p}\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx + b_n\int_{-p}^{p}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\,dx\right). \qquad (3)$$

Como $\cos(n\pi x/p)$ e $\operatorname{sen}(n\pi x/p)$, $n \geq 1$, são ortogonais em relação a 1 no intervalo, o lado direito de (3) se reduz a um único termo:

$$\int_{-p}^{p} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-p}^{p} dx = \frac{a_0}{2}x\Big|_{-p}^{p} = pa_0.$$

Resolver em relação a a_0 resulta em

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx. \qquad (4)$$

Agora, multiplicamos (2) por $\cos(m\pi x/p)$ e integramos:

$$\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{m\pi}{p}x\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx + b_n\int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\,\text{sen}\frac{n\pi}{p}x\,dx\right). \quad (5)$$

Por ortogonalidade, temos

$$\int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\,dx = 0, \quad m > 0, \qquad \int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\,\text{sen}\frac{n\pi}{p}x\,dx = 0$$

e

$$\int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ p, & m \neq n. \end{cases}$$

Assim, (5) se reduz para $\displaystyle\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx = a_n p,$

e assim

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx. \quad (6)$$

Finalmente, se multiplicarmos (2) por sen($m\pi x/p$), integrarmos e fizermos uso dos resultados

$$\int_{-p}^{p} \operatorname{sen}\frac{m\pi}{p}x\,dx = 0, \quad m > 0, \qquad \int_{-p}^{p} \operatorname{sen}\frac{m\pi}{p}x \operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\,dx = 0$$

e

$$\int_{-p}^{p} \operatorname{sen}\frac{m\pi}{p}x \operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ p, & m \neq n, \end{cases}$$

obtemos

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\,dx. \tag{7}$$

A série trigonométrica (2) com coeficientes a_0, a_n e b_n definida por (4), (6) e (7), respectivamente, é dita ser a **série de Fourier** da função f. Os coeficientes obtidos a partir de (4), (6) e (7) são referidos como os **coeficientes de Fourier** de f.

Ao determinar os coeficientes a_0, a_n e b_n, consideramos que f era integrável no intervalo e que (2), assim como a série obtida pela multiplicação de (2) por cos($m\pi x/p$), convergia de tal modo a permitir a integração termo a termo. Até que (2) seja mostrada como sendo convergente para uma dada função f, o sinal de igualdade não deve ser considerado em um sentido estrito ou literal. Alguns textos usam o símbolo $\sim$ no lugar de $=$. Partindo do fato de que a maioria das funções nas aplicações é de um tipo que garante a convergência da série, utilizaremos o símbolo de igualdade. A seguir, resumimos os resultados:

A **série de Fourier** de uma função f definida em um intervalo $(-p,p)$ é definida como

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{p}x + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\right), \tag{8}$$

onde

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx \tag{9}$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx \tag{10}$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\,dx. \tag{11}$$

Exemplo 1 Expansão em uma série de Fourier

Expanda $$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \pi - x, & 0 \le x < \pi \end{cases} \qquad (12)$$

em uma série de Fourier.

Solução O gráfico de f está indicado na Figura 3.1. Com $p = \pi$, temos a partir de (9) e (10) que

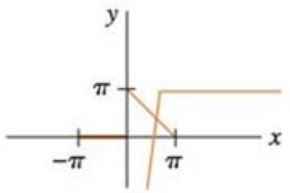


Figura 3.1 Função f no Exemplo 1.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(\pi - x)\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} nx\,dx\right]$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\,\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{-\cos n\pi + 1}{n^2\pi} \qquad \leftarrow \cos n\pi = (-1)^n$$

$$= \frac{1 - (-1)^n}{n^2\pi}.$$

De modo similar, temos a partir de (11) que

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\operatorname{sen} nx\,dx = \frac{1}{n}.$$

Portanto $$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1 - (-1)^n}{n^2\pi}\cos nx + \frac{1}{n}\operatorname{sen} nx\right\}. \qquad (13)$$ ❑

Séries de Fourier do Co-Seno e Seno

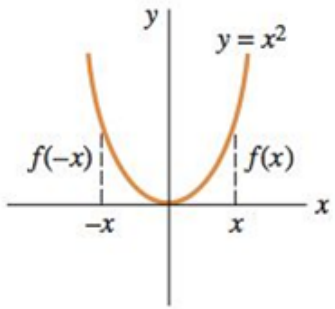


Figura 3.4 Função par.

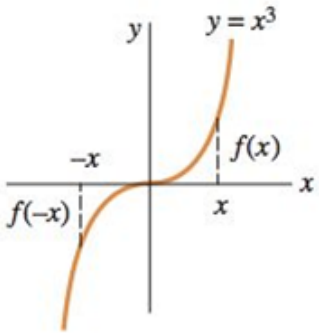


Figura 3.5 Função ímpar.

■ **Revisão** O esforço despendido para o cálculo dos coeficientes a_0, a_n e b_n para expandir uma função f em uma série de Fourier é significativamente reduzido quando f for uma função par ou uma função ímpar. Uma função f é:

$$\textbf{par} \text{ se } f(-x) = f(x) \qquad \text{e} \qquad \textbf{ímpar} \text{ se } f(-x) = -f(x).$$

Em um intervalo simétrico tal como $(-p, p)$, o gráfico de uma função par tem simetria em relação ao eixo y, enquanto que o gráfico de uma função ímpar tem simetria em relação à origem.

■ **Funções par e ímpar** A origem das palavras *par* e *ímpar* vem do fato de que os gráficos de funções polinomiais constituídas apenas por potências pares de x são simétricos em relação ao eixo y, enquanto que os gráficos de polinômios constituídos apenas por potências ímpares de x são simétricos em relação à origem. Por exemplo,

$$\underset{\downarrow \text{inteiro par}}{f(x) = x^2} \text{ é par pois } f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

$$\underset{\downarrow \text{inteiro ímpar}}{f(x) = x^3} \text{ é ímpar pois } f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

Veja as Figuras 3.4 e 3.5. As funções trigonométricas co-seno e seno são funções par e ímpar, respectivamente, pois $\cos(-x) = \cos x$ e $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$. As funções exponenciais $f(x) = e^x$ e $f(x) = e^{-x}$ não são ímpar nem par.

Propriedades das funções par/ ímpar

(a) O produto de duas funções pares é par.

(b) O produto de duas funções ímpares é ímpar.

(c) O produto de uma função par por uma função ímpar é ímpar.

(d) A soma (diferença) de duas funções pares é par.

(e) A soma (diferença) de duas funções ímpares é ímpar.

(f) Se f for par, então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.

(g) Se f for ímpar, então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Demonstração de (b) Consideremos que f e g sejam funções ímpares. Então, temos $f(-x) = -f(x)$ e $g(-x) = -g(x)$. Se definirmos o produto de f e g como $F(x) = f(x)g(x)$, então

$$F(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x)g(x) = F(x).$$

Isso mostra que o produto F de duas funções ímpares é uma função par. As provas das propriedades restantes são deixadas como exercícios. Veja o Problema 52 nos Exercícios 3.3. ❑

Series do co-seno e do seno Se f for uma função par em $(-p, p)$, então, em vista das propriedades anteriores, os coeficientes (9), (10) e (11) da Seção 3.2 se tornam

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} \underbrace{f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x}_{\text{par}}\,dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} \underbrace{f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{p}x}_{\text{ímpar}}\,dx = 0.$$

De modo similar, quando f for ímpar no intervalo $(-p, p)$,

$$a_n = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad b_n = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{p}x\,dx.$$

Séries de Fourier do co-seno e do seno

(*i*) A série de Fourier de uma função par no intervalo $(-p, p)$ é a **série de co-senos**

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{p} x, \tag{1}$$

onde

$$a_0 = \frac{2}{p} \int_0^p f(x)\, dx \tag{2}$$

$$a_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x\, dx. \tag{3}$$

(*ii*) A série de Fourier de uma função ímpar no intervalo $(-p, p)$ é a **série de senos**

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{p} x, \tag{4}$$

onde

$$b_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{p} x\, dx. \tag{5}$$

Exemplo 1 Expansão em uma série de senos

Expanda $f(x) = x$, $-2 < x < 2$, em uma série de Fourier.

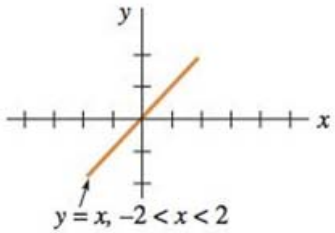


Figura 3.6 Função ímpar f no Exemplo 1.

■ **Solução** A inspeção da Figura 3.6 indica que a função dada é ímpar no intervalo $(-2, 2)$, e portanto expandimos f em uma série de senos. Com a identificação $2p = 4$, temos $p = 2$. Assim, (5), após integração por partes, é

$$b_n = \int_0^2 x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} x \, dx = \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Logo

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} x. \qquad (6)$$ ❑

A função no Exemplo 1 satisfaz as condições do Teorema 3.1. Consequentemente, a série (6) converge para a função em $(-2, 2)$ e a extensão periódica (de período 4) ilustrada na Figura 3.7.

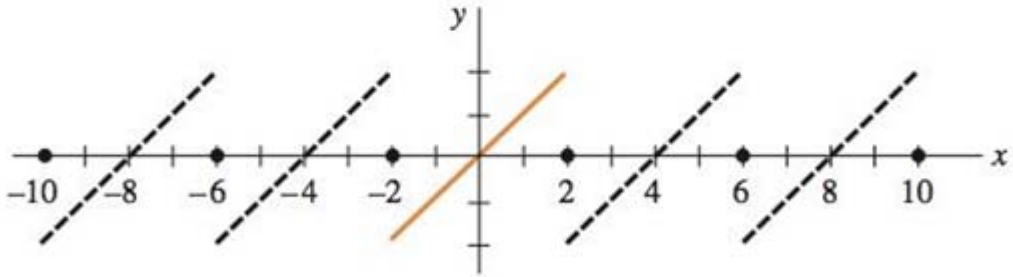


Figura 3.7 Extensão periódica da função f ilustrada na Figura 3.6.

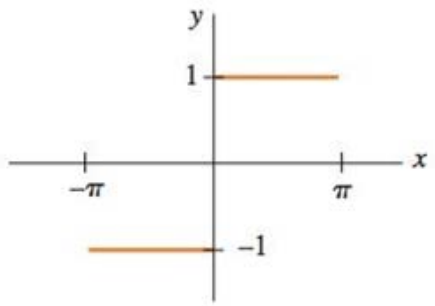


Figura 3.8 Função ímpar f no Exemplo 2.

Exemplo 2 Expansão em uma série de senos

A função $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$ mostrada na Figura 3.8 é ímpar no intervalo $(-\pi, \pi)$. Com $p = \pi$, temos a partir de (5)

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (1)\,\text{sen}\,nx\,dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{1-(-1)^n}{n},$$

e assim

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\,\text{sen}\,nx. \qquad (7)$$ ❑

Fenômeno de Gibbs Com o auxílio de um SAC, traçamos na Figura 3.9 os gráficos de $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$, $S_{15}(x)$ das somas parciais dos termos não nulos de (7). Conforme visto na Figura 3.9(d), o gráfico de $S_{15}(x)$ tem oscilações pronunciadas próximo das descontinuidades em $x = 0$, $x = \pi$, $x = -\pi$ e assim por diante. Esse "sobreimpulso" (em inglês, *overshooting*) pelas somas parciais S_N a partir dos valores funcionais próximos a um ponto de descontinuidade não se suavizam, porém permanecem constantes, mesmo quando o valor N é considerado grande. Esse comportamento de uma série de Fourier próxima de um ponto no qual f é descontínua é conhecido como **fenômeno de Gibbs**.

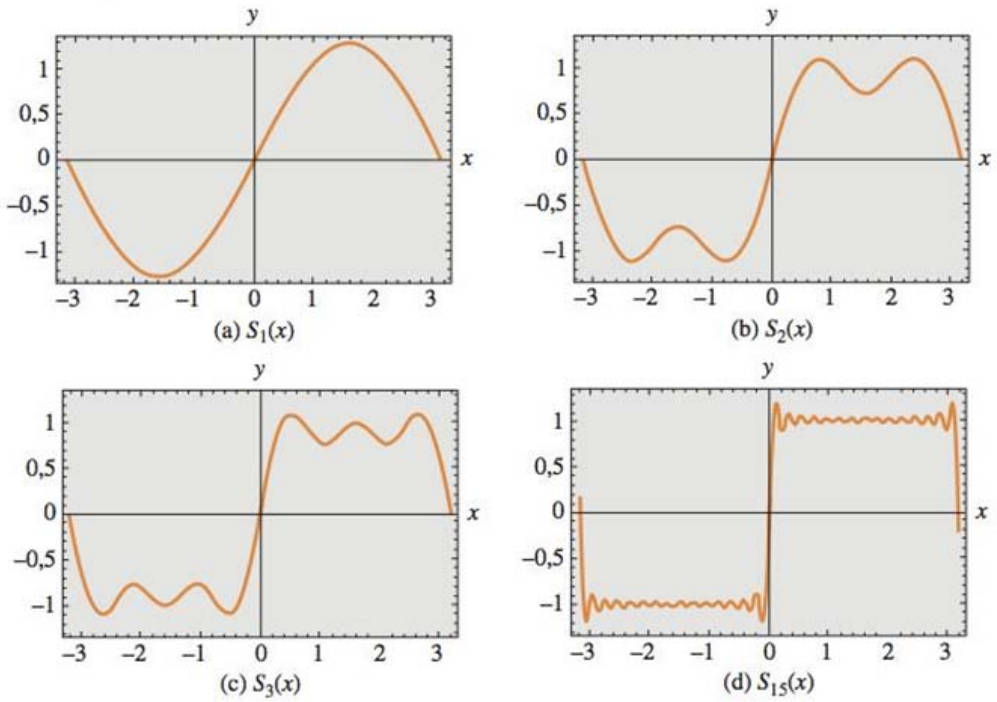


Figura 3.9 Somas parciais de séries de senos (7) em $(-\pi, \pi)$.

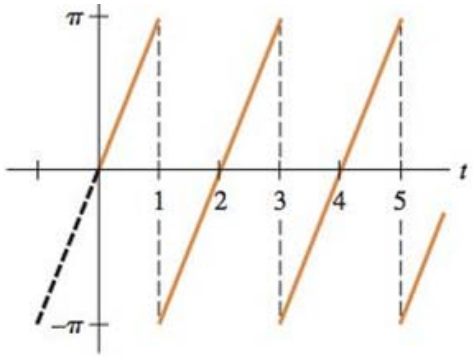


Figura 3.15 Função forçante periódica f no Exemplo 4.

Exemplo 4 Solução particular de uma ED

Um sistema massa mola não amortecido, em que a massa $m = \frac{1}{16}$ kg e a constante de mola $k = 4$ N/m, recebe a força periódica externa $f(t)$ de período 2 mostrada na Figura 3.15. Apesar da força $f(t)$ atuar no sistema para $t > 0$, note que se estendermos o gráfico da função para o eixo negativo t mantendo o período 2, obteremos uma função ímpar. Em termos práticos, isso significa que precisamos apenas da expansão de senos em meia escala de $f(t) = \pi t$, $0 < t < 1$. Com $p = 1$, decorre de (5) e da integração por partes que

$$b_n = 2\int_0^1 \pi t \operatorname{sen} n\pi t\, dt = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

A partir de (11), a equação diferencial do movimento é vista como sendo

$$\frac{1}{16}\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} n\pi t. \tag{13}$$

Para obtermos uma solução particular $x_p(t)$ de (13), substituímos (12) na equação e igualamos os coeficientes de sen $n\pi t$. Isso resulta em

$$\left(-\frac{1}{16}n^2\pi^2 + 4\right)B_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \quad \text{ou} \quad B_n = \frac{32(-1)^{n+1}}{n(64 - n^2\pi^2)}.$$

Assim

$$x_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32(-1)^{n+1}}{n(64 - n^2\pi^2)} \operatorname{sen} n\pi t. \tag{14}$$ ❑

Observe na solução (14) que não existem inteiros $n \geq 1$ para os quais o denominador $64 - n^2\pi^2$ de B_n seja zero. Em geral, se *houver* um valor de n, por exemplo N, para o qual $N\pi/p = \omega$, onde $\omega = \sqrt{k/m}$, então o sistema descrito por (11) estará em um estado de ressonância pura. Em outras palavras, temos ressonância pura se a expansão em série de Fourier da força excitadora $f(t)$ contiver um termo sen $(N\pi/L)t$ (ou cos $(N\pi/L)t$) que tenha a mesma frequência das oscilações livres.

É claro que se a extensão periódica $2p$ da força excitadora f no eixo t negativo resultar em uma função par, então expandiremos f em uma série de co-senos.