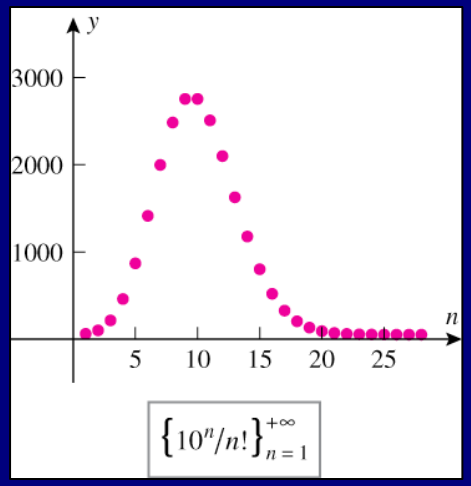
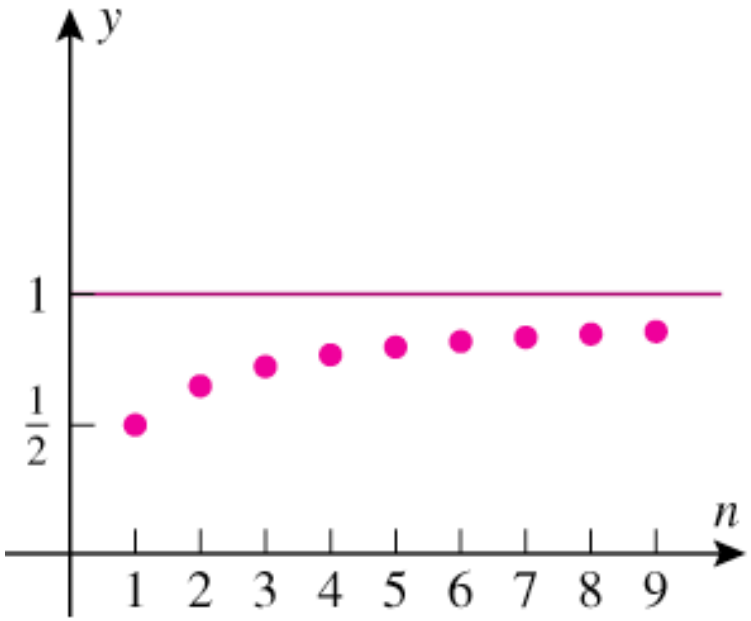


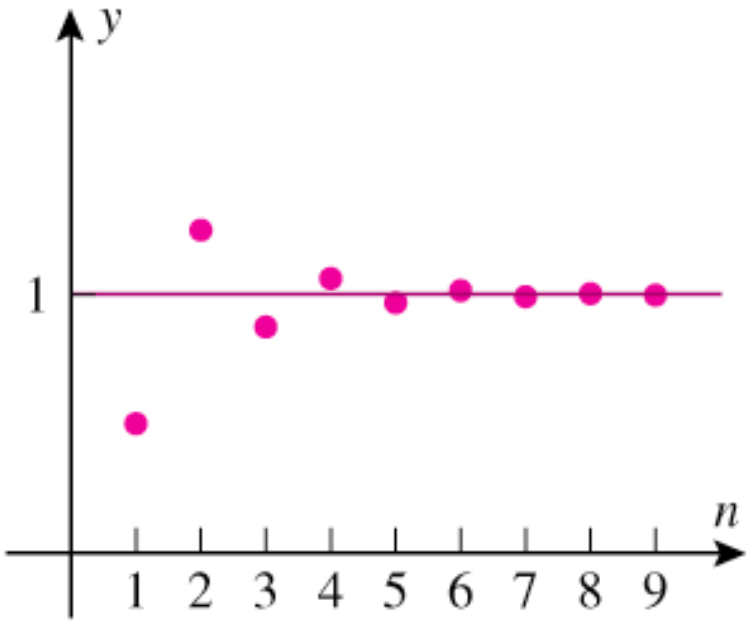
IV– Sequências e Séries

Obra de Referência: *Cálculo*, vol 2, Howard Anton

10.1.1 DEFINIÇÃO Uma ***seqüência*** é uma função cujo domínio é um conjunto de inteiros. Especificamente, consideramos a expressão $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ como sendo uma notação alternativa para a função $f(n) = a_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.



$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$$



$$\left\{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n=1}^{+\infty}$$

► Exemplo 1 Em cada parte, determine o termo geral da seqüência.

(a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ (b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

(c) $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \ldots$ (d) $1, 3, 5, 7, \ldots$

Tabela 10.1.1

NÚMERO DE POSIÇÃO	1	2	3	4	⋯	n	⋯
TERMO	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	⋯	$\frac{n}{n+1}$	⋯

Solução (a) Na Tabela 10.1.1, os quatro termos conhecidos foram colocados abaixo de seu número de posição, donde vemos que o numerador é igual ao número de posição e o denominador é o número de posição mais 1. Isso sugere que o enésimo termo tem o numerador n e o denominador $n + 1$, conforme indicado na tabela. Assim, a seqüência pode ser expressa como

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

Tabela 10.1.2

NÚMERO DE POSIÇÃO	1	2	3	4	⋯	n	⋯
TERMO	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^4}$	⋯	$\frac{1}{2^n}$	⋯

Solução (b) Na Tabela 10.1.2, os denominadores dos quatro termos conhecidos foram expressos como potências de 2 e colocados abaixo do seu número de posição, donde vemos que o expoente no denominador é igual ao número de posição. Isso sugere que o denominador do enésimo termo é 2^n, conforme indicado na tabela. Assim, a seqüência pode ser expressa como

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$$

Solução (c) Esta seqüência é idêntica àquela da parte (a), exceto pelos sinais alternados. Assim, o enésimo termo da seqüência pode ser obtido multiplicando-se o enésimo termo da parte (a) por $(-1)^{n+1}$. Este fator produz corretamente os sinais alternados, uma vez que seus valores sucessivos, começando com $n = 1$, são 1, −1, 1, −1,.... Assim, a seqüência pode ser escrita como

$$\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \ldots, (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}, \ldots$$

Tabela 10.1.3

NÚMERO DE POSIÇÃO	1	2	3	4	⋯	n	⋯
TERMO	1	3	5	7	⋯	$2n-1$	⋯

Solução (d) Na Tabela 10.1.3, os denominadores dos quatro termos conhecidos foram colocados abaixo de seus números de posição, donde vemos que cada termo é 1 a menos do que o dobro do seu número de posição. Isso sugere que o enésimo termo da seqüência é $2n - 1$, conforme indicado na tabela. Assim, a seqüência pode ser expressa como

$$1, 3, 5, 7, \ldots, 2n - 1, \ldots \blacktriangleleft$$

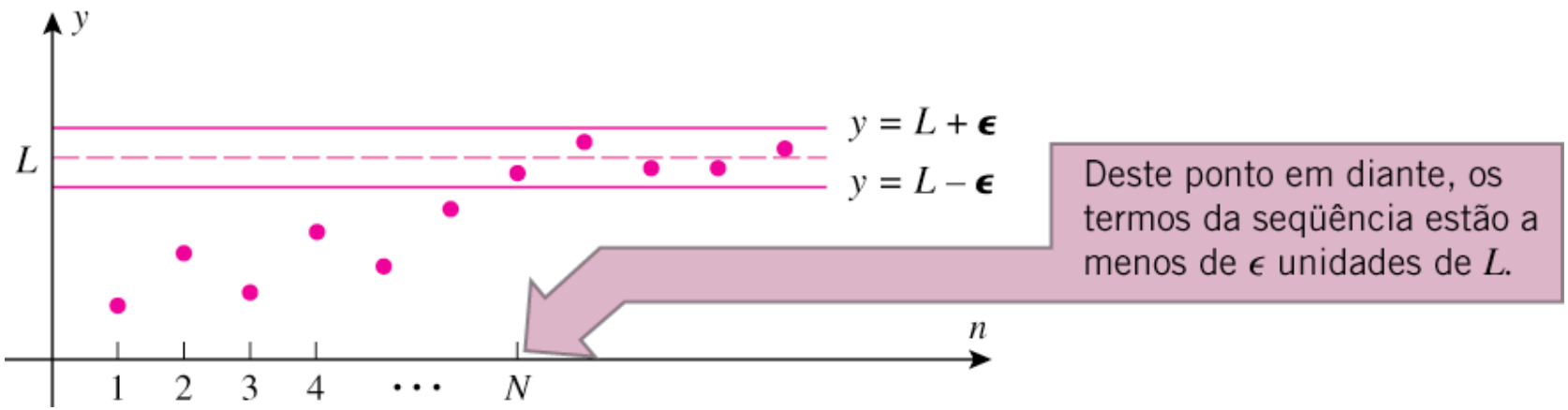
SEQÜÊNCIA	NOTAÇÃO COM CHAVES
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$	$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$
$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$	$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$
$\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \ldots, (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}, \ldots$	$\left\{(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$
$1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1, \ldots$	$\{2n-1\}_{n=1}^{+\infty}$

Limite de uma Sequência

10.1.2 DEFINIÇÃO Dizemos que uma seqüência $\{a_n\}$ ***converge*** para o ***limite*** L se dado qualquer $\epsilon > 0$, existir um número inteiro positivo N, tal que $|a_n - L| < \epsilon$ para $n \geq N$. Nesse caso, escrevemos

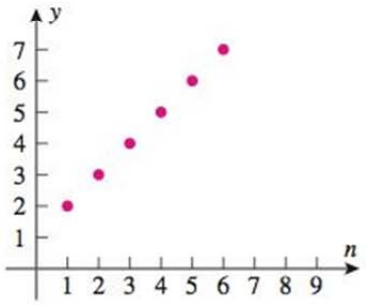
$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L$$

Dizemos que uma seqüência ***diverge*** quando não convergir para algum limite finito.

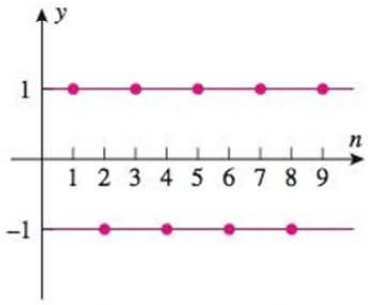


Limite de uma Sequência

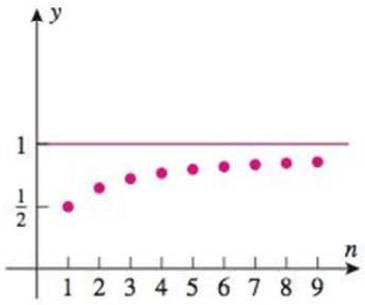
- Os termos na seqüência $\{n+1\}$ crescem sem cota.
- Os termos na seqüencia $\{(-1)^{n+1}\}$ oscilam entre -1 e 1.
- Os termos na seqüência $\{n/(n+1)\}$ crescem em direção a um "valor limite" de 1.
- Os termos na seqüência $\left\{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ também tendem a um "valor limite" de 1, mas o fazem de forma oscilatória.



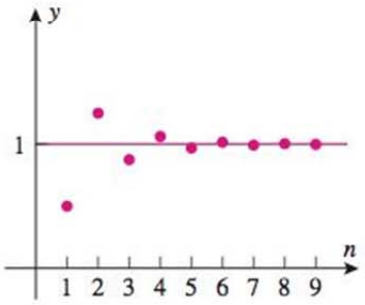
$\{n+1\}_{n=1}^{+\infty}$



$\{(-1)^{n+1}\}_{n=1}^{+\infty}$



$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$



$\left\{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n=1}^{+\infty}$

Propriedades

10.1.3 **TEOREMA** *Suponha que as seqüências* $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ *convirjam respectivamente para* L_1 *e* L_2 *e que* c *seja uma constante. Então,*

(a) $\lim_{n \to +\infty} c = c$

(b) $\lim_{n \to +\infty} ca_n = c \lim_{n \to +\infty} a_n = cL_1$

(c) $\lim_{n \to +\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \to +\infty} a_n + \lim_{n \to +\infty} b_n = L_1 + L_2$

(d) $\lim_{n \to +\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \to +\infty} a_n - \lim_{n \to +\infty} b_n = L_1 - L_2$

(e) $\lim_{n \to +\infty} (a_n b_n) = \lim_{n \to +\infty} a_n \cdot \lim_{n \to +\infty} b_n = L_1 L_2$

(f) $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \to +\infty} a_n}{\lim_{n \to +\infty} b_n} = \frac{L_1}{L_2} \quad (se\ L_2 \neq 0)$

Limite de uma Sequência

► **Exemplo 3** Em cada parte, determine se a seqüência converge ou diverge. Se convergir, encontre o limite.

(a) $\left\{\dfrac{n}{2n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ (b) $\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{n}{2n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$

(c) $\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ (d) $\{8-2n\}_{n=1}^{+\infty}$

Solução (a) Dividindo por n o numerador e o denominador, obtemos

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2+1/n}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}1}{\lim\limits_{n\to+\infty}(2+1/n)}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}1}{\lim\limits_{n\to+\infty}2+\lim\limits_{n\to+\infty}1/n}$$

$$=\frac{1}{2+0}=\frac{1}{2}$$

Assim, a seqüência converge para $\frac{1}{2}$.

Limite de uma Sequência

Solução (b) Essa seqüência é a mesma que a da parte (a), exceto pelo fator $(-1)^{n+1}$, que oscila entre +1 e −1. Assim, os termos nessa seqüência oscilam entre valores positivos e negativos, sendo que os termos com número de posição ímpar são idênticos aos da parte (a) e os termos com número de posição par são os negativos dos da parte (a). Uma vez que a seqüência na parte (a) tem um limite de $\frac{1}{2}$ tem-se que os termos de posição ímpar nesta seqüência tendem a $\frac{1}{2}$, enquanto que os termos de posição par tendem a $-\frac{1}{2}$. Logo, esta seqüência não tem limite – ela diverge.

Solução (c) Uma vez que $\lim_{n \to +\infty} 1/n = 0$, o produto $(-1)^{n+1}(1/n)$ oscila entre valores positivos e negativos, sendo que os termos de posição ímpar tendem a zero através de valores positivos e os termos de posição par tendem a zero através de valores negativos. Desse modo,

$$\lim_{n \to +\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 0$$

de modo que a seqüência converge para zero.

Solução (d) $\lim_{n \to +\infty} (8 - 2n) = -\infty$, portanto a sequência $\{8 - 2n\}_{n=1}^{+\infty}$ diverge. ◀

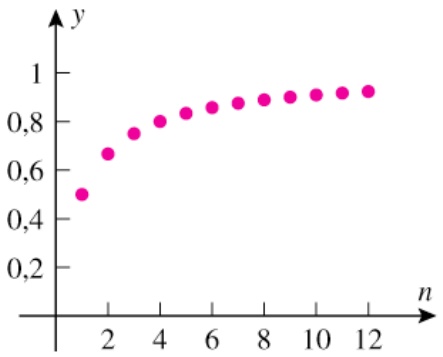
Sequências Monótonas

10.2.1 DEFINIÇÃO Uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ é denominada

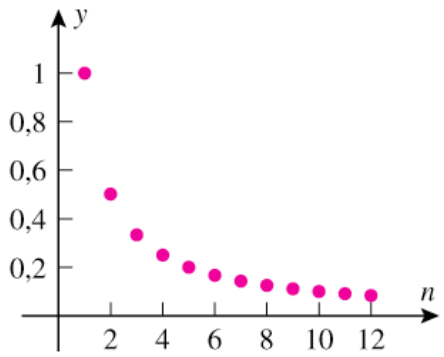
estritamente crescente se	$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < \cdots$
crescente se	$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$
estritamente decrescente se	$a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > \cdots$
decrescente se	$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$

Uma seqüência que é ou crescente ou decrescente é denominada ***monótona*** e uma seqüência que é ou estritamente crescente ou estritamente decrescente é denominada ***estritamente monótona***.

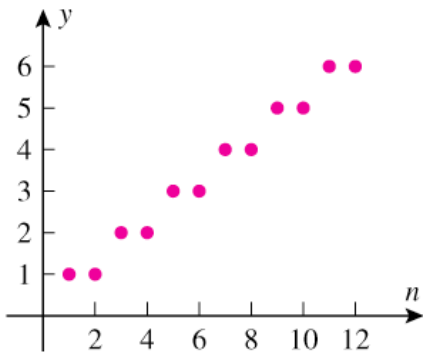
Exemplos de Sequências Monótonas



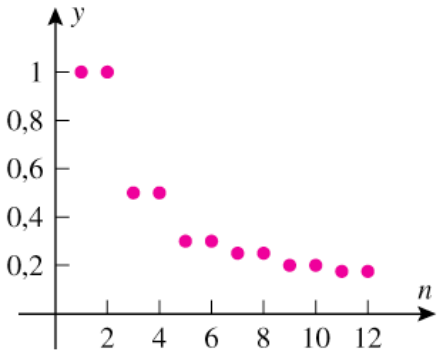
$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{+\infty}$$



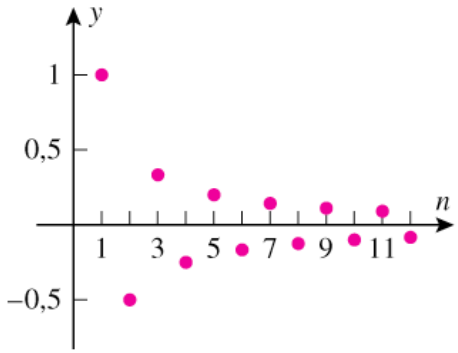
$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$$



1, 1, 2, 2, 3, 3, …



$$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots$$



$$\left\{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{+\infty}$$

Sequências Monótonas: Teste de Monotonicidade

TESTE DE MONOTONICIDADE

Freqüentemente é possível *adivinhar* se uma seqüência dada é monótona ou estritamente monótona escrevendo alguns de seus primeiros termos. Contudo, para termos certeza que nosso palpite está correto, devemos fornecer um argumento matemático preciso. A Tabela 10.2.2 fornece duas maneiras de fazer isso, uma baseada na diferença de dois termos sucessivos e a outro na razão de termos sucessivos. Nesse último caso está implícito que os termos são positivos. Devemos mostrar que as condições especificadas valem para *todos* pares de termos sucessivos.

Tabela 10.2.2

DIFERENÇA ENTRE TERMOS SUCESSIVOS	RAZÃO DE TERMOS SUCESSIVOS	CLASSIFICAÇÃO
$a_{n+1} - a_n > 0$	$a_{n+1}/a_n > 1$	Estritamente crescente
$a_{n+1} - a_n < 0$	$a_{n+1}/a_n < 1$	Estritamente decrescente
$a_{n+1} - a_n \geq 0$	$a_{n+1}/a_n \geq 1$	Crescente
$a_{n+1} - a_n \leq 0$	$a_{n+1}/a_n \leq 1$	Decrescente

Tabela 10.2.3

DERIVADA DE f PARA $x \geq 1$	CONCLUSÃO PARA A SEQÜÊNCIA COM $a_n = f(n)$
$f'(x) > 0$	Estritamente crescente
$f'(x) < 0$	Estritamente decrescente
$f'(x) \geq 0$	Crescente
$f'(x) \leq 0$	Decrescente

Sequências Monótonas: Teste de Monotonicidade

► Exemplo 1 Use diferenças de termos sucessivos para mostrar que

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

(Figura 10.2.2) é uma seqüência estritamente crescente.

Solução O padrão dos termos iniciais sugere que a seqüência é estritamente crescente. Para provar isso, seja

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

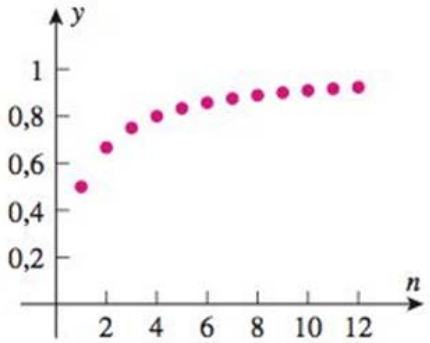
Podemos obter a_{n+1} substituindo n por $n+1$ na fórmula. Segue que

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

Assim, para $n \geq 1$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

o que prova que a seqüência é estritamente crescente. ◄



Sequências Monótonas: Teste de Monotonicidade

► **Exemplo 2** Mostre que a seqüência no Exemplo 1 é estritamente crescente usando razões de termos sucessivos.

Solução Conforme foi mostrado na solução do Exemplo 1

$$a_n = \frac{n}{n+1} \quad \text{e} \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

Assim,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)/(n+2)}{n/(n+1)} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} \qquad (1)$$

Como o numerador em (1) excede o denominador, tem-se que $a_{n+1}/a_n > 1$ para $n \geq 1$. Isso prova que a seqüência é estritamente crescente. ◄

Sequências Monótonas: Teste de Monotonicidade

O exemplo a seguir ilustra uma terceira técnica para determinar se uma seqüência é estritamente monótona.

► **Exemplo 3** Nos Exemplos 1 e 2, provamos que a seqüência

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

é estritamente crescente considerando a diferença e a razão de termos sucessivos. Alternativamente, podemos proceder da seguinte forma. Seja

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

de modo que o enésimo termo da seqüência é $a_n = f(n)$. A função f é crescente para $x \geq 1$, pois

$$f'(x) = \frac{(x+1)(1) - x(1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

Assim,

$$a_n = f(n) < f(n+1) = a_{n+1}$$

o que prova que a seqüência dada é estritamente crescente. ◄

Em geral, se $f(n) = a_n$ for o enésimo termo de uma seqüência, e se f for diferenciável para $x \geq 1$, então os resultados na Tabela 10.2.3 podem ser usados para investigar a monotonicidade da seqüência.

Sequências Monótonas: Teste de Monotonicidade

PROPRIEDADES VÁLIDAS A PARTIR DE UM CERTO TERMO

Às vezes, uma seqüência comporta-se erraticamente a princípio e depois se estabiliza em um certo padrão. Por exemplo, a sequência

$$9, -8, -17, 12, 1, 2, 3, 4, \ldots \qquad (2)$$

é estritamente crescente a partir do quinto termo, mas como um todo não pode ser classificada como estritamente crescente, devido ao comportamento errático dos seus quatro primeiros termos. Para descrever tais seqüências, vamos introduzir a seguinte terminologia.

10.2.2 DEFINIÇÃO Se ao descartar um número finito de termos do começo de uma seqüência for produzida uma seqüência com uma certa propriedade, então dizemos que a seqüência original tem essa propriedade ***a partir de um certo termo***.

Por exemplo, embora não possamos dizer que a seqüência (2) seja estritamente crescente, podemos afirmar que ela é estritamente crescente a partir de um certo termo.

Sequências Monótonas: Teste de Monotonicidade

► Exemplo 4 Mostre que a seqüência $\left\{\frac{10^n}{n!}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ é estritamente decrescente a partir de um certo termo.

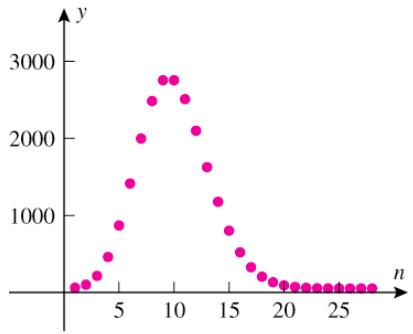
Solução Temos

$$a_n = \frac{10^n}{n!} \quad \text{e} \quad a_{n+1} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!}$$

portanto,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10^{n+1}/(n+1)!}{10^n/n!} = \frac{10^{n+1}n!}{10^n(n+1)!} = 10\frac{n!}{(n+1)n!} = \frac{10}{n+1} \qquad (3)$$

A partir de (3), $a_{n+1}/a_n < 1$ para todo $n \geq 10$, logo a seqüência é estritamente decrescente a partir de um certo termo, como é confirmado pelo gráfico na Figura 10.2.3. ◄



$\{10^n/n!\}_{n=1}^{+\infty}$

Séries Infinitas

10.3.1 DEFINIÇÃO Uma ***série infinita*** é uma expressão que pode ser escrita na forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k + \cdots$$ onde $\{u_k\}$ é uma sequência

Os números u_1, u_2, u_3,... são chamados ***termos*** da série.

10.3.2 DEFINIÇÃO Seja $\{s_n\}$ a seqüência das somas parciais da série

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k + \cdots$$

Se a seqüência $\{s_n\}$ convergir para um limite S, então dizemos que a série ***converge*** para S e que S é a ***soma*** da série. Denotamos isso escrevendo

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

$\{s_n\} = \{s_1, s_2 \ldots, s_n\}$

$s_1 = u_1$, $s_2 = u_1 + u_2$, $s_3 = s_2 + u_3$, $s_k = s_{k-1} + u_k$

Se a seqüência das somas parciais divergir, dizemos que a série ***diverge***. Uma série divergente não tem soma.

Como é impossível somar diretamente um número infinito de números, as somas de séries infinitas são definidas e calculadas por um processo indireto de limite. Para motivar a idéia básica, considere a decimal

$$0{,}3333\ldots \tag{1}$$

Isso pode ser visto como a série infinita

$$0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + \cdots$$

ou, de forma equivalente

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \cdots \tag{2}$$

Como (1) é a expansão decimal de $\frac{1}{3}$, qualquer definição razoável para a soma de uma série infinita deve fornecer $\frac{1}{3}$ para a soma em (2). Para obter uma tal definição, considere a seguinte seqüência de somas (finitas):

$$s_1 = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

$$s_2 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} = 0{,}33$$

$$s_3 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} = 0{,}333$$

$$s_4 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} = 0{,}3333$$

$$\vdots$$

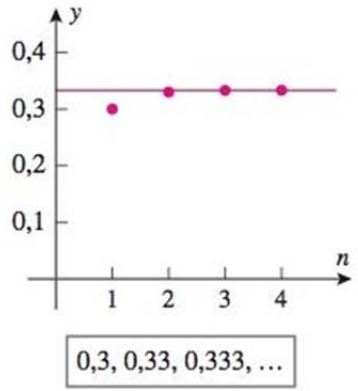


Figura 10.3.1

A seqüência de números $s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots$ (Figura 10.3.1) pode ser vista como uma sucessão de aproximações da "soma" da série infinita, que queremos que seja $\frac{1}{3}$. À medida que avançamos na seqüência, cada vez mais termos da série infinita são usados e a aproximação fica cada vez melhor, sugerindo que a soma desejada de $\frac{1}{3}$ deva ser o *limite* desta seqüência de aproximações.

Exemplo 1: Dada a série infinita

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$, encontrar os 4 primeiros termos da sequência de somas parciais $\{s_n\}$ e uma fórmula para s_n em termos de *n*.

$$s_1 = u_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$s_2 = s_1 + u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}$$

$$s_3 = s_2 + u_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4}$$

$$s_4 = s_3 + u_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{4}{5}$$

Por frações parciais: $u_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)}$

Logo: $u_1 = 1 - \frac{1}{2}; u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; u_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}; \ldots; u_{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}; u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

Então, como $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$, temos:

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Removendo os parênteses e combinando os termos, temos:

$$\boxed{s_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}}$$

Portanto, o resultado numérico de uma série infinita não é obtido pela simples adição de seus termos e sim pelo valor de convergência (limite) da sequência formada pelas somas parciais dos mesmos, se este existir. Se este limite não existir, a série é divergente e não tem soma.

Séries Geométricas

10.3.3 TEOREMA *Uma série geométrica*

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^k + \cdots \quad (a \neq 0)$$

converge se $|r| < 1$ *e diverge se* $|r| \geq 1$. *Se a série convergir, então a soma da série é*

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$$

Nestas séries, cada termo é obtido multiplicando-se o precedente por uma constante fixada, r, chamada razão da série.

$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^k + \cdots$ — $a = 1, r = 2$

$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots + \frac{3}{10^k} + \cdots$ — $a = \frac{3}{10}, r = \frac{1}{10}$

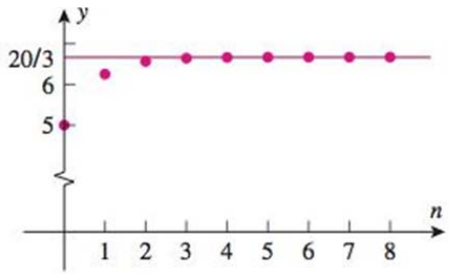
$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \cdots + (-1)^{k+1}\frac{1}{2^k} + \cdots$ — $a = \frac{1}{2}, r = -\frac{1}{2}$

$1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots$ — $a = 1, r = 1$

$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{k+1} + \cdots$ — $a = 1, r = -1$

$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^k + \cdots$ — $a = 1, r = x$

Exemplos



$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5}{4^k} = 5 + \frac{5}{4} + \frac{5}{4^2} + \cdots + \frac{5}{4^k} + \cdots$$

é uma série geométrica com $a = 5$ e $r = \frac{1}{4}$. Como $|r| = \frac{1}{4} < 1$, a série converge e a soma é

$$\frac{a}{1-r} = \frac{5}{1-\frac{1}{4}} = \frac{20}{3}$$

Encontre o número racional representado pela dízima periódica

$$0{,}784784784\ldots$$

Solução Podemos escrever

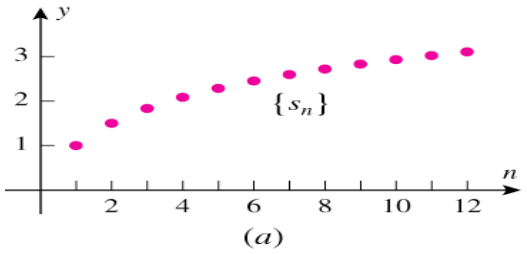
$$0{,}784784784\ldots = 0{,}784 + 0{,}000784 + 0{,}000000784 + \cdots$$

portanto a dízima dada é a soma de uma série geométrica com $a = 0{,}784$ e $r = 0{,}001$. Assim,

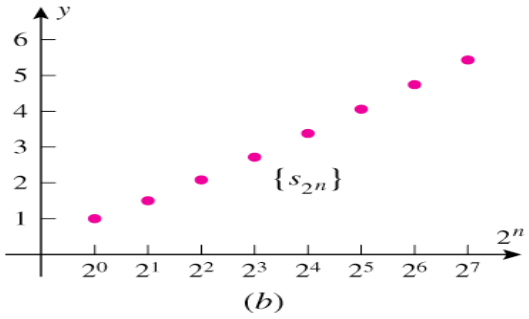
$$0{,}784784784\ldots = \frac{a}{1-r} = \frac{0{,}784}{1-0{,}001} = \frac{0{,}784}{0{,}999} = \frac{784}{999} \blacktriangleleft$$

Série Harmônica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$



(a)



(b)

Série de potências

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \cdots + c_k(x-x_0)^k + \cdots$$

Se *x* assume um valor, esta passa se torna uma série infinita de termos constantes.
Se $x_0 = 0$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_k x^k + \cdots$$

A questão agora é saber: *para que valores de x a série converge?*

Para cada valor de *x* para o qual a série converge esta representa o número que é a soma da série.

A série pode, portanto, definir uma função de *x*, ou seja, onde o domínio é o conjunto dos números Reais, tais que a série seja convergente.

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ → função cujo domínio são todos os valores de *x* para os quais a série converge.

Obs.: a derivação e a integração são aplicáveis a este tipo de função.

Série de Taylor:

Seja *f* uma função da variável x, definida a partir de uma série de potências, temos:

f(x) = $$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots + c_k(x - x_0)^k + \cdots$$

Se f(x) possui derivadas de todas as ordens num dado domínio (-R,R), dizemos que é infinitamente diferenciável em (-R,R).

Assim, derivando-se sucessivamente f(x) para um dado valor x_o, chega-se à seguinte constatação (ver demonstração na próxima página):

$$c_k = \frac{f^{(k)}(x_o)}{k!}$$

donde:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \cdots$$

Coeficientes da Série de Taylor:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x - x_0) + 3c_3(x - x_0)^2 + 4c_4(x - x_0)^3 + \ldots kc_k(x - x_0)^{k-1} + \ldots$$

$$f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x - x_0) + 3 \cdot 4c_4(x - x_0)^2 + \ldots (k-1) \cdot kc_k(x - x_0)^{k-2} + \ldots$$

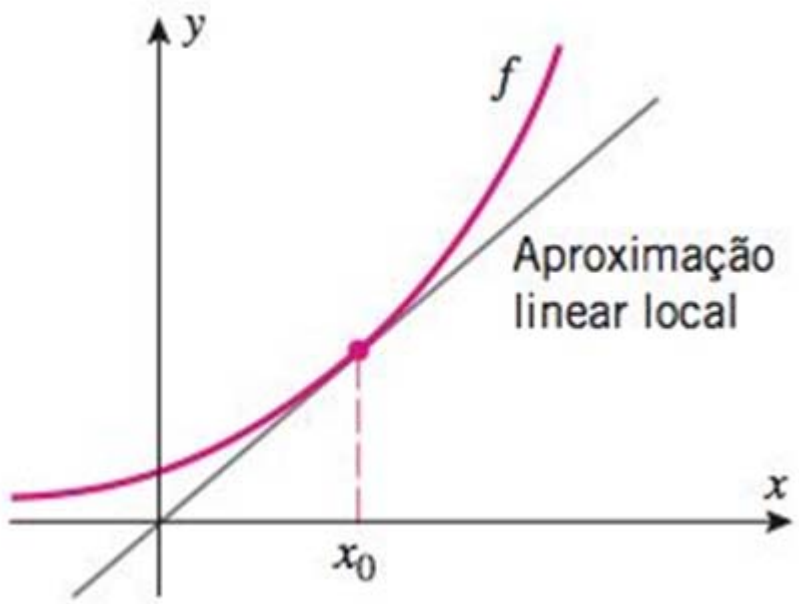
$$f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x - x_0) + \ldots (k-2) \cdot (k-1) \cdot kc_k(x - x_0)^{k-3} + \ldots$$

Tomando $x = x_0$, temos:

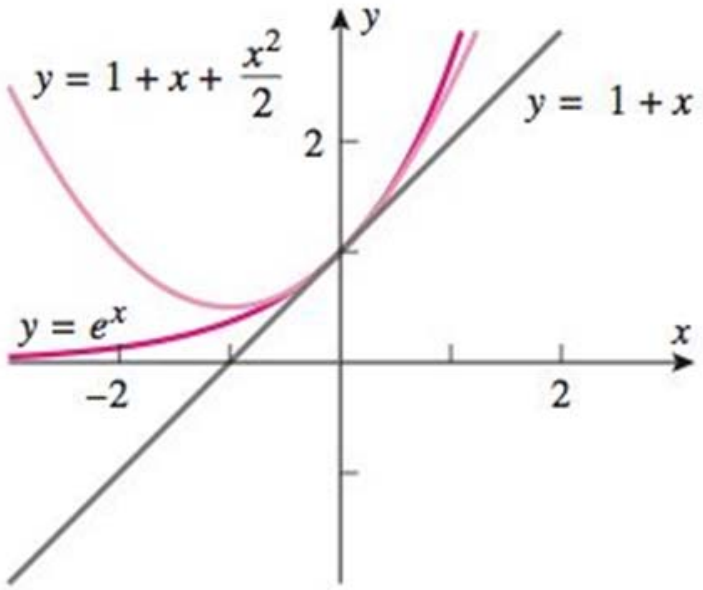
$$c_k = \frac{f^{(k)}(x_o)}{k!}$$

Ou seja, qualquer função pode ser representada por uma Série de Taylor associada, chamando este processo de desenvolvimento de uma função em Série de Taylor.

Exemplos:



$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

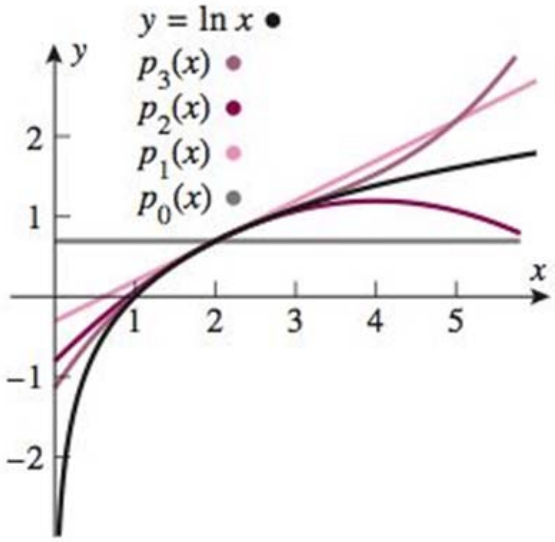


$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$e^x \approx 1 + x$$

Série de Taylor para f(x)=lnx

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \ln x & f(2) &= \ln 2 \\
f'(x) &= 1/x & f'(2) &= 1/2 \\
f''(x) &= -1/x^2 & f''(2) &= -1/4 \\
f'''(x) &= 2/x^3 & f'''(2) &= 1/4
\end{aligned}
$$



$$p_0(x) = f(2) = \ln 2$$

$$p_1(x) = f(2) + f'(2)(x-2) = \ln 2 + \tfrac{1}{2}(x-2)$$

$$p_2(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 = \ln 2 + \tfrac{1}{2}(x-2) - \tfrac{1}{8}(x-2)^2$$

$$p_3(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3$$

$$= \ln 2 + \tfrac{1}{2}(x-2) - \tfrac{1}{8}(x-2)^2 + \tfrac{1}{24}(x-2)^3$$

Série de MacLaurin:

Para o caso particular de $x_0=0$: $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

donde:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots$$

Ex: Série de MacLaurin de e^x

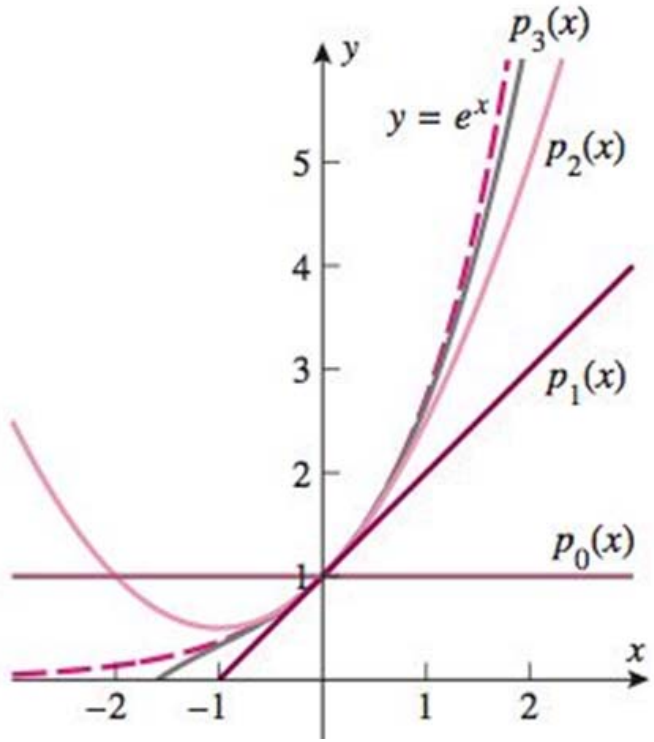
Sendo $f(x)= e^x$, segue que $f^{(k)}(x)=e^x$ para todo x.

Assim, $f^{(k)}(0)=1$ para todo k e, portanto:

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^k}{3!} + \ldots$$

CONCLUSÃO: Uma série de potências que representa uma função é única, de forma que duas funções com a mesma série são consideradas iguais.

Série de Maclaurin de e^x



$$p_0(x) = f(0) = 1$$

$$p_1(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + x$$

$$p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

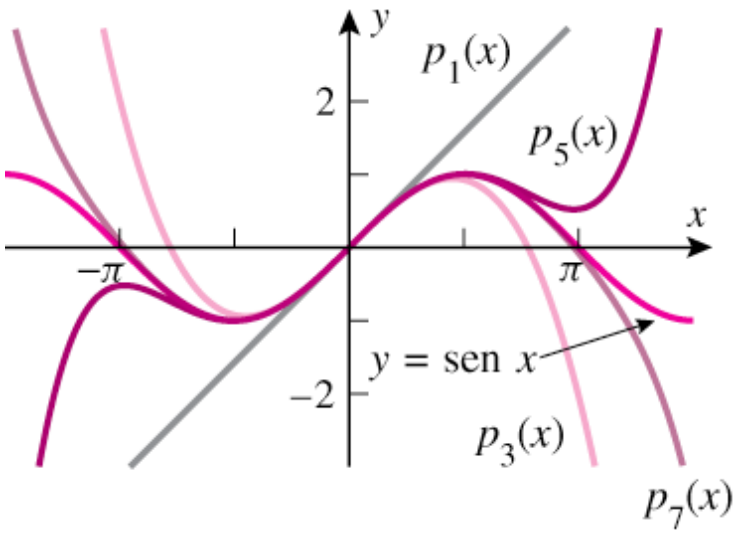
$$p_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

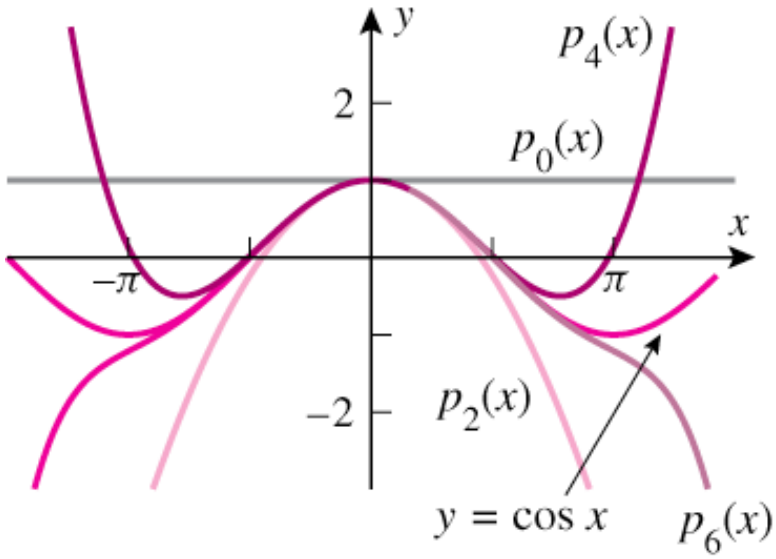
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \blacktriangleleft$$

Aproximação de sen(x) e cos(x)





Séries de MacLaurin Importantes

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad -1 < x < 1$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \qquad -1 < x < 1$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad -1 < x \leq 1$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad -1 \leq x \leq 1$$

$$\operatorname{senh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} x^k \qquad -1 < x < 1^* \quad (m \neq 0, 1, 2, \ldots)$$