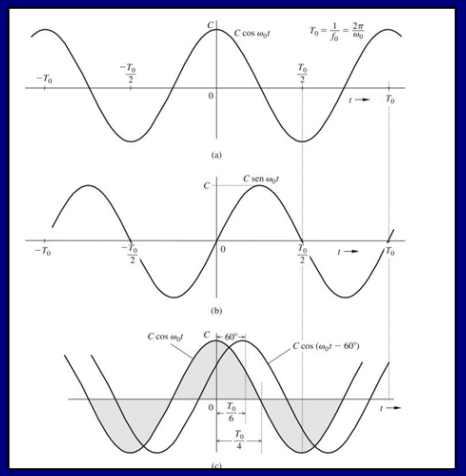


III – Funções Trigonométricas

Obra de referência: *Sinais e Sistemas*, B.P. Lathi

Considerando a função: $x(t) = C\cos(2\pi f_0 t + \theta)$,

temos que f_0 representa sua **frequência**, ou seja, o número de repetições da mesma na unidade de tempo (segundo). Unidade: Hz (ciclo por segundo).

Devido à sua natureza periódica: $\cos\varphi = \cos(\varphi + 2n\pi) \qquad n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$,

donde se define seu **período** (intervalo de repetição): $T_0 = \dfrac{1}{f_0}$

e o **ângulo de fase** Θ (em radianos)

Casos particulares:

(a) $x(t) = C\cos 2\pi f_0 t \qquad (\theta = 0)$

(b) $x(t) = C\cos(2\pi f_0 t - \pi/2) = C\,\text{sen}\,2\pi f_0 t \qquad (\theta = -\pi/2)$

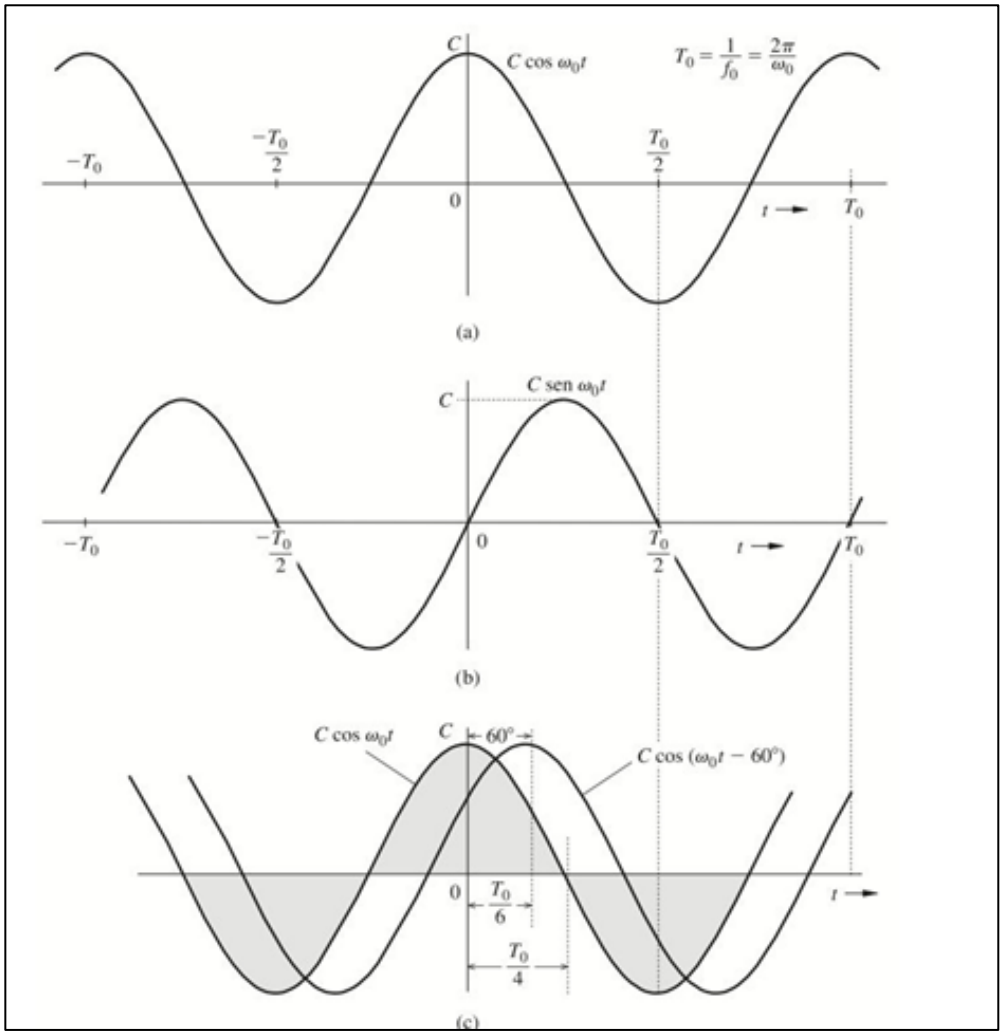
Torna-se conveniente utilizar a frequência em rad/s, o que leva à definição da **frequência angular**:

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

E assim: $\boxed{x(t) = C\cos(\omega_0 t + \theta)}$ $\qquad T_0 = \dfrac{1}{\omega_0/2\pi} = \dfrac{2\pi}{\omega_0} \qquad \omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$

Exemplo:

$$x(t) = C\cos(\omega_0 t - 60^\circ)$$



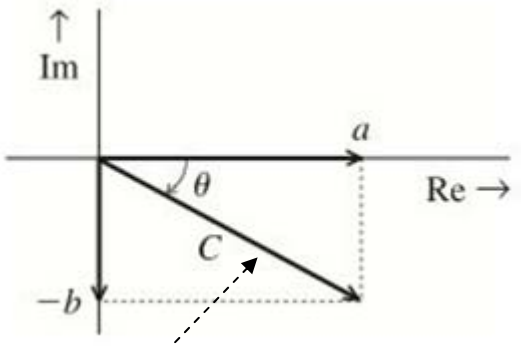
Decomposição de $x(t) = C\cos(2\pi f_0 t + \theta)$

$$C\cos(\omega_0 t + \theta) = C\cos\theta\,\cos\omega_0 t - C\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\omega_0 t$$
$$= a\cos\omega_0 t + b\,\text{sen}\,\omega_0 t$$

$$a = C\cos\theta \qquad \text{e} \qquad b = -C\,\text{sen}\,\theta$$

$$C = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-b}{a}\right)$$



Fasor

EXEMPLO B.6

Nos casos a seguir, expresse $x(t)$ como uma única senoide:

(a) $x(t) = \cos \omega_0 t - -\sqrt{3} \text{ sen } \omega_0 t$

(b) $x(t) = -3 \cos \omega_0 t + 4 \text{ sen } \omega_0 t$

(a) Neste caso, $a = 1$, $b = e\ -\sqrt{3}$, das Eqs. (B.23)

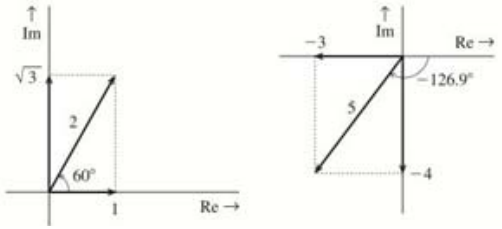
$$C = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = 60^\circ$$

Portanto,

$$x(t) = 2\cos(\omega_0 t + 60^\circ)$$

Podemos verificar este resultado desenhando os fasores correspondentes às duas senóides. A senoide cos $\omega_0 t$ é representada pelo fasor de comprimento unitário no ângulo zero com a horizontal. O fasor sen $\omega_0 t$ é representado pelo fasor unitário no ângulo de $-90°$ com a horizontal. Portanto, $-\sqrt{3}$ sen $\omega_0 t$ é representado pelo fasor de comprimento $-\sqrt{3}$ em 90° com a horizontal, como mostra do na Fig. B.8a. Os dois fasores somados resultam em um fasor de comprimento 2 em 60° com a horizontal (também mostrado na Fig. B.8a).



Alternativamente, observamos que $a - jb = 1 + j = 2e^{j\pi/3}$. Portanto, $C = 2$ e $\theta = \pi/3$.

Observe que o deslocamento de fase de $\pm\pi$ resulta na multiplicação de -1. Portanto, $x(t)$ também pode ser expressado, alternativamente, por

$$\begin{aligned} x(t) &= -2\cos(\omega_0 t + 60^\circ \pm 180^\circ) \\ &= -2\cos(\omega_0 t - 120^\circ) \\ &= -2\cos(\omega_0 t + 240^\circ) \end{aligned}$$

Na prática, o valor principal, ou seja, $-120°$ é preferido.

(b) Neste caso, $a = -3$, $b = 4$, e das Eqs. (B.23), temos

$$C = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{-3}\right) = -126{,}9^\circ$$

Observe que

$$\tan^{-1}\left(\frac{-4}{-3}\right) \neq \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53{,}1^\circ$$

Portanto,

$$x(t) = 5\cos(\omega_0 t - 126{,}9^\circ)$$

Este resultado é facilmente verificado no diagrama fasorial da Fig. B.8b. Alternativamente, $a - jb = -3 - j4 = 5e^{-j126{,}9^\circ}$. Logo, $C = 5$ e $\theta = -126{,}9°$.

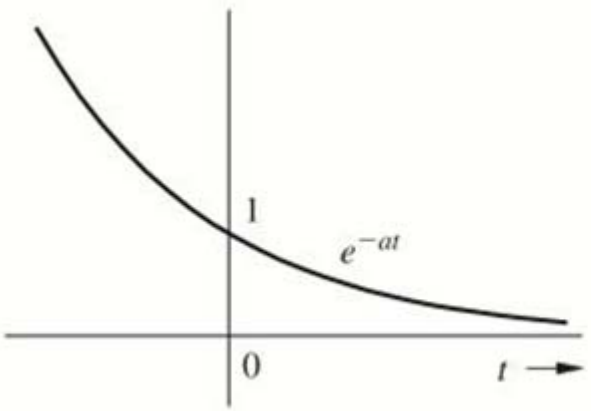
Identidade de Euler:

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\,\text{sen}\,\varphi$$
$$e^{-j\varphi} = \cos\varphi - j\,\text{sen}\,\varphi$$

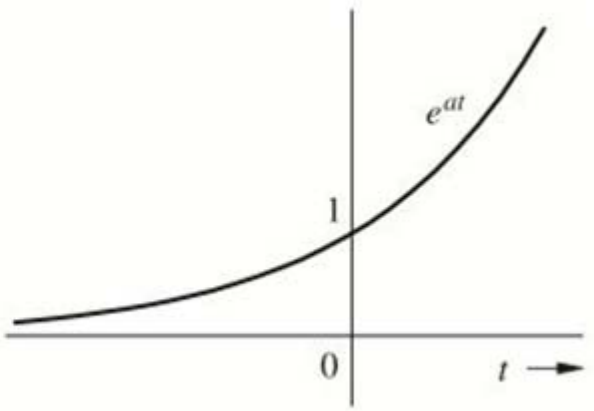
Obs: uso de j para representar $\sqrt{-1}$. Comum na área elétrica.

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi})$$
$$\text{sen}\,\varphi = \frac{1}{2j}(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})$$

Exponenciais Monotônicas:



(a)



(b)

Variação exponencial: $x(t) = Ae^{-at}\cos(\omega_0 t + \theta)$

$$x(t) = 4e^{-2t}\cos(6t - 60^\circ)$$

