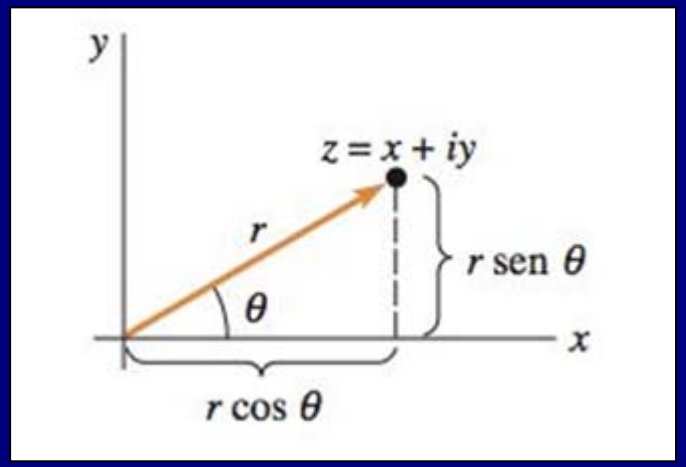


II – Funções de Variáveis Complexas

Obra de referência: Matemática Avançada para Engenharia, Dennis Zill

Conjuntos Numéricos:

(1) Números naturais → inteiros positivos (origem: tempos remotos)
Se *a* e *b* são números naturais, a soma *a* + *b* e o produto *a.b* são também números naturais
O conjunto de números é fechado sob as operações de adição e multiplicação (satisfaz a propriedade de fechamento).

(2) Números inteiros → inteiros positivos, negativos e o zero (Renascimento sec. XV)
Pode-se agora introduzir a operação inversa da adição; a subtração.
O conjunto dos números inteiros é fechado sob as operações de adição, multiplicação e subtração.

(3) Números racionais → números não inteiros (advento da agricultura)
Pode-se assim definir a operação inversa da multiplicação; a divisão.
O conjunto dos inteiros é um subconjunto dos números racionais.
O conjunto dos números racionais é fechado sob as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão (se for excluída a divisão por zero).

(4) Números irracionais → números não-racionais, isto é, não podem ser expressos como $\frac{a}{b}$
(Idade Moderna sec XVII) onde *a* e *b* são inteiros e b $\neq 0$ Ex: $\sqrt{2} = 1,41423..., \pi$

(5) Números reais → é o conjunto de todos os racionais e irracionais.
Representação gráfica dos números reais: pontos sobre uma reta.
Dados dois números reais *a* e *b*:

$$\begin{cases} (a,b) \Rightarrow a < x < b \text{ intervalo aberto} \\ [a,b] \Rightarrow a \leq x \leq b \text{ intervalo fechado} \end{cases}$$

x: variável real

Número Complexo: *Qualquer número da forma z=a + ib, onde a e b são números reais e i a unidade imaginária. (Gauss em 1799)*

$$\sqrt{-1} = ?? \quad \Rightarrow \quad \sqrt{-1} = i$$

Os números complexos $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ são **iguais**, $z_1 = z_2$, se $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ e $\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$.

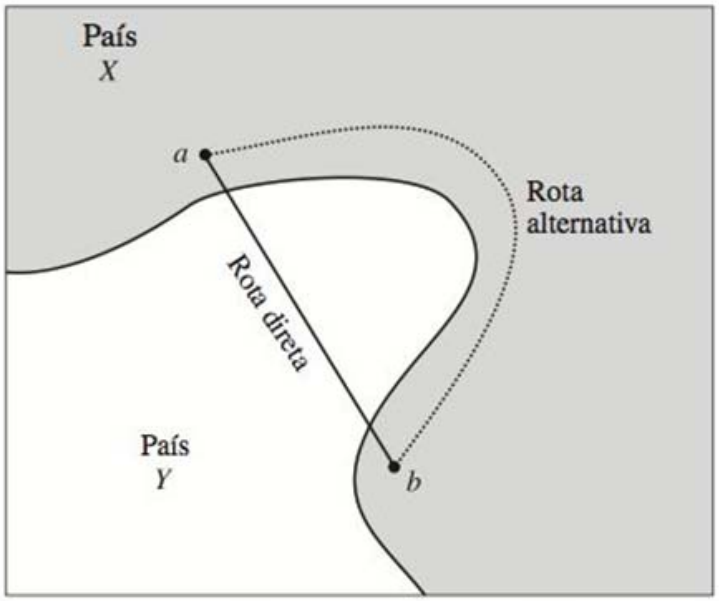


Figura B.1 A utilização de números complexos pode reduzir o trabalho.

Operações

Números complexos podem ser somados, subtraídos, multiplicados e divididos.

Adição:
$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

Subtração:
$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

Multiplicação:
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$
$$= x_1x_2 - y_1y_2 + i(y_1x_2 + x_1y_2)$$

Divisão:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$$
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Propriedades

As familiares leis comutativa, associativa e distributiva se aplicam aos números complexos.

Lei comutativa:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \\ z_1 z_2 = z_2 z_1 \end{cases}$$

Lei associativa:

$$\begin{cases} z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \\ z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3 \end{cases}$$

Lei distributiva: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

Exemplo 1 Adição e multiplicação

Se $z_1 = 2 + 4i$ e $z_2 = -3 + 8i$, determine (a) $z_1 + z_2$ e (b) $z_1 z_2$.

Solução (a) Somando as partes real e imaginária dos dois números, obtemos

$$(2 + 4i) + (-3 + 8i) = (2 - 3) + (4 + 8)i = -1 + 12i.$$

(b) Utilizando a lei distributiva, temos

$$\begin{aligned}(2 + 4i)(-3 + 8i) &= (2 + 4i)(-3) + (2 + 4i)(8i) \\ &= -6 - 12i + 16i + 32i^2 \\ &= (-6 - 32) + (16 - 12)i = -38 + 4i.\end{aligned}$$

Conjugado

$$\bar{z} = x - iy$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

$$z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x$$

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$$

$$z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy$$

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Exemplo 2 Divisão

Se $z_1 = 2 - 3i$ e $z_2 = 4 + 6i$, calcule (a) $\frac{z_1}{z_2}$ e (b) $\frac{1}{z_1}$.

Solução Nos dois itens desse exemplo, multiplicaremos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador e então utilizaremos (2).

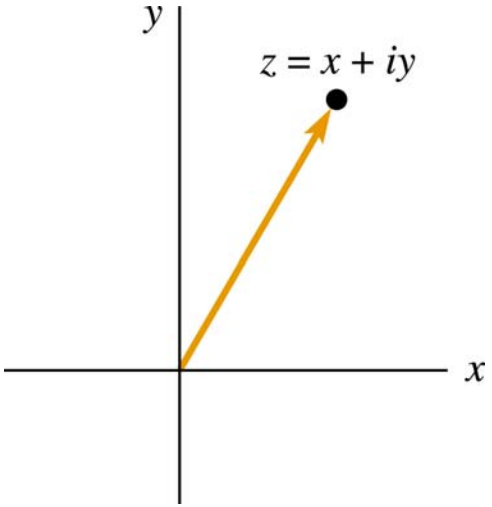
(a)
$$\frac{2-3i}{4+6i} = \frac{2-3i}{4+6i}\frac{4-6i}{4-6i} = \frac{8-12i-12i+18i^2}{16+36}$$

$$= \frac{-10-24i}{52} = -\frac{5}{26} - \frac{6}{13}i.$$

(b)
$$\frac{1}{2-3i} = \frac{1}{2-3i}\frac{2+3i}{2+3i} = \frac{2+3i}{4+9} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i.$$

Interpretação Geométrica

Um número complexo z=x+iy é determinado unicamente por um par ordenado de números reais (x,y).



O **módulo** ou **valor absoluto** de $z = x + iy$, denotado por $|z|$, é o número real

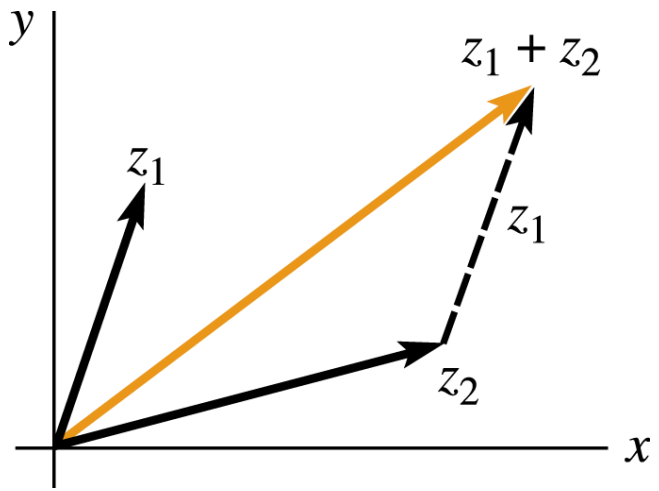
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Exemplo 3 Módulo de um número complexo

Se $z = 2 - 3i$, então $|z| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$.

Propriedades Geométricas da Adição

Pelo Teorema da Desigualdade do Triângulo:



$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

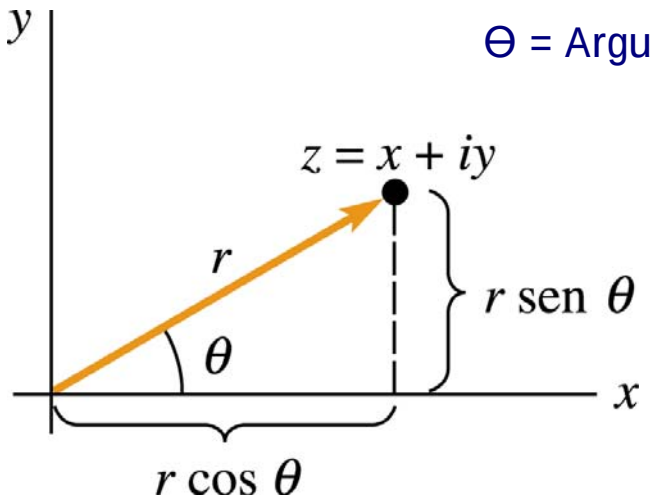
$$|z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + \cdots + |z_n|.$$

$$|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|.$$

Potencias e Raízes

Forma polar As coordenadas retangulares (x, y) e as coordenadas polares (r, θ) estão relacionadas pelas equações $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$



Θ = Argumento de **z** (arg z)

Exemplo 1 Um número complexo na forma polar

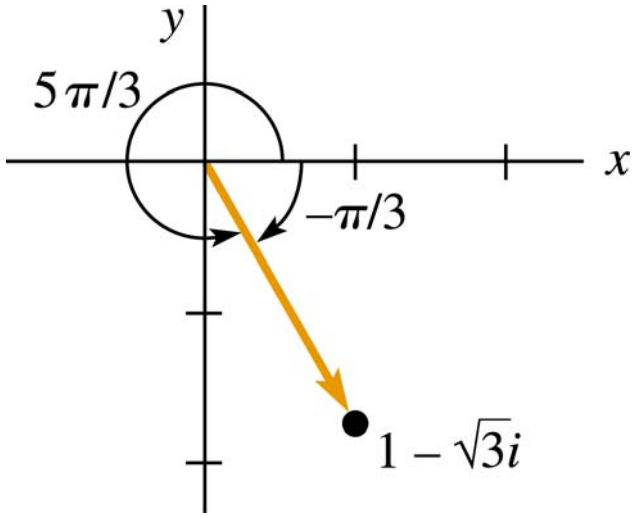
Expresse $1 - \sqrt{3}i$ em forma polar.

■ **Solução** Com $x = 1$ e $y = -\sqrt{3}$, obtemos $r = |z| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$. Agora, como o ponto $(1, -\sqrt{3})$ se localiza no quarto quadrante, podemos tomar a solução de $\text{tg}\,\theta = -\sqrt{3}/1 = -\sqrt{3}$ como sendo $\theta = \arg z = 5\pi/3$. Decorre de (1) que uma forma polar do número é

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right).$$

Conforme vemos na Figura 8.4, o argumento de $1 - \sqrt{3}i$ que se estende no intervalo $(-\pi, \pi]$, o argumento principal de z, é $\text{Arg}\,z = -\pi/3$. Logo, uma forma polar alternativa do número complexo é

$$z = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right].$$ ❑



Multiplicação e Divisão

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1) \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2),$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2) + i(\text{sen}\,\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2)]$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \qquad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[(\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2) + i(\text{sen}\,\theta_1 \cos\theta_2 - \cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

Exemplo 2 Argumento de um produto e de um quociente

Vimos que Arg $z_1 = \pi/2$ para $z_1 = i$. No Exemplo 1, vimos que Arg $z_2 = -\pi/3$ para $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$. Assim, para

erro

$$z_1 z_2 = i(1 - \sqrt{3}i) = \sqrt{3} + i \quad \text{e} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{i} = -\sqrt{3} - i$$

decorre de (7) que

$$\arg(z_1 z_2) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \quad \text{e} \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{6}.$$

Potências

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta).$$

$$z^2 = r^2[\cos(\theta + \theta) + i\,\text{sen}(\theta + \theta)] = r^2(\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta).$$

$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\,\text{sen}\,3\theta).$$

$$\frac{1}{z^2} = z^{-2} = r^{-2}[\cos(-2\theta) + i\,\text{sen}(-2\theta)]$$

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta).$$

■ **Fórmula de De Moivre** Quando $z = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$, temos $|z| = r = 1$ e assim

$$(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta.$$

Esse último resultado é conhecido como **fórmula de De Moivre** e é útil para a obtenção de determinadas identidades trigonométricas.

Exemplo 3 Potência de um número complexo

Calcule z^3 para $z = 1 - \sqrt{3}i$.

Solução No Exemplo 1, vimos que

$$z = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right].$$

Logo, a partir de (8) com $r = 2$, $\theta = -\pi/3$ e $n = 3$, obtemos

$$(1 - \sqrt{3}i)^3 = 2^3\left[\cos\left(3\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) + i\,\text{sen}\left(3\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right]$$

$$= 8[\cos(-\pi) + i\,\text{sen}(-\pi)] = -8.$$

Raízes

Raízes Um número w é dito ser uma **raiz enésima** de um número complexo não nulo z se $w^n = z$. Se adotarmos $w = \rho(\cos\phi + i\,\text{sen}\,\phi)$ e $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ como sendo as fórmulas polares de w e z, então, com base em (8), $w^n = z$ se torna

$$\rho^n(\cos n\phi + i\,\text{sen}\,n\phi) = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta).$$

A partir disso, concluímos que $\rho^n = r$ ou $\rho = r^{1/n}$ e

$$\cos n\phi + i\,\text{sen}\,n\phi = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta.$$

Igualando as partes real e imaginária, obtemos dessa equação

$$\cos n\phi = \cos\theta \qquad \text{e} \qquad \text{sen}\,n\phi = \text{sen}\,\theta.$$

Essas igualdades implicam que $n\phi = \theta + 2k\pi$, onde k é um inteiro. Assim,

$$\phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

$$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right],$$

onde $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Exemplo 4 Raízes de um número complexo

Determine as três raízes cúbicas de $z = i$.

Solução Com $r = 1$, $\theta = \arg z = \pi/2$, a forma polar do número indicado é $z = \cos(\pi/2) + i\,\text{sen}(\pi/2)$. A partir de (10) com $n = 3$, obtemos

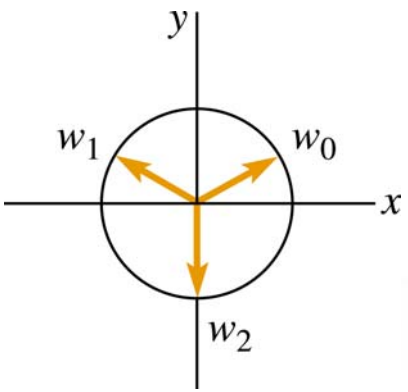
$$w_k = (1)^{1/3}\left[\cos\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2.$$

Logo, as três raízes são

$$k = 0, \quad w_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$k = 1, \quad w_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$k = 2, \quad w_2 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{2} = -i.$$



Exemplo 5 Raízes de um número complexo

Determine as quatro raízes quartas de $z = 1 + i$.

Solução Nesse caso, $r = \sqrt{2}$ e $\theta = \arg z = \pi/4$. De (10) com $n = 4$, obtemos

$$w_k = (2)^{1/4}\left[\cos\left(\frac{\pi/4 + 2k\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi/4 + 2k\pi}{4}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Assim,

erro

$$k = 0, \quad w_0 = (2)^{1/4}\left[\cos\frac{\pi}{16} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{16}\right] = 1{,}1664 + 0{,}2320i$$

$$k = 1, \quad w_1 = (2)^{1/4}\left[\cos\frac{9\pi}{16} + i\,\text{sen}\,\frac{9\pi}{16}\right] = -0{,}2320 + 1{,}1664i$$

$$k = 2, \quad w_2 = (2)^{1/4}\left[\cos\frac{17\pi}{16} + i\,\text{sen}\,\frac{17\pi}{16}\right] = -1{,}1664 - 0{,}2320i$$

$$k = 3, \quad w_3 = (2)^{1/4}\left[\cos\frac{25\pi}{16} + i\,\text{sen}\,\frac{25\pi}{16}\right] = 0{,}2320 - 1{,}1664i.$$

Funções de uma Variável Complexa

$z = x + iy$

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$f(z) = z^2 - 4z$, z qualquer número complexo

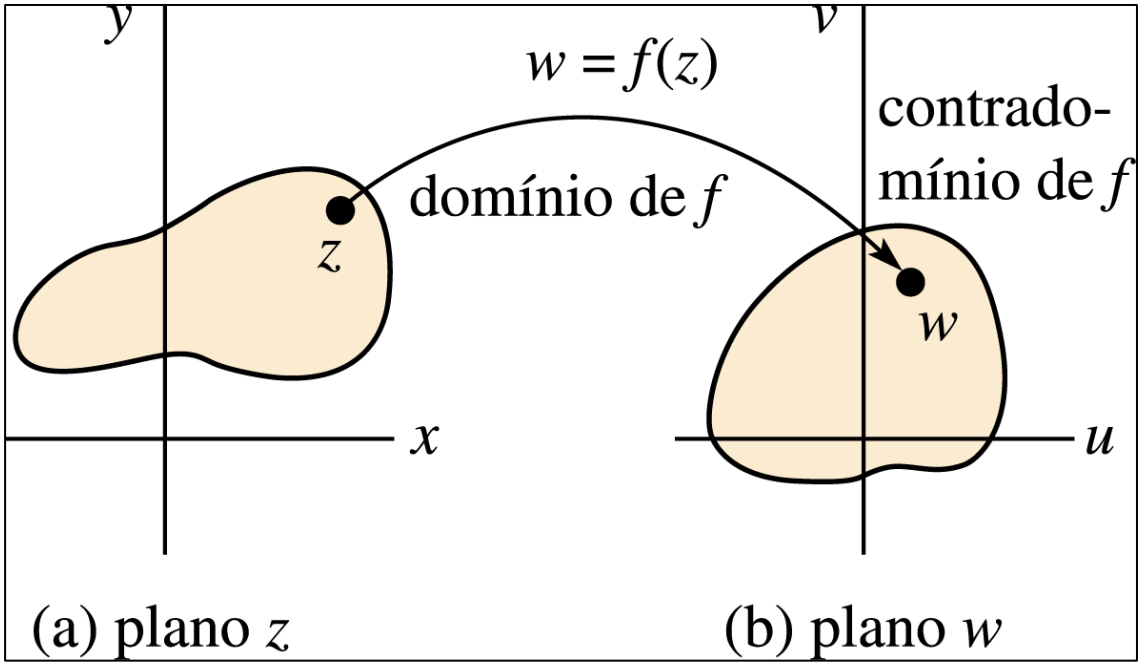
$f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 1}$, $z \neq i$ e $z \neq -i$

$f(z) = z + \mathrm{Re}(z)$, z qualquer número complexo.

$$f(z) = z^2 - 4z = (x + iy)^2 - 4(x + iy) = (x^2 - y^2 - 4x) + i(2xy - 4y).$$

Assim, $u(x, y) = x^2 - y^2 - 4x$, e $v(x,y) = 2xy - 4y$.

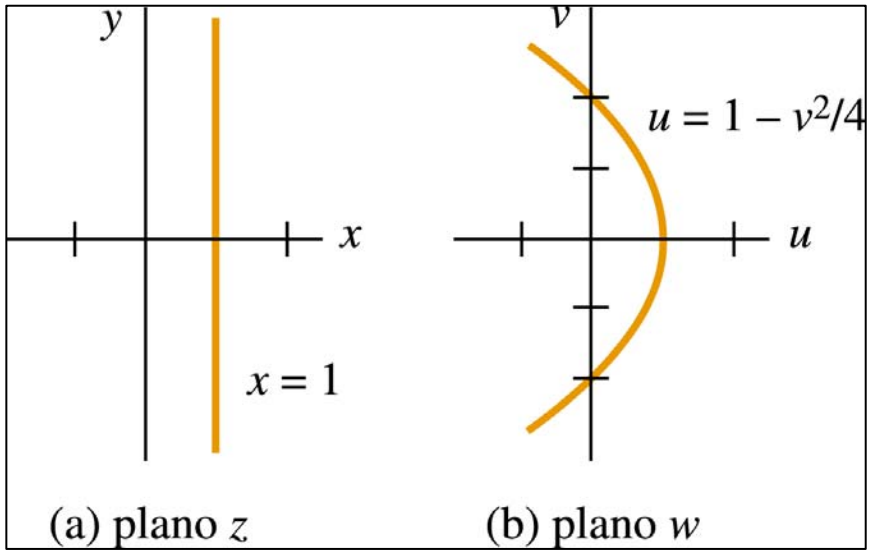
Mapeamento ou Transformação do plano z para o plano w



Exemplo 1 Imagem de uma reta vertical

Determine a imagem da reta $Re(z) = 1$ sob o mapeamento $f(z) = z^2$.

Solução Para a função $f(z) = z^2$, temos $u(x,y) = x^2 - y^2$ e $v(x,y) = 2xy$. Portanto, $\text{Re}(z) = x$, e assim, pela substituição de $x = 1$ nas funções u e v, obtemos $u = 1 - y^2$ e $v = 2y$. Essas são equações paramétricas de uma curva no plano w. Substituindo-se $y = v/2$ na primeira equação, elimina-se o parâmetro y e obtém-se $u = 1 - v^2/4$. Em outras palavras, a imagem da reta na Figura 8.13(a) é a parábola apresentada na Figura 8.13(b). ❑

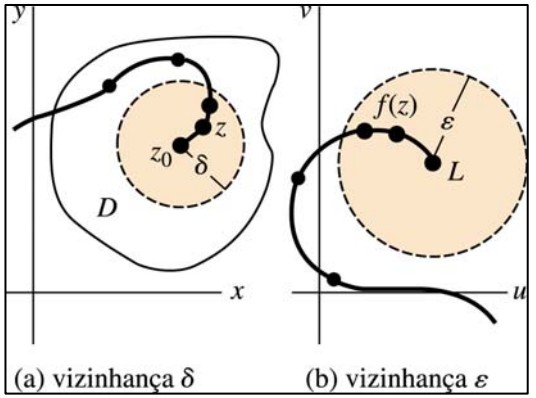


Limite e Continuidade de uma Função Complexa

Suponha que a função f seja definida em alguma vizinhança de z_0, exceto possivelmente no próprio z_0. Então f é dito possuir um **limite** em z_0, escrito como

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L$$

se, para cada $\epsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que $|f(z) - L| < \epsilon$ sempre que $0 < |z - z_0| < \delta$.



(a) vizinhança δ (b) vizinhança ε

TEOREMA 8.1 Limite da soma, produto e quociente

Considere $\lim_{z \to z_0} f(z) = L_1$ e $\lim_{z \to z_0} g(z) = L_2$. Então:

(*i*) $\lim_{z \to z_0} [f(z) + g(z)] = L_1 + L_2$

(*ii*) $\lim_{z \to z_0} f(z)g(z) = L_1 L_2$

(*iii*) $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{L_1}{L_2}, \quad L_2 \neq 0.$

Uma função f é **contínua** em um ponto z_0 se $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Função Complexa Polinomial

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

é contínua em todos os lugares – isto é, em todo o plano z.

Função Complexa Racional

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)},$$

é contínua exceto naqueles pontos nos quais $h(z)$ é zero.

Derivada de uma Função Complexa

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Regra da constante: $\frac{d}{dz} c = 0, \quad \frac{d}{dz} cf(z) = cf'(z)$

Regra da soma: $\frac{d}{dz}[f(z) + g(z)] = f'(z) + g'(z)$

Regra do produto: $\frac{d}{dz}[f(z)g(z)] = f(z)g'(z) + g(z)f'(z)$

Regra do quociente: $\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}$

Regra da cadeia: $\frac{d}{dz} f(g(z)) = f'(g(z))g'(z).$

$$\frac{d}{dz} z^n = nz^{n-1}, \quad n \text{ um inteiro.}$$

Exemplo 3 Utilizando as regras da diferenciação

Diferencie (a) $f(z) = 3z^4 - 5z^3 + 2z$ e (b) $f(z) = \dfrac{z^2}{4z + 1}$.

Solução (a) Utilizando a regra da potência (9) junto com a regra da soma (5), obtemos

$$f'(z) = 3 \cdot 4z^3 - 5 \cdot 3z^2 + 2 = 12z^3 - 15z^2 + 2.$$

(b) A partir da regra do quociente (7),

$$f'(z) = \frac{(4z + 1) \cdot 2z - z^2 \cdot 4}{(4z + 1)^2} = \frac{4z^2 + 2z}{(4z + 1)^2}.$$

❑

Exemplo 4 Uma função que não é diferenciável em nenhum lugar

Mostre que a função $f(z) = x + 4iy$ não é diferenciável em nenhum lugar.

Solução Com $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, temos

$$f(z + \Delta z) - f(z) = (x + \Delta x) + 4i(y + \Delta y) - x - 4iy = \Delta x + 4i\Delta y$$

e assim

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 4i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}. \tag{10}$$

Agora, se adotarmos $\Delta z \to 0$ ao longo de uma reta paralela ao eixo x, então $\Delta y = 0$ e o valor de (10) é 1. Por outro lado, se considerarmos $\Delta z \to 0$ ao longo de uma reta paralela ao eixo y, então $\Delta x = 0$ e o valor de (10) é visto como sendo (4). Portanto, $f(z) = x + 4iy$ não é diferenciável em nenhum ponto z. ❑

Funções Exponenciais e Logarítmicas

Para $f(x)=e^x$, com x Real ⇒ $f'(x) = f(x)$ e $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$

Fórmula de Euler: $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$, y um número real

Prova: Séries de Taylor de e^{iy}, cosy e iseny

$$e^{iy} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$= \cos y + i \operatorname{sen} y.$$

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

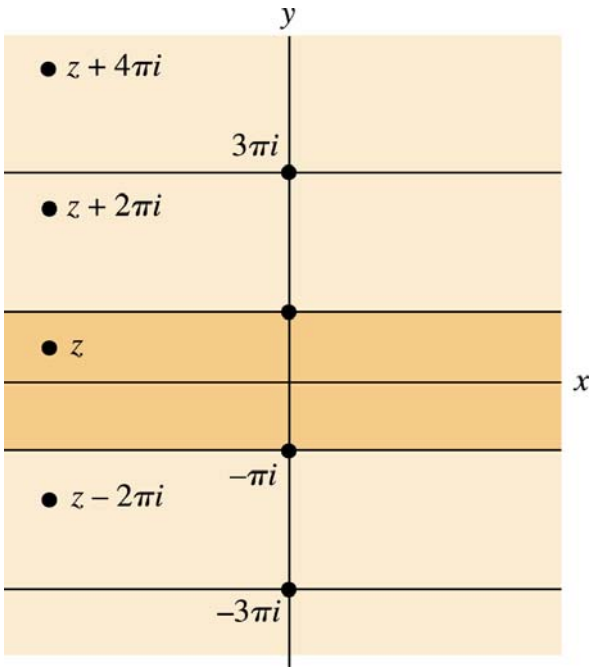
$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}.$$

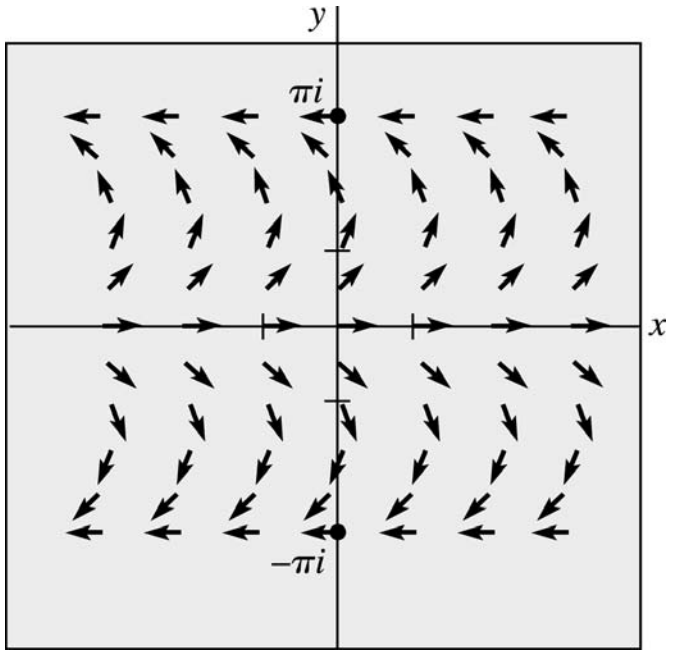
$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}.$$

Periodicidade

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i\,\mathrm{sen}2\pi = 1$$

$$e^{z+2\pi i} = e^{z}e^{2\pi i} = e^{z} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(z+2\pi i) = f(z)}$$





Forma Polar

$$z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta).$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = re^{i\theta}}$$

Função Logarítmica

$$z = x + iy,\ z \neq 0, \qquad w = \ln z \qquad \text{se} \qquad z = e^w.$$

$$w = u + iv$$

$$x + iy = e^{u+iv} = e^u(\cos v + i \operatorname{sen} v) = e^u \cos v + ie^u \operatorname{sen} v.$$

$$e^{2u} = x^2 + y^2 = r^2 = |z|^2 \qquad u = \log_e|z|, \qquad \operatorname{tg} v = \frac{y}{x}.$$

Para $z \neq 0$ e $\theta = \arg z$,

$$\ln z = \log_e|z| + i(\theta + 2n\pi), \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Exemplo 2 Valores complexos da função logarítmica

Determine os valores de (a) $\ln(-2)$, (b) $\ln i$ e (c) $\ln(-1-i)$

Solução (a) Com $\theta = \arg(-2) = \pi$ e $\log_e|-2| = 0{,}6932$, temos de (6)

$$\ln(-2) = 0{,}6932 + i(\pi + 2n\pi).$$

(b) Com $\theta = \arg(i) = \pi/2$ e $\log_e|i| = \log_e 1 = 0$, temos a partir de (6) que

$$\ln i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right).$$

Em outras palavras, $\ln i = \pi i/2, -3\pi i/2, 5\pi i/2, -7\pi i/2$, e assim por diante.

(c) Com $\theta = \arg(-1-i) = 5\pi/4$ e $\log_e|-1-i| = \log_e\sqrt{2} = 0{,}3466$, temos de (6)

$$\ln(-1-i) = 0{,}3466 + i\left(\frac{5\pi}{4} + 2n\pi\right).$$ ❑

Exemplo 3 Resolvendo uma equação exponencial

Determine todos os valores de z de modo que $e^z = \sqrt{3} + i$.

Solução A partir de (5), com o símbolo w substituído por z, temos $z = \ln(\sqrt{3}+i)$. Agora $|\sqrt{3}+i| = 2$ e $\text{tg}\,\theta = 1/\sqrt{3}$ implica $\arg(\sqrt{3}+i) = \pi/6$. Assim, (6) resulta em

$$z = \log_e 2 + i\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right) \quad \text{ou} \quad z = 0{,}6931 + i\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right).$$ ❑

Funções Trigonométricas

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x.$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

$z = x + iy,$

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{e} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}, \quad \operatorname{cotg} z = \frac{1}{\operatorname{tg} z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\operatorname{sen} z}.$$

Derivadas

$$\frac{d}{dz}\operatorname{sen} z = \frac{d}{dz}\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

$$\frac{d}{dz}\operatorname{sen} z = \cos z \qquad \frac{d}{dz}\cos z = -\operatorname{sen} z$$

$$\frac{d}{dz}\operatorname{tg} z = \sec^2 z \qquad \frac{d}{dz}\operatorname{cotg} z = -\operatorname{cosec}^2 z$$

$$\frac{d}{dz}\sec z = \sec z \operatorname{tg} z \qquad \frac{d}{dz}\operatorname{cosec} z = -\operatorname{cosec} z \operatorname{cotg} z$$

Identidades

$$\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z \qquad \cos(-z) = \cos z$$

$$\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$$

$$\operatorname{sen}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \operatorname{sen} z_2$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$$

$$\operatorname{sen} 2z = 2 \operatorname{sen} z \cos z \qquad \cos 2z = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z$$