

Cap. XIII – Cinemática de Partículas: Métodos de Energia e Quantidade de Movimento

Conteúdo

Introdução
Trabalho de uma Força
Princípio de Trabalho e Energia
Aplicações do Princípio de Trabalho e Energia
Potência e Eficiência
Problema Exemplo 13.2
Problema Exemplo 13.3
Energia Potencial
Forças Conservativas
Conservação de Energia
Princípio do Impulso e Quantidade Movimento
Movimento Impulsivo
Impacto
Impacto Central Direto

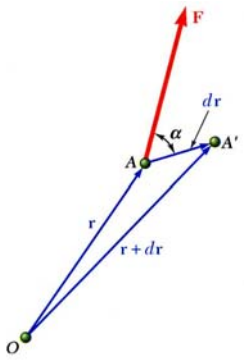
Introdução

- Anteriormente, problemas envolvendo o movimento de partículas foram resolvidos através da equação fundamental do movimento. O capítulo atual introduz dois métodos adicionais de análise.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

  - *Método do Trabalho e Energia*: relaciona diretamente a força, a massa, a velocidade e o deslocamento.
  - *Método do Impulso e Quantidade de Movimento* : relaciona diretamente a força, a massa, a velocidade e o tempo.

Trabalho de uma Força



- A variação d**r** do vetor **r** representa o *deslocamento* da partícula.
- *O trabalho da força* **F** no deslocamento d**r** é:

$$\begin{aligned} dU &= \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} \\ &= F\,ds\cos\alpha \\ &= F_x dx + F_y dy + F_z dz \end{aligned}$$

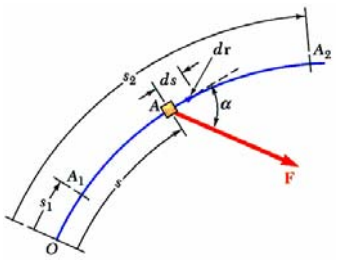
|d**r**| = ds

- O Trabalho é uma quantidade escalar, isto é, possui magnitude e sinal, mas não possui direção.
- Dimensões do trabalho: comprimento x força

Unidades:

$$1\ \text{J}\ (joule) = (1\ \text{N})(1\ \text{m})$$
$$1\,\text{ft}\cdot\text{lb} = 1{,}356\ \text{J}$$

Trabalho de uma Força

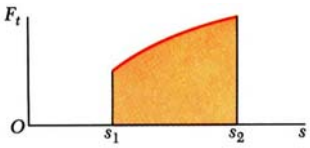


- Trabalho da força durante um deslocamento finito,

$$U_{1\to 2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

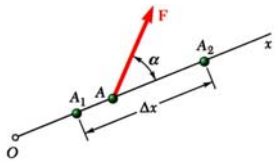
$$= \int_{s_1}^{s_2} (F\cos\alpha)\, ds = \int_{s_1}^{s_2} F_t\, ds$$

$$= \int_{A_1}^{A_2} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right)$$



- O trabalho é representado pela área embaixo da curva F_t x s.

Trabalho de uma Força



- **Trabalho de uma força constante em movimento retilíneo,**

$$U_{1\to 2} = (F\cos\alpha)\,\Delta x$$

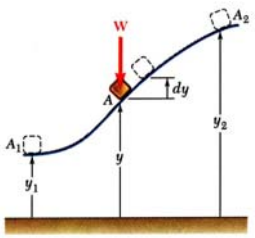
- **Trabalho da força peso:**

$$dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$= -W\, dy$$

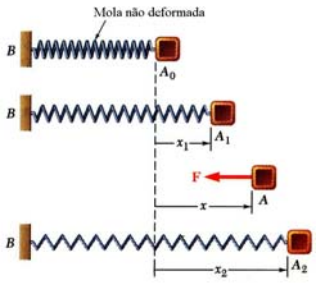
$$U_{1\to 2} = -\int_{y_1}^{y_2} W\, dy$$

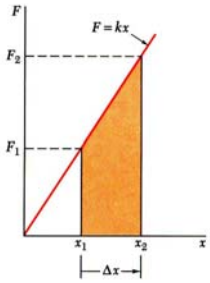
$$= -W(y_2 - y_1) = -W\,\Delta y$$



- O trabalho *do peso* é igual ao produto do peso W e o deslocamento vertical Δy.
- O trabalho *do peso* é positivo quando $\Delta y < 0$, isto é, quando a altura diminui.

Trabalho de uma Força





- A amplitude da força exercida por uma mola é proporcional à deflexão,

$$F = kx$$

$$k = \text{ constante da mola } (\text{N/m ou lb/in})$$

- **Trabalho *da força exercida por uma mola***,

$$dU = -F\,dx = -kx\,dx$$

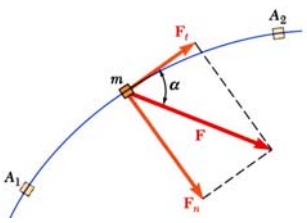
$$U_{1\to 2} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \tfrac{1}{2}kx_1^2 - \tfrac{1}{2}kx_2^2$$

- O trabalho *da força exercida pela mola* é positivo quando $x_2 < x_1$, isto é, quando a mola está retornando à sua posição não deformada.

- O trabalho da força exercida pela mola é igual ao negativo da área sob a curva de F traçada em relação a x,

$$U_{1\to 2} = -\tfrac{1}{2}(F_1 + F_2)\,\Delta x$$

Energia Cinética da Partícula: Princípio do Trabalho e Energia



- Considere uma partícula de massa m sujeita a uma força **F**,

$$F_t = ma_t = m\frac{dv}{dt}$$

$$= m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = mv\frac{dv}{ds}$$

$$F_t\,ds = mv\,dv$$

- Integrando de A_1 a A_2,

$$\int_{s_1}^{s_2} F_t\,ds = m\int_{v_1}^{v_2} v\,dv = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2$$

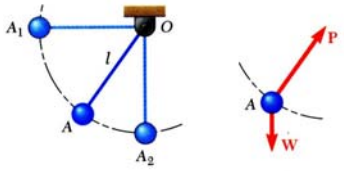
$$U_{1\to 2} = T_2 - T_1 \qquad T = \tfrac{1}{2}mv^2 = \textit{energia cinética}$$

- *O trabalho da força* ***F*** *é igual à variação da energia cinética da partícula*.

- As unidades de trabalho e de energia cinética são as mesmas:

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 = \text{kg}\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = \left(\text{kg}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)\text{m} = \text{N}\cdot\text{m} = \text{J}$$

Aplicações do Princípio de Trabalho e Energia

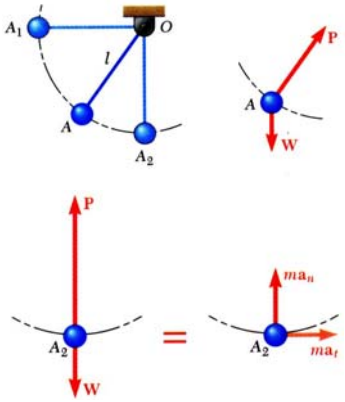


- Determine a velocidade do pêndulo em A_2. Considere trabalho e energia cinética.
- A força **P** (tração no fio) atua normal à trajetória e não faz nenhum trabalho.

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2$$
$$0 + Wl = \frac{1}{2}\frac{W}{g}v_2^2$$
$$v_2 = \sqrt{2gl}$$

- A velocidade é encontrada sem determinar uma expressão para aceleração e sem integrar.
- Todas as quantidades são escalares e podem se adicionadas diretamente.
- Forças que não realizam trabalho são desconsideradas no problema.

Aplicações do Princípio de Trabalho e Energia



$$v_2 = \sqrt{2gl}$$

- O princípio do trabalho e energia não pode ser aplicado para determinar diretamente a aceleração do pêndulo.
- Calcular a tração no cabo requer suplementar o método de trabalho e energia com uma aplicação da Segunda Lei de Newton.
- Quando o pêndulo passa através de A_2,

$$\sum F_n = m a_n$$
$$P - W = \frac{W}{g}\frac{v_2^2}{l}$$
$$P = W + \frac{W}{g}\frac{2gl}{l} = 3W$$

Potência e Rendimento

- potência = taxa pela qual o trabalho é realizado no tempo.

$$= \frac{dU}{dt} = \frac{\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}}{dt}$$
$$= \mathbf{F} \bullet \mathbf{v}$$

- As dimensões da potência são trabalho/tempo ou força x velocidade.

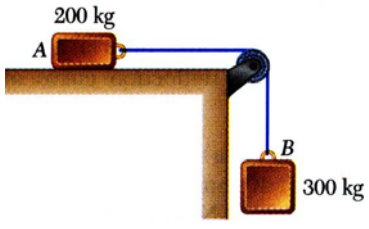
As unidades de potência são:

$$1\,\mathrm{W\,(watt)} = 1\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 1\,\mathrm{N}\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad \text{ou} \quad 1\,\mathrm{hp} = 550\frac{\mathrm{ft}\cdot\mathrm{lb}}{\mathrm{s}} = 746\,\mathrm{W}$$

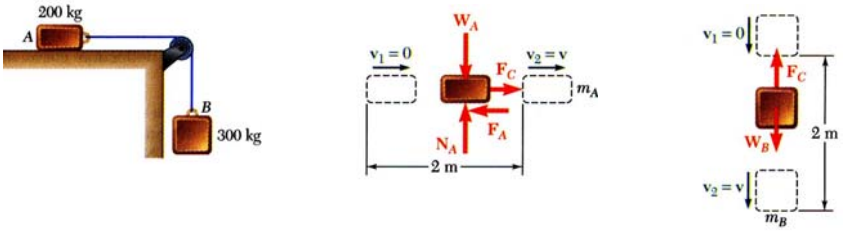
- $\eta = \text{rendimento}$

$$\eta = \frac{P_{saída}}{P_{entrada}}$$

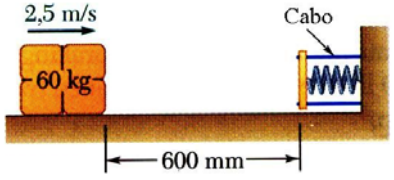
Ex. 13.2: Dois blocos são unidos por um cabo inextensível como mostrado. Se o sistema é solto a partir do repouso, determine a velocidade do bloco *A* depois que este se moveu 2 m. Suponha que o coeficiente de atrito entre o bloco *A* e o plano é μ_k = 0,25 e que a polia é de peso desprezível e sem atrito.



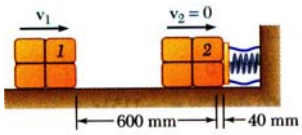
Ex. 13.2

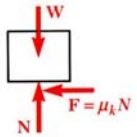


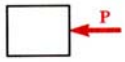
Ex. 13.3: Uma mola é usada para parar um pacote de 60 kg que está deslizando numa superfície horizontal. A mola tem uma constante k = 20 kN/m e é presa por cabos de modo que esteja inicialmente comprimida em 120 mm. O pacote tem uma velocidade de 2,5 m/s na posição mostrada e a deflexão máxima da mola é 40 mm.
Determine (*a*) o coeficiente de atrito cinético entre o pacote e a superfície e (*b*) a velocidade do pacote quando este passa novamente pela posição mostrada,

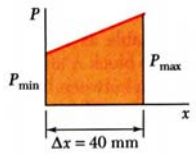


Ex. 13.3

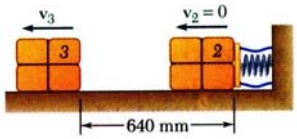

v_1
$v_2 = 0$
1
2
600 mm
40 mm

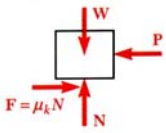

W
N
$F = \mu_k N$


P

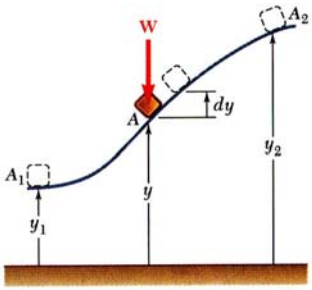

P
P_{max}
P_{min}
x
$\Delta x = 40$ mm

Ex. 13.3


v_3
$v_2 = 0$
3
2
640 mm


W
P
$F = \mu_k N$
N

Energia Potencial (gravitacional):



- Trabalho da força peso **W**,

$$U_{1\to 2} = W y_1 - W y_2$$

- O trabalho é independente da trajetória percorrida; depende apenas dos valores iniciais e finais da quantidade *Wy*.

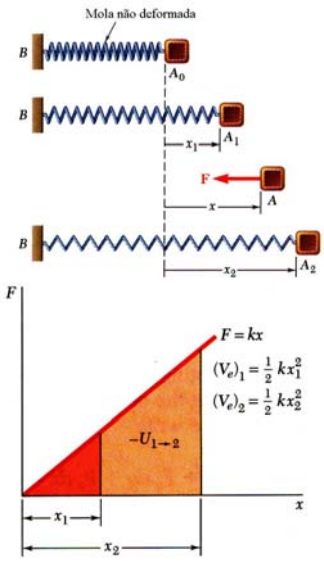
$$V_g = Wy$$

$=$ *energia potencial gravitacional* da partícula

$$U_{1\to 2} = (V_g)_1 - (V_g)_2$$

- A escolha da referência a partir da qual a elevação *y* é medida é arbitrária.
- As unidades de trabalho e de energia potencial são as mesmas: $V_g = Wy = \mathrm{N}\cdot\mathrm{m} = \mathrm{J}$

Energia Potencial (elástica):



- O trabalho da força exercida por uma mola depende apenas das deflexões inicial e final da mola,

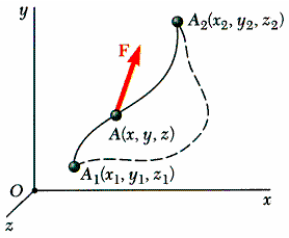
$$U_{1\to 2} = \tfrac{1}{2}kx_1^2 - \tfrac{1}{2}kx_2^2$$

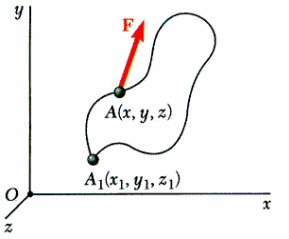
- A energia potencial elástica da partícula:

$$V_e = \tfrac{1}{2}kx^2$$

$$U_{1\to 2} = (V_e)_1 - (V_e)_2$$

Forças Conservativas





- O conceito de energia potencial pode ser aplicado se o trabalho da força é independente da trajetória seguida pelo seu ponto de aplicação.

$$U_{1\to 2} = V(x_1, y_1, z_1) - V(x_2, y_2, z_2)$$

Tais forças são descritas como *forças conservativas*.

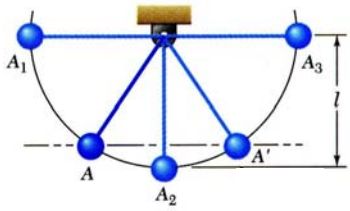
- Para qualquer força conservativa aplicada em uma trajetória fechada, $\oint \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = 0$
- Trabalho elementar correspondendo a um deslocamento entre dois pontos vizinhos,

$$dU = V(x, y, z) - V(x + dx, y + dy, z + dz)$$
$$= -dV(x, y, z)$$

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right)$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\right) = -\mathbf{grad}\, V$$

Conservação de Energia



$$T_1 = 0 \quad V_1 = W\ell$$
$$T_1 + V_1 = W\ell$$

$$T_2 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}\frac{W}{g}(2g\ell) = W\ell \quad V_2 = 0$$
$$T_2 + V_2 = W\ell$$

- Trabalho de uma força conservativa:

$$U_{1\to 2} = V_1 - V_2$$

- Conceito de trabalho e energia, para uma força qualquer:

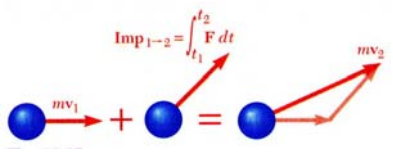
$$U_{1\to 2} = T_2 - T_1$$

- Segue que, para uma força conservativa:

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$
$$E = T + V = \text{ constante}$$

- Logo, quando uma partícula se move sob a ação de forças conservativas, a energia mecânica total é constante.
- Forças de atrito não são conservativas. A energia mecânica total de um sistema envolvendo atrito diminui.
- A energia mecânica é dissipada pelo atrito em energia térmica.

Princípio do Impulso e Quantidade de Movimento



- As dimensões do impulso de uma força são

  força x *tempo*.

- As unidades para o impulso de uma força são

$$\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}=\left(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}/\mathrm{s}^2\right)\cdot\mathrm{s}=\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}/\mathrm{s}$$

- A partir da Segunda Lei de Newton,

$$\mathbf{F}=\frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$ m**v** = quantidade de movimento linear

$$\mathbf{F}\,dt=d(m\mathbf{v})$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}\,dt=m\mathbf{v}_2-m\mathbf{v}_1$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}\,dt=\mathbf{Imp}_{1\to 2}=\text{ impulso da força }\mathbf{F}$$

$$m\mathbf{v}_1+\mathbf{Imp}_{1\to 2}=m\mathbf{v}_2$$

- A quantidade de movimento final da partícula pode ser obtida adicionando vetorialmente sua quantidade de movimento inicial ao impulso da força durante o intervalo de tempo.

Movimento Impulsivo

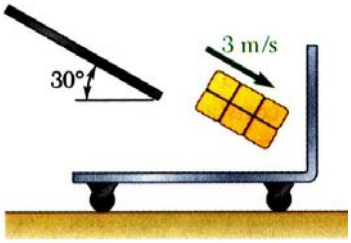


- Uma força agindo em uma partícula durante um intervalo muito curto de tempo, sendo grande o suficiente para causar uma mudança significativa na quantidade de movimento desta, é chamada *força impulsiva*.
- Quando forças impulsivas agem em uma partícula,

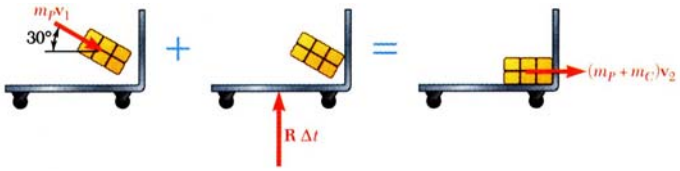
$$m\mathbf{v}_1+\sum\mathbf{F}\,\Delta t=m\mathbf{v}_2$$

- Quando uma bola de *baseball* é batida por um bastão, o contato ocorre em um intervalo curto de tempo, mas a força é grande o suficiente para mudar o sentido do movimento da bola.
- *Forças não impulsivas* são forças para as quais $\mathbf{F}\Delta t$ é pequeno e, portanto, podem ser desprezadas, como, por exemplo, o peso neste caso.

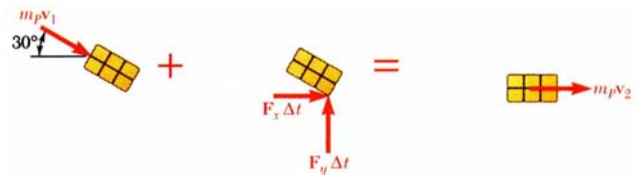
Ex. 13.12: Um pacote de 10 kg cai de uma rampa dentro de um carrinho de 25 kg com uma velocidade de 3 m/s. Sabendo que o carrinho está inicialmente em repouso e que pode rolar livremente, determine: (a) a velocidade final do carrinho, (b) o impulso exercido pelo carrinho sobre o pacote e (c) a fração da energia inicial perdida no impacto.



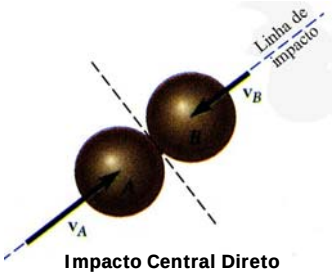
Ex. 13.12



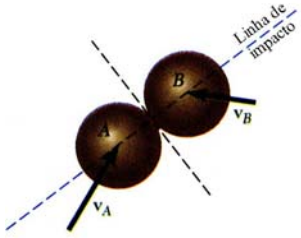
Ex. 13.12



Impacto ou Choque



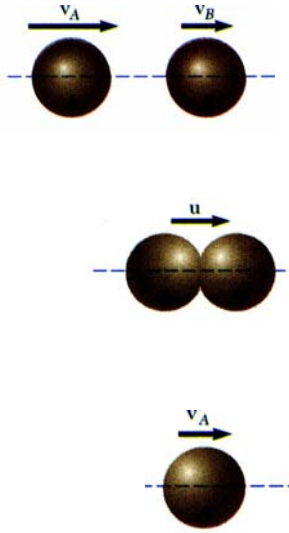
Impacto Central Direto



Impacto Central Oblíquo

- *Impacto*: Colisão entre dois corpos que ocorre durante um intervalo pequeno de tempo e na qual os corpos exercem grandes forças entre si.
- *Impacto Central*: Impacto em que os centros de massa dos dois corpos se encontram na linha de impacto; se não for este o caso, é um *impacto excêntrico*.
- *Linha de impacto*: Normal comum às superfícies em contato durante o impacto.
- *Impacto Central Direto*: Impacto em que as velocidades dos dois corpos são direcionadas ao longo da linha de impacto.
- *Impacto Central Oblíquo*: Impacto em que um ou ambos os corpos se movem ao longo de uma linha que não é a linha de impacto.

Impacto Central Direto

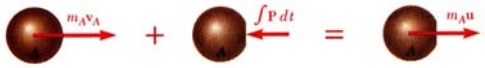


- Corpos se movendo na mesma linha reta, $v_A > v_B$.
- Sob impacto, os corpos se submetem a um *período de deformação*, ao fim do qual, estão em contato e se movendo a uma velocidade comum.
- Segue então um *período de restituição* durante o qual os corpos retomam sua forma original ou permanecem deformados permanentemente.
- Determinar as **velocidades finais** dos dois corpos. A quantidade de movimento total do sistema (dois corpos) é preservada,

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B$$

- Uma segunda relação entre as velocidades finais é necessária.

Impacto Central Direto



- Período de deformação: $m_A v_A - \int P dt = m_A u$

$$e = \text{coeficiente de restituição}$$
$$e = \frac{\int R dt}{\int P dt} = \frac{u - v'_A}{v_A - u}$$
$$0 \le e \le 1$$



- Período de restituição: $m_A u - \int R dt = m_A v'_A$
- Uma análise similar da partícula *B* leva a: $e = \dfrac{v'_B - u}{u - v_B}$

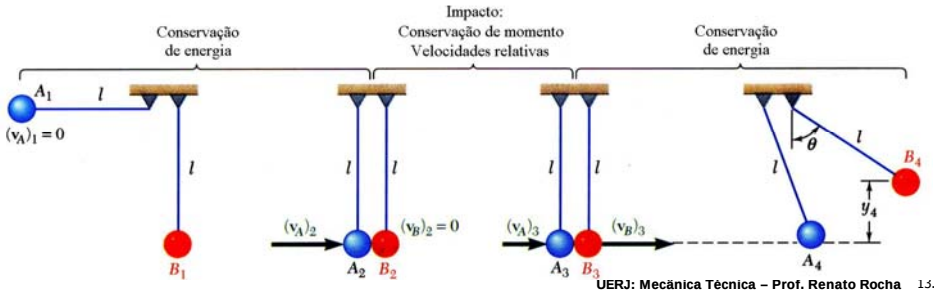
Obs: $\frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{9+12}{7} = 3$

- Combinando estas relações nos leva à segunda relação desejada entre as **velocidades finais**: $v'_B - v'_A = e(v_A - v_B)$
- *Impacto perfeitamente plástico*, $e = 0$: $v'_B = v'_A = v'$ $\quad m_A v_A + m_B v_B = (m_A + m_B) v'$
- *Impacto perfeitamente elástico*, $e = 1$: $v'_B - v'_A = v_A - v_B$

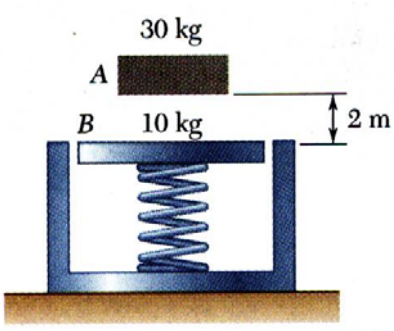
  Energia total e quantidade de movimeto total conservados.

Problemas Envolvendo Energia e Quantidade de Movimento

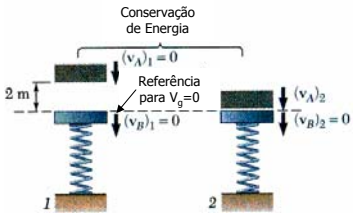
- Dispomos, portanto, de três métodos para a análise de problemas de dinâmica:
  - Aplicação direta da Segunda Lei de Newton
  - Método do trabalho e da energia
  - Método do impulso e Quantidade de movimento
- Deve ser selecionado o método mais adequado para o problema ou para parte de um problema em consideração.



Ex. 13.17: Um bloco de 30 kg é solto de uma altura de 2 m sobre o prato de 10 kg de uma balança de mola. Considerando que o impacto seja perfeitamente plástico, determine a máxima defexão do prato. A constante da mola é k=20 KN/m.



Ex. 13.17





Ex. 13.17

