

# Cap. XI – Cinemática de Partículas

# Conteúdo


Introdução

Movimento Retilíneo: Posição, Velocidade e Aceleração

Determinação do Movimento de uma Partícula

Problema Exemplo 11.2

Problema Exemplo 11.3

Movimento Retilíneo Uniforme

Movimento Retilíneo Uniformemente Acelerado

Movimento de Várias Partículas: Movimento Relativo

Problema Exemplo 11.4

Solução Gráfica de Problemas com Movimento Retilíneo

Movimento Curvilíneo: Posição, Velocidade e Aceleração

Componentes Retangulares de Velocidade e Aceleração

Componentes Tangenciais e Normais

Problema Exemplo 11.10

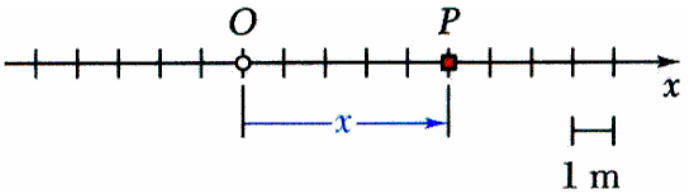
# Introdução

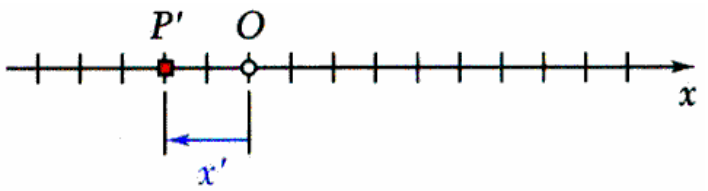
- O estudo da dinâmica se divide em:
  - ***Cinemática***: estudo da geometria do movimento. A cinemática é usada para relacionar deslocamento, velocidade, aceleração e tempo sem referência à causa do movimento.
  - ***Cinética***: estudo das relações existentes entre forças agindo num corpo, a massa do corpo e seu movimento. A cinética é usada para predizer o movimento causado por forças dadas ou para determinar as forças necessárias para produzir um dado movimento.

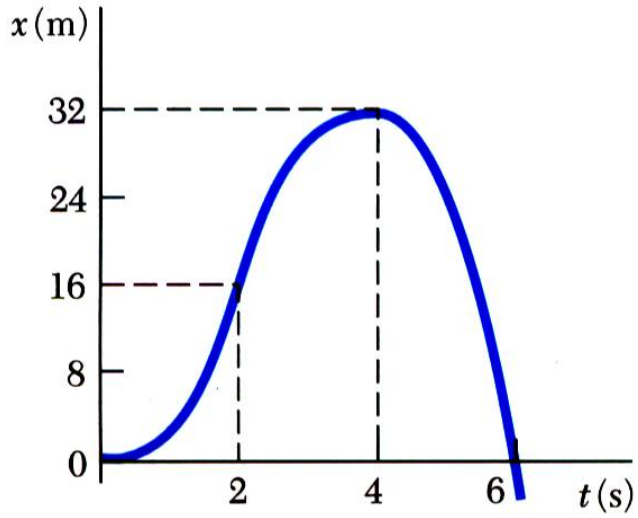
- **Movimento *retilíneo***: posição, velocidade e aceleração de uma partícula que se move ao longo de uma linha reta – tratamento escalar.

- **Movimento *curvilíneo***: posição, velocidade e aceleração de uma partícula que se move ao longo de uma linha curva em duas ou três dimensões – tratamento vetorial.

# Movimento Retilíneo: Posição




- Uma partícula se movendo ao longo de uma linha reta é dita estar em *movimento retilíneo*.

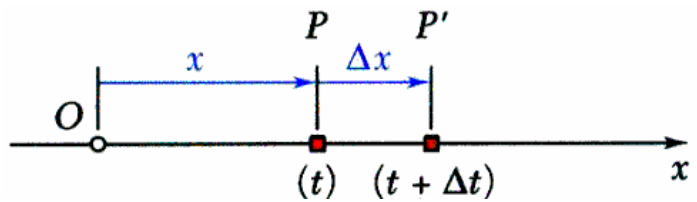
- A *coordenada da posição* de uma partícula é definida pela distância positiva ou negativa da partícula a uma origem fixa na linha.

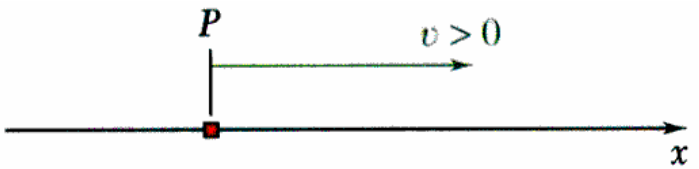
- O movimento de uma partícula é conhecido se a coordenada da posição para a partícula é conhecida para todo valor de tempo *t*. O movimento da partícula pode ser expresso na forma de uma função, por exemplo,

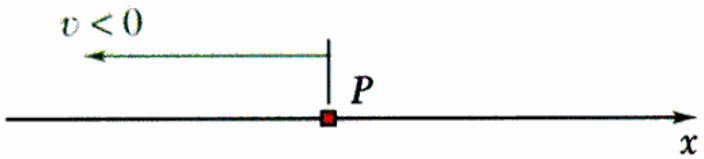
$$x = 6t^2 - t^3$$

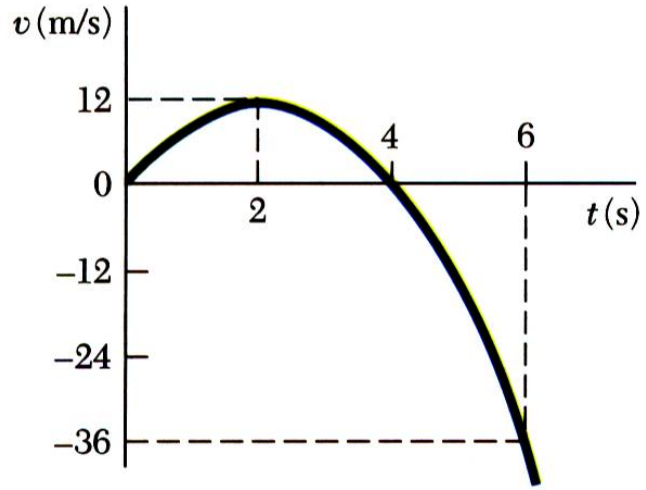
ou na forma de um gráfico posição x tempo.

# Movimento Retilíneo: Velocidade




- Considere uma partícula que ocupa a posição $P$ no tempo $t$ e $P'$ em $t+\Delta t$,

$$\underline{\textit{velocidade média}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\underline{\textit{velocidade instantânea}} = v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

- A velocidade instantânea pode ser positiva ou negativa. A amplitude da velocidade é conhecida como a *velocidade da partícula*.

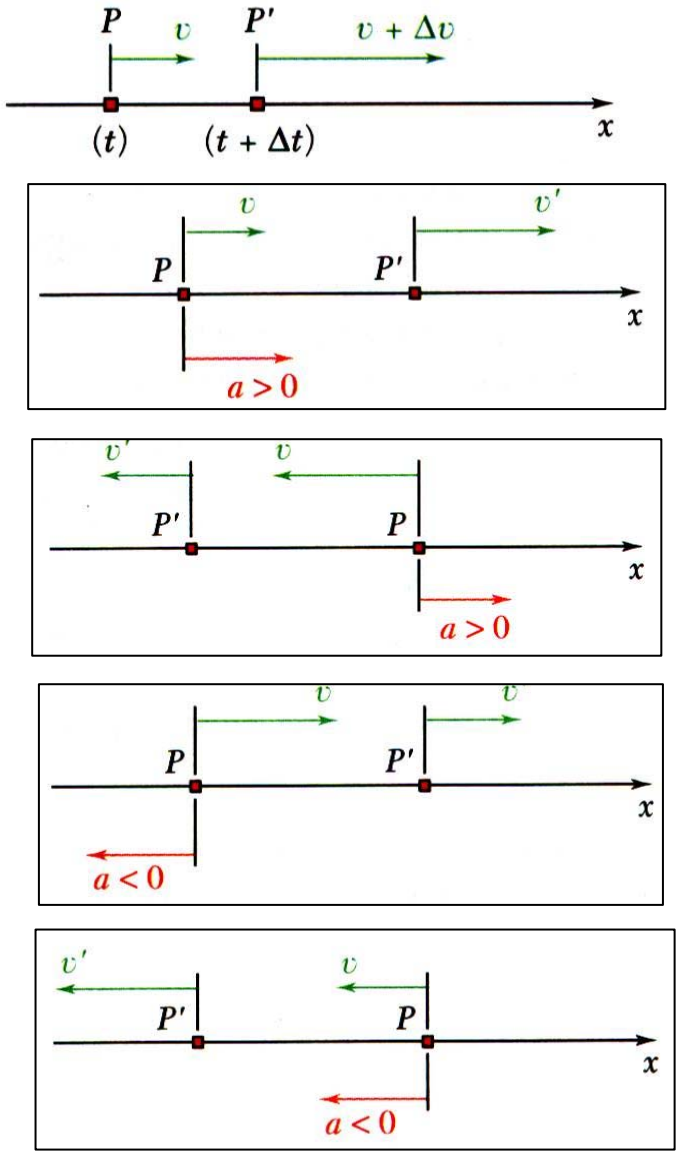
- A partir da definição de uma derivada,

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

por exemplo, $x = 6t^2 - t^3$

$$v = \frac{dx}{dt} = 12t - 3t^2$$

# Movimento Retilíneo: Aceleração




- Considere uma partícula com velocidade $v$ no tempo $t$ e $v'$ em $t+\Delta t$,

$$\text{aceleração instantânea} = a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

- Aceleração instantânea pode ser :
  - positiva: aumentando a velocidade positiva ou diminindo a velocidade negativa.
  - negativa: diminuindo a velocidade positiva ou amentando a velocidade negativa.

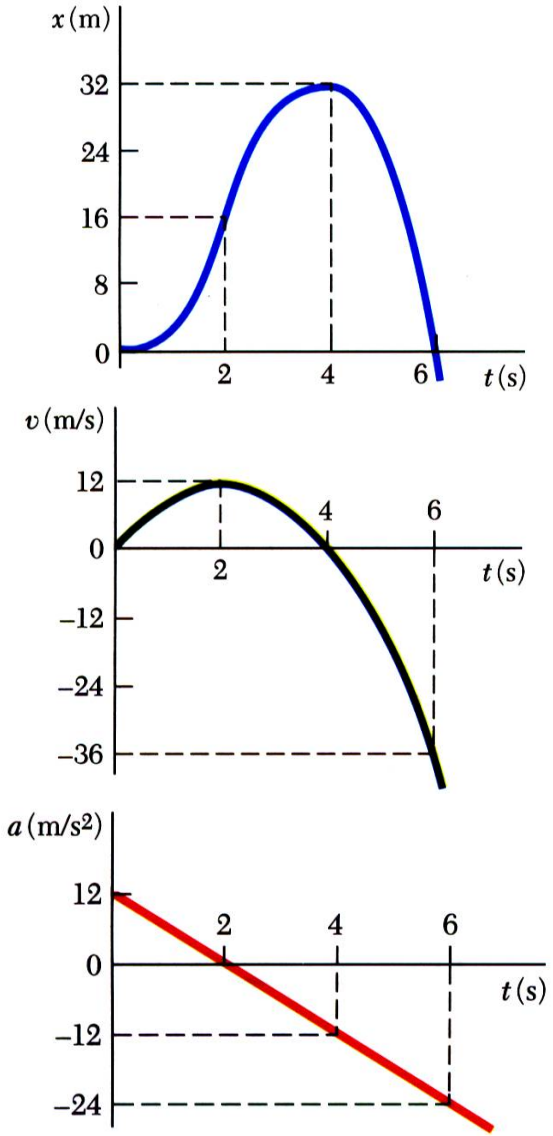
- A partir da definição de uma derivada,

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$v = 12t - 3t^2$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 12 - 6t$$

# Movimento Retilíneo: Posição, Velocidade e Aceleração




- Considere uma partícula com movimento dado por

$$x = 6t^2 - t^3$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 12t - 3t^2$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 12 - 6t$$

- em $t = 0$, $x = 0$, $v = 0$, $a = 12$ m/s²
- em $t = 2$ s, $x = 16$ m, $v = v_{max} = 12$ m/s, $a = 0$
- em $t = 4$ s, $x = x_{max} = 32$ m, $v = 0$, $a = -12$ m/s²
- em $t = 6$ s, $x = 0$, $v = -36$ m/s, $a = -24$ m/s²

# Determinação do Movimento de uma Partícula

- Lembre-se, o *movimento* de uma partícula é conhecido se a posição é conhecida para todo o tempo *t*.

- Tipicamente, as condições de movimento são especificadas pelo tipo de aceleração experimentada pela partícula. A determinação da velocidade e da posição requer duas integrais sucessivas.

- Três classes de movimento podem ser definidas para:
  - aceleração dada em função do *tempo*, $a = f(t)$
  - aceleração dada em função da *posição*, $a = f(x)$
  - aceleração dada em função da *velocidade*, $a = f(v)$

# Determinação do Movimento de uma Partícula

- Aceleração dada em função do *tempo*, $a = f(t)$:

$$\frac{dv}{dt} = a = f(t) \qquad dv = f(t)\,dt \qquad \int_{v_0}^{v(t)} dv = \int_0^t f(t)\,dt \qquad v(t) - v_0 = \int_0^t f(t)\,dt$$

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \qquad dx = v(t)\,dt \qquad \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t v(t)\,dt \qquad x(t) - x_0 = \int_0^t v(t)\,dt$$

- Aceleração dada em função da *posição*, $a = f(x)$:

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \text{ou} \quad dt = \frac{dx}{v} \qquad a = \frac{dv}{dt} \quad \text{ou} \quad a = v\frac{dv}{dx} = f(x)$$

$$v\,dv = f(x)\,dx \qquad \int_{v_0}^{v(x)} v\,dv = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \qquad \tfrac{1}{2}v(x)^2 - \tfrac{1}{2}v_0^2 = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

# Determinação do Movimento de uma Partícula

- Aceleração dada em função da *velocidade*, $a = f(v)$:

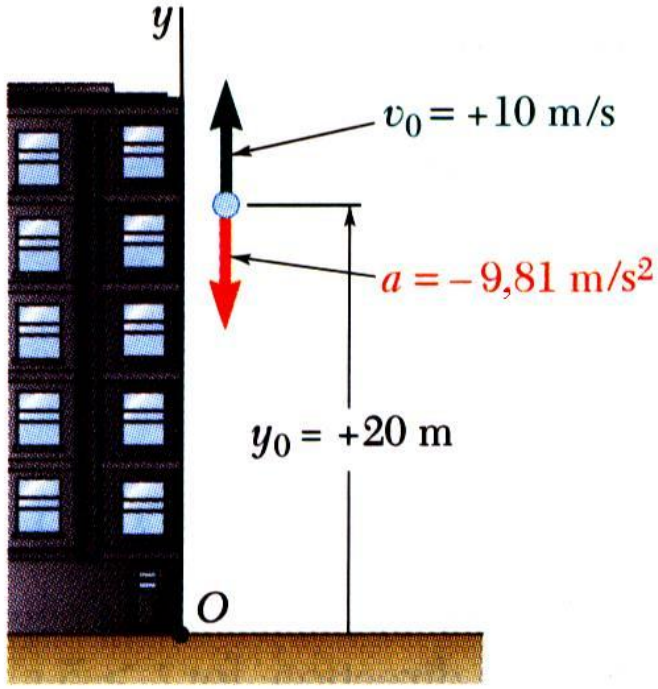
$$\frac{dv}{dt} = a = f(v) \qquad \frac{dv}{f(v)} = dt \qquad \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{f(v)} = \int_0^t dt$$

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{f(v)} = t$$

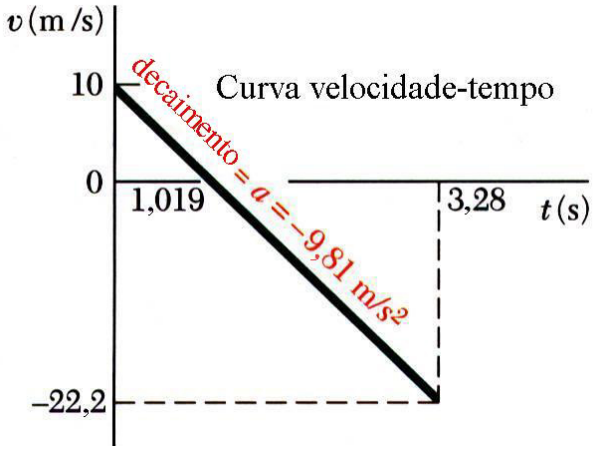
$$v\frac{dv}{dx} = a = f(v) \qquad dx = \frac{v\,dv}{f(v)} \qquad \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{v_0}^{v(t)} \frac{v\,dv}{f(v)}$$

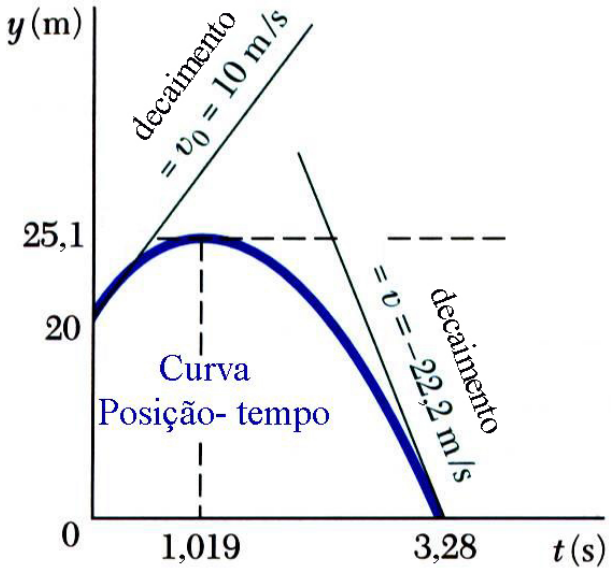
$$x(t) - x_0 = \int_{v_0}^{v(t)} \frac{v\,dv}{f(v)}$$

Ex. 11.2: Uma esfera é lançada com velocidade vertical de 10 m/s de uma janela 20 m acima do chão.
Determine:
- a velocidade e a elevação acima do chão no tempo *t*,
- a maior elevação alcançada pela esfera e o tempo correspondente, e
- o tempo em que a esfera baterá no chão e a velocidade correspondente.



## Ex. 11.2


v (m/s)
10
0
–22,2
1,019
3,28
t (s)
Curva velocidade-tempo
decaimento = a = –9,81 m/s²


y (m)
25,1
20
0
1,019
3,28
t (s)
decaimento
= v₀ = 10 m/s
Curva
Posição- tempo
decaimento
= v = –22,2 m/s

# Movimento Retilíneo Uniforme - MRU

Para a partícula em movimento retilíneo uniforme, a aceleração é zero e a velocidade é constante.

$$\frac{dx}{dt} = v = \text{constante}$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = v \int_{0}^{t} dt$$

$$x - x_0 = vt$$

$$x = x_0 + vt$$

# Movimento Retilíneo Uniformemente Variado - MRUV

Para partícula em movimento retilíneo uniformemente variado, a aceleração da partícula é constante.

$$\frac{dv}{dt} = a = \text{constante} \qquad \int_{v_0}^{v} dv = a\int_{0}^{t} dt \qquad v - v_0 = at$$

$$v = v_0 + at$$

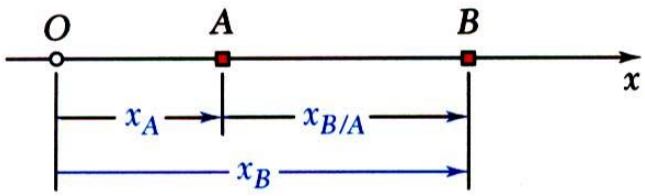
$$\frac{dx}{dt} = v_0 + at \qquad \int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} (v_0 + at)\,dt \qquad x - x_0 = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

$$v\frac{dv}{dx} = a = \text{constante} \qquad \int_{v_0}^{v} v\,dv = a\int_{x_0}^{x} dx \qquad \tfrac{1}{2}\left(v^2 - v_0^2\right) = a\left(x - x_0\right)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a\left(x - x_0\right)$$

# Movimento Relativo de Várias Partículas




- Para partículas se movendo ao longo da mesma linha, o tempo deve ser registrado a partir do mesmo instante inicial e os deslocamentos devem ser medidos a partir da mesma origem na mesma direção.



$$x_{B/A} = x_B - x_A = \text{posição relativa de } B \text{ com relação a } A$$

$$x_B = x_A + x_{B/A}$$

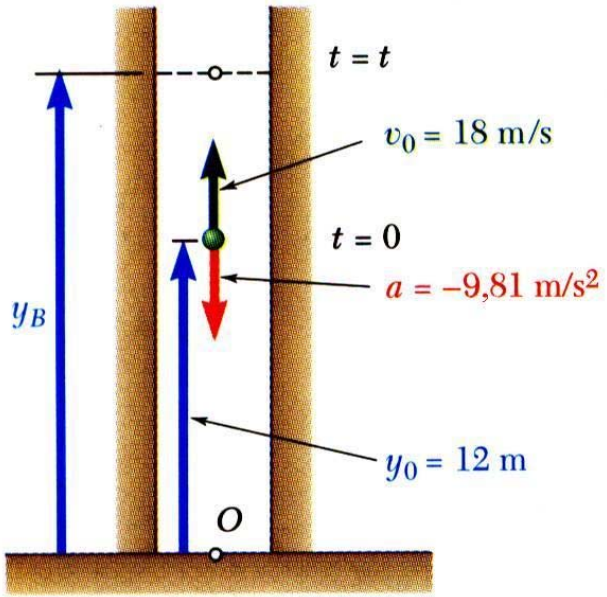
$$v_{B/A} = v_B - v_A = \text{velocidade relativa de } B \text{ com relação a } A$$

$$v_B = v_A + v_{B/A}$$

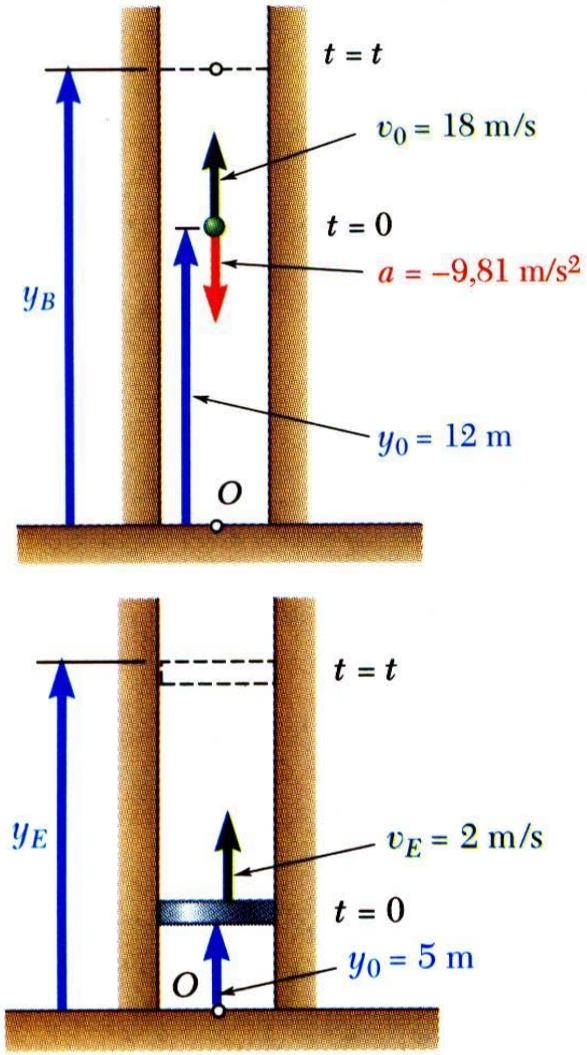
$$a_{B/A} = a_B - a_A = \text{aceleração relativa de } B \text{ com relação a } A$$

$$a_B = a_A + a_{B/A}$$

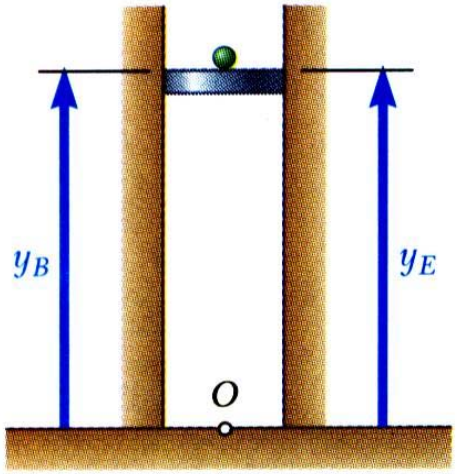
Ex. 11.4: Uma esfera é jogada verticalmente a partir de 12 m de altura no vão do elevador com velocidade inicial de 18 m/s. No mesmo instante, a plataforma do elevador passa na altura de 5 m se movendo para cima a 2 m/s.
Determine (*a*) quando e onde a esfera bate no elevador e (*b*) a velocidade relativa da esfera e do elevador em contato.



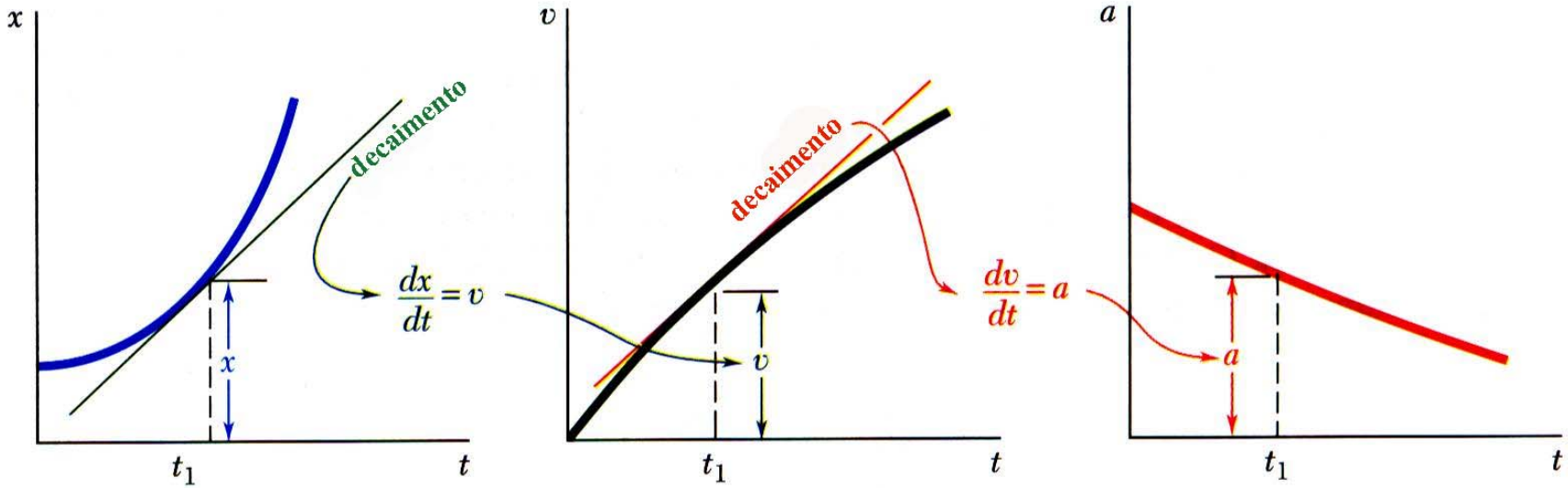
# Ex. 11.4



## Ex. 11.4



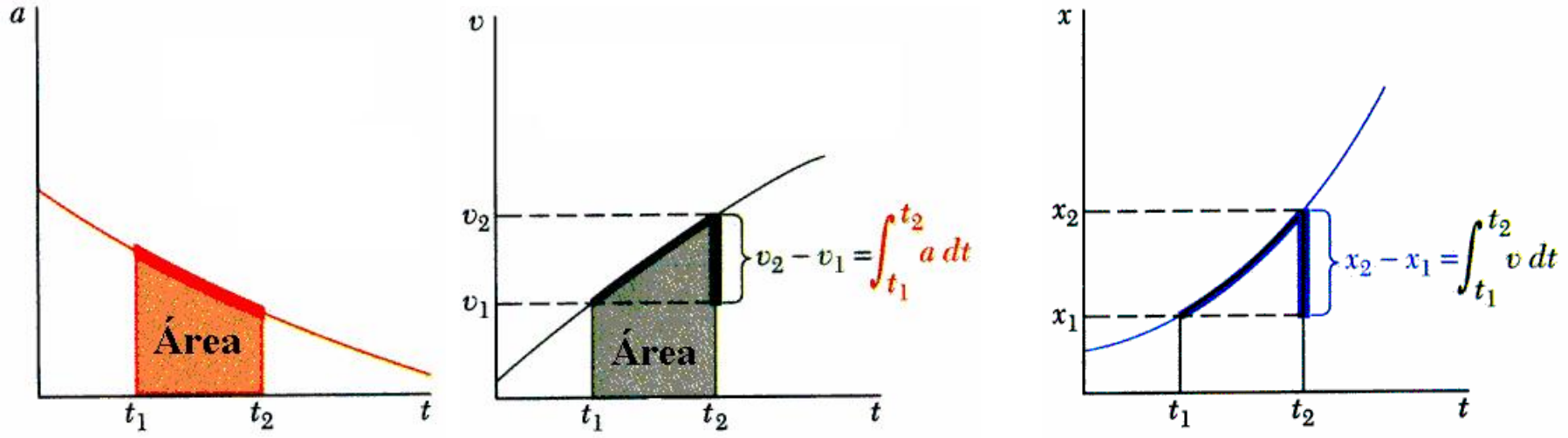
# Solução Gráfica de Problemas com Movimento Retilíneo




- Dada a curva *x*-*t*, a curva *v*-*t* é igual ao decaimento da curva *x*-*t*.

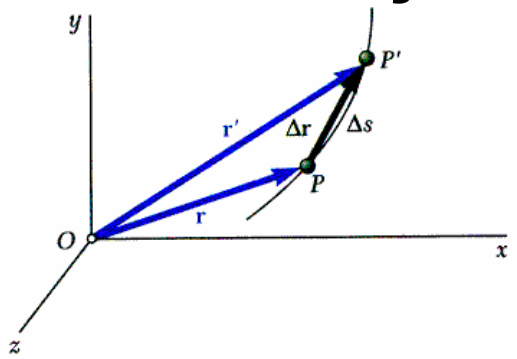
- Dada a curva *v*-*t*, a curva $a$-*t* é igual ao decaimento da curva *v*-*t*.

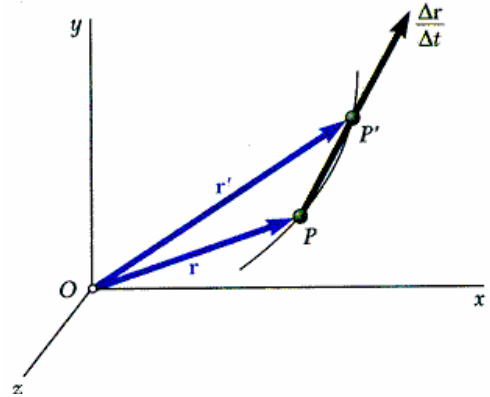
# Solução Gráfica de Problemas com Movimento Retilíneo

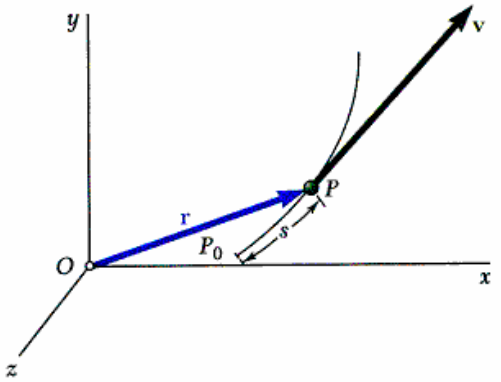



- Dada a curva *a*-*t*, a mudança em velocidade entre $t_1$ e $t_2$ é igual à área embaixo da curva *a*-*t* entre $t_1$ e $t_2$.
- Dada a curva *v*-*t*, a mudança em posição entre $t_1$ e $t_2$ é igual à área embaixo da curva *v*-*t* entre $t_1$ e $t_2$.

# Movimento Curvilíneo: Posição, Velocidade e Aceleração




- Uma partícula se movendo ao longo de uma curva, e não de uma linha reta, está em *movimento curvilíneo*.
- O *vetor posição* de uma partícula no tempo *t* é definido por um vetor entre a origem *O* de um referencial fixo e a posição ocupada pela partícula.
- Considere a partícula que ocupa a posição *P* definida por **r** no tempo $t$ e *P′* definido por **r'** em $t + \Delta t$,

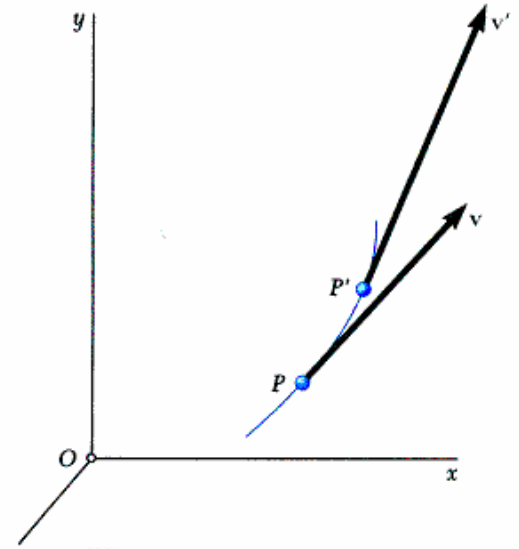
$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

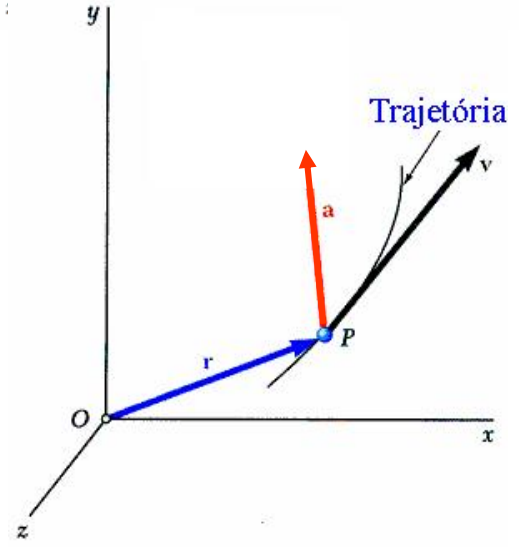
$=$ velocidade instantânea (vetor)

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

$=$ velocidade instantânea (escalar)

# Movimento Curvilíneo: Posição, Velocidade e Aceleração



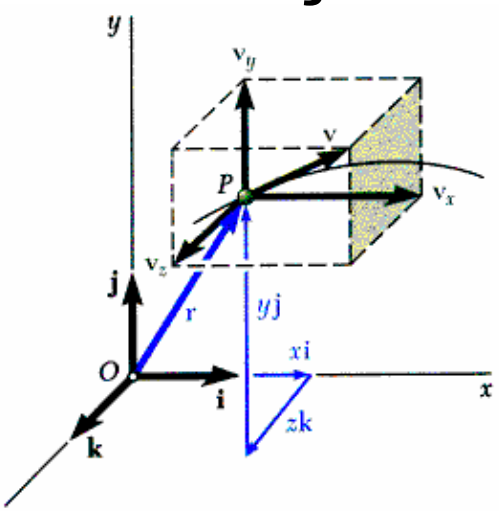

- Considere a velocidade **v** da partícula no tempo $t$ e a velocidade **v'** em $t + \Delta t$,

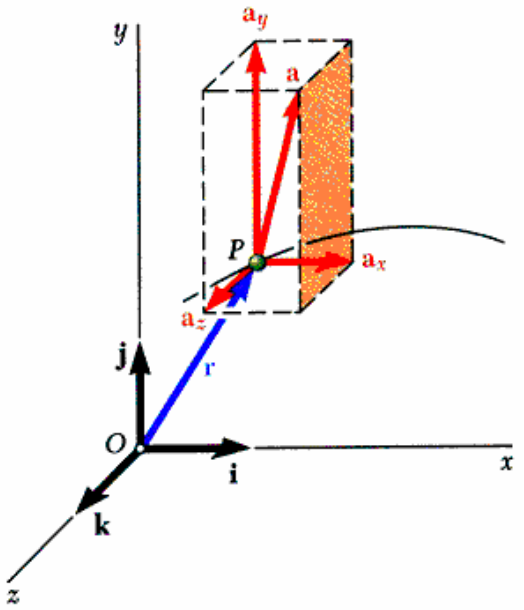
$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$=$ aceleração instantânea (vetor)

- Em geral, o vetor aceleração não é tangente à trajetória da partícula e ao vetor velocidade.

# Componentes Retangulares de Velocidade e Aceleração




- Quando o vetor posição da partícula *P* é dado por seus componentes retangulares,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

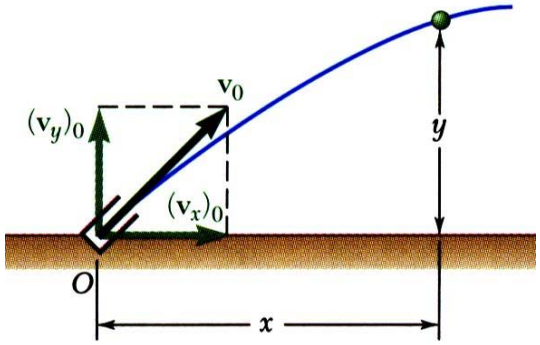
- Vetor velocidade,

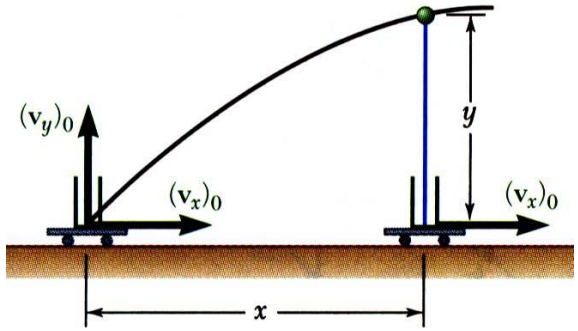
$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$$
$$= v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$$

- Vetor Aceleração,

$$\mathbf{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}$$
$$= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

# Componentes Retangulares de Velocidade e Aceleração






- Componentes retangulares são particularmente eficazes quando componentes das acelerações podem ser integrados independentemente, por exemplo, movimento de um projétil,

$$a_x = \ddot{x} = 0 \qquad a_y = \ddot{y} = -g \qquad a_z = \ddot{z} = 0$$

com condições iniciais,

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0 \qquad (v_x)_0 , (v_y)_0 \neq 0$$

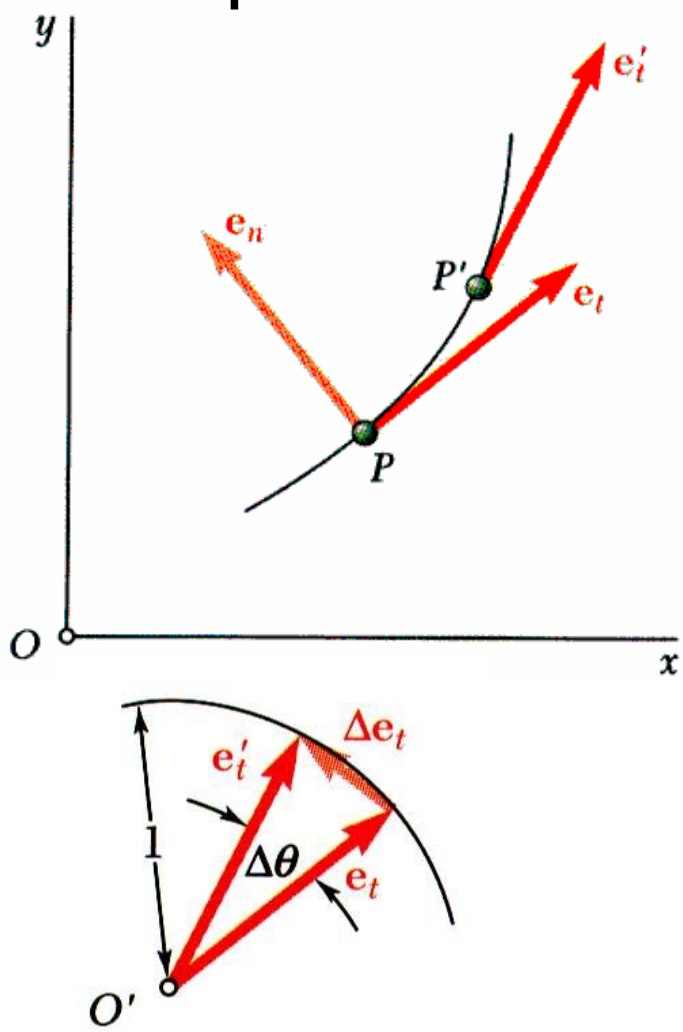
Integrando duas vezes leva a:

$$v_x = (v_x)_0 \qquad v_y = (v_y)_0 - gt \qquad v_z = 0$$

$$x = (v_x)_0 \, t \qquad y = (v_y)_0 \, y - \tfrac{1}{2} g t^2 \qquad z = 0$$

- O movimento na direção horizontal é uniforme.
- O movimento na direção vertical é uniformemente acelerado.
- O movimento do projétil poderia ser substituído por dois movimentos retilíneos independentes.

# Componentes Tangenciais e Normais




- O vetor velocidade é tangente à trajetória da partícula. Em geral, o vetor aceleração não é. Queremos expressar o vetor aceleração em termos dos componentes tangenciais e normais.

- $\mathbf{e}_t$ e $\mathbf{e}'_t$ são os vetores unitários tangenciais para a trajetória da partícula em *P* e *P′*. Quando expressos com relação à mesma origem, $\Delta\mathbf{e}_t = \mathbf{e}'_t - \mathbf{e}_t$ e $\Delta\theta$ é o ângulo entre eles.

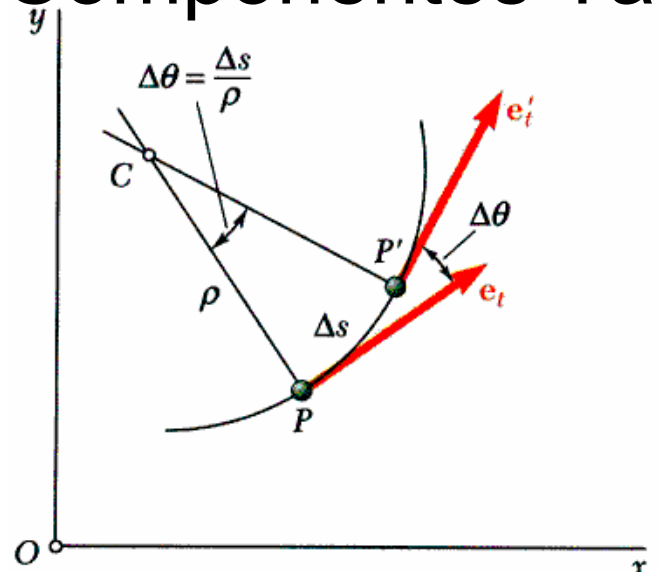
$$\Delta e_t = 2\sin\left(\Delta\theta/2\right)$$

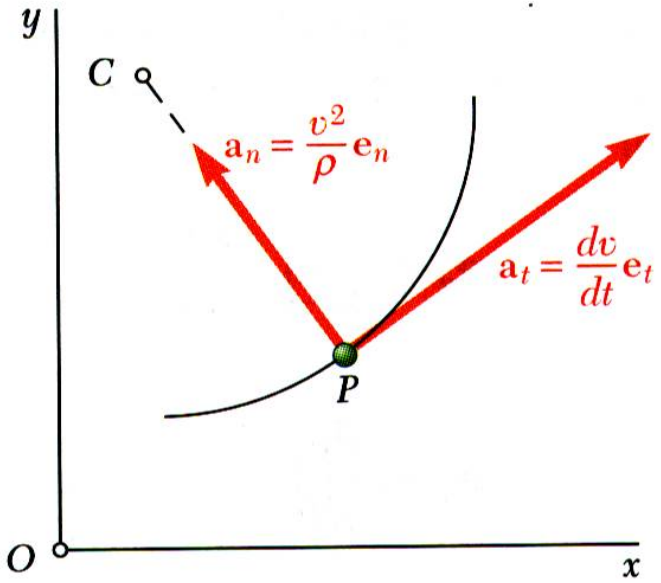
$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta\mathbf{e}_t}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin\left(\Delta\theta/2\right)}{\Delta\theta/2}\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_n$$

$$\mathbf{e}_n = \frac{d\mathbf{e}_t}{d\theta}$$



# Componentes Tangencial e Normal




- Com o vetor velocidade expresso como $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_t$, a aceleração da partícula pode ser escrita como

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + v\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + v\frac{d\mathbf{e}}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt}$$

mas

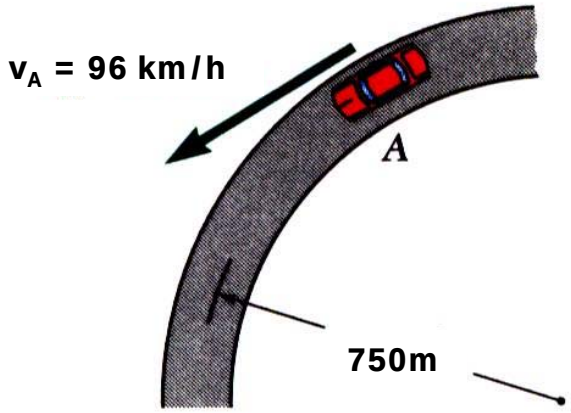
$$\frac{d\mathbf{e}_t}{d\theta} = \mathbf{e}_n \qquad \rho\, d\theta = ds \qquad \frac{ds}{dt} = v$$

Após substituir,

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n \qquad a_t = \frac{dv}{dt} \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

- A componente tangencial da aceleração reflete a mudança na velocidade e a componente normal reflete a mudança na direção.
- A componente tangencial pode ser positiva ou negativa. A componente normal sempre aponta para o centro de curvatura da trajetória.

Ex. 11.10: Um motorista está viajando na seção curva da estrada a 96 km/h. O motorista aciona o freio causando uma desaceleração constante. Sabendo que após 8 s a velocidade foi reduzida para 72 km/h, determine a aceleração do automóvel imediatamente após o freio ser acionado.



## Ex. 11.10

