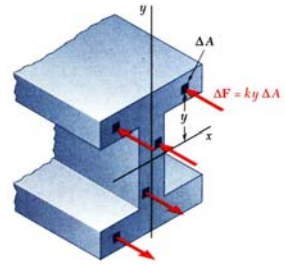


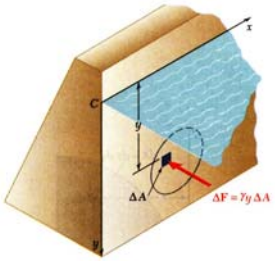
Cap. IX – Momentos de Inércia de Áreas

Conteúdo

Momento de Inércia de uma Área
Momento de Inércia de uma Área por Integração
Momento Polar de Inércia
Raio de Giração de uma Área
Problema Exemplo 9.1
Problema Exemplo 9.2
Teorema dos Eixos Paralelos
Momentos de Inércia de Áreas Compostas
Problema Exemplo 9.4
Problema Exemplo 9.5

Momento de Inércia de uma Área





- Considere as forças distribuídas $\Delta \mathbf{F}$ cujas amplitudes são proporcionais às áreas elementares ΔA, nas quais elas agem, e variam linearmente com a distância de ΔA a um dado eixo.
- Exemplo: Considere uma viga sujeita à flexão pura. As forças internas variam linearmente com a distância à linha neutra que passa através do centróide da seção.

$$\Delta \mathbf{F} = ky\Delta A$$

$$R = k\int y\,dA = 0 \qquad \int y\,dA = Q_x = \text{ primeiro momento}$$

$$M = k\int y^2 dA \qquad \int y^2 dA = \text{ segundo momento}$$

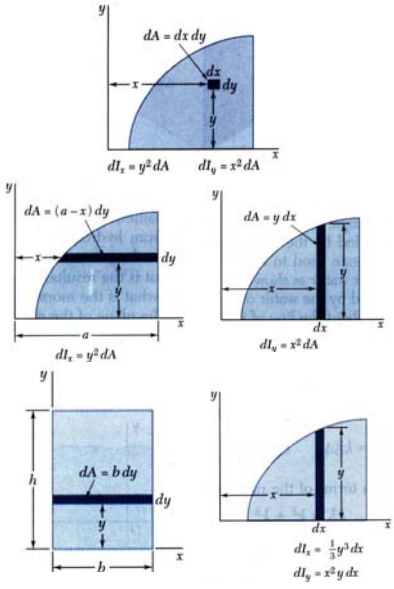
- Exemplo: Considere a força hidrostática em um portão circular submerso.

$$\Delta F = p\Delta A = \gamma y \Delta A$$

$$R = \gamma \int y\,dA$$

$$M_x = \gamma \int y^2 dA$$

Momento de Inércia de uma Área por Integração



- *Segundos momentos* ou *momentos de inércia* de uma área com relação aos eixos *x* e *y*,

$$I_x = \int y^2 dA \qquad I_y = \int x^2 dA$$

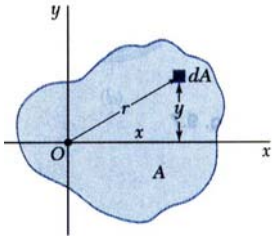
- A avaliação das integrais é simplificada escolhendo *dA* como uma tira fina paralela a um dos eixos das coordenadas.
- Para uma área retangular,

$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 b\,dy = \tfrac{1}{3} bh^3$$

- A fórmula para áreas retangulares também pode ser aplicada a tiras paralelas aos eixos,

$$dI_x = \tfrac{1}{3} y^3 dx \qquad dI_y = x^2 dA = x^2 y\,dx$$

Momento Polar de Inércia



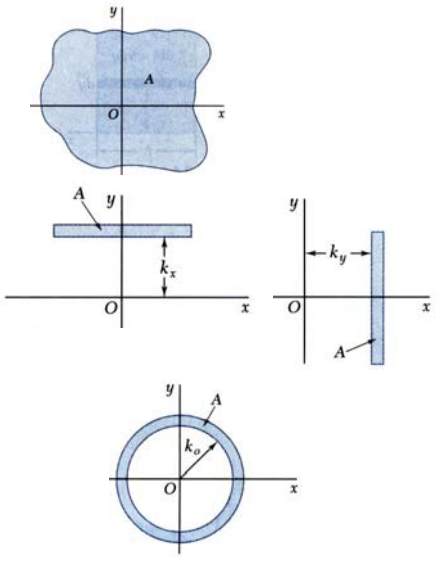
- O *momento polar de inércia* é um parâmetro importante nos problemas envolvendo torsão de eixos cilíndricos.

$$J_0 = \int r^2 dA$$

- O momento polar de inércia está relacionado aos momentos retangulares de inércia,

$$J_0 = \int r^2 dA = \int \left(x^2 + y^2\right) dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA$$
$$= I_y + I_x$$

Raio de Giração de uma Área



- Considere uma área *A* com momento de inércia I_x. Imagine que a área está concentrada numa tira fina paralela ao eixo *x* com equivalente I_x.

$$I_x = k_x^2 A \qquad k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

k_x = *raio de giração* com relação ao eixo *x*.

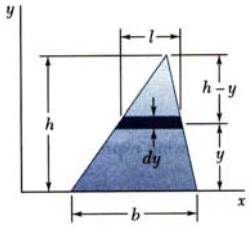
- Similarmente,

$$I_y = k_y^2 A \quad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

$$J_O = k_O^2 A \quad k_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}}$$

$$k_O^2 = k_x^2 + k_y^2$$

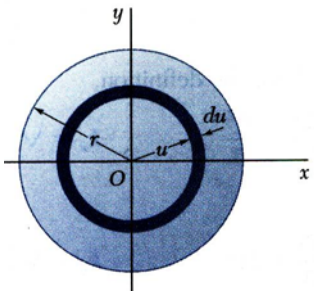
Ex. 9.1: Determine o momento de inércia de um triângulo em relação a sua base.



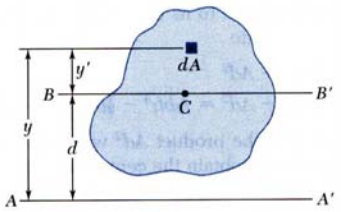
Ex. 9.2:

a) Determine o momento de inércia polar de uma área circular por integração direta.

b) Usando o resultado do item *a*, determine o momento de inércia de uma área circular em relação a um diâmetro.



Teorema dos Eixos Paralelos



- Considere o momento de inércia I de uma área A com relação ao eixo AA'

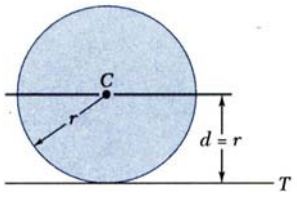
$$I = \int y^2 dA$$

- O eixo BB' passa através do centróide de área e é chamado um *eixo centroidal.*

$$I = \int y^2 dA = \int (y' + d)^2 dA$$
$$= \int y'^2 dA + 2d \int y' dA + d^2 \int dA$$

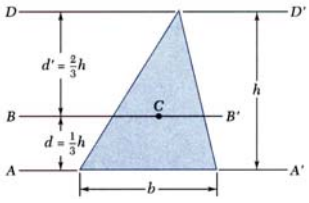
$$I = \bar{I} + Ad^2 \quad \textit{Teorema dos eixos paralelos}$$

Teorema dos Eixos Paralelos



- Momento de inércia I_T de uma área circular com relação à tangente do círculo,

$$I_T = \bar{I} + Ad^2 = \tfrac{1}{4}\pi r^4 + \left(\pi r^2\right) r^2$$
$$= \tfrac{5}{4}\pi r^4$$

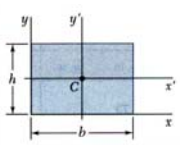
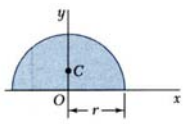
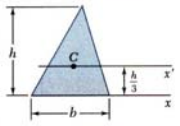
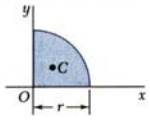
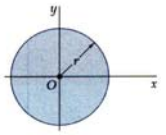
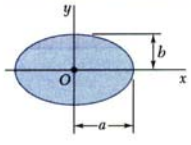


- Momento de inércia de um triângulo com relação a um eixo centroidal,

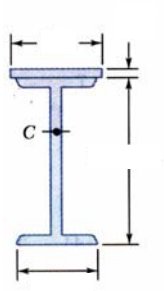
$$I_{AA'} = \bar{I}_{BB'} + Ad^2$$
$$I_{BB'} = I_{AA'} - Ad^2 = \tfrac{1}{12} bh^3 - \tfrac{1}{2} bh\left(\tfrac{1}{3} h\right)^2$$
$$= \tfrac{1}{36} bh^3$$

Momentos de Inércia de Áreas Compostas

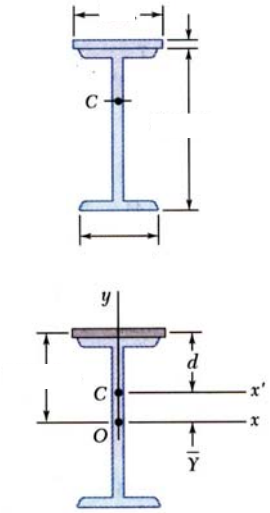
- O momento de inércia de uma área composta A em relação a um dado eixo é obtido adicionando os momentos de inércia das áreas componentes A_1, A_2, A_3, ... , com relação ao mesmo eixo.

Retângulo		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_y = \frac{1}{3}b^3h$ $J_C = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$	Semi-círculo		$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4}\pi r^4$
Triângulo		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3$	Quarto de círculo		$I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8}\pi r^4$
Círculo		$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{2}\pi r^4$	Elipse		$\bar{I}_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi a^3 b$ $J_O = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$

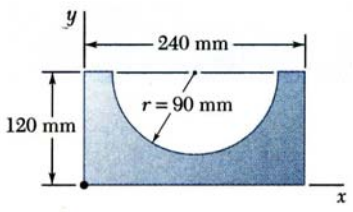
Ex. 9.4: A força de uma viga de aço é aumentada unindo uma placa à sua flange superior. Determine o momento de inércia e o raio de giração com relação a um eixo que é paralelo à placa e passa através do centróide da seção.



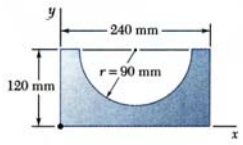
Ex. 9.4:

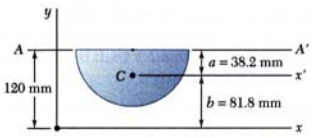


Ex. 9.5: Determine o momento de inércia da área pintada em relação ao eixo *x*.



Ex. 9.5





Ex. 9.5

