

Cap. V – Centros de Gravidade e Centróides de Áreas

Conteúdo

- Introdução
- Centro de Gravidade de um Corpo 2D
- Centróides e Primeiros Momentos de Áreas e Linhas
- Centróides de Áreas Comuns
- Centróides de Formas de Linhas Comuns
- Placas e Áreas Compostas
- Problema Exemplo 5.1
- Determinação de Centróides por Integração
- Problema Exemplo 5.2

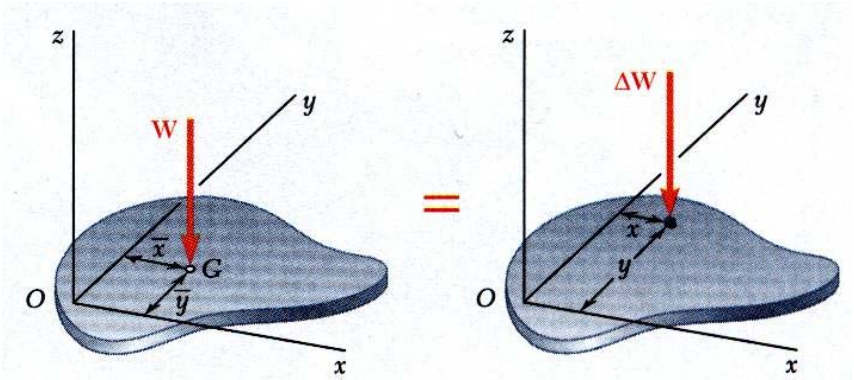
Introdução

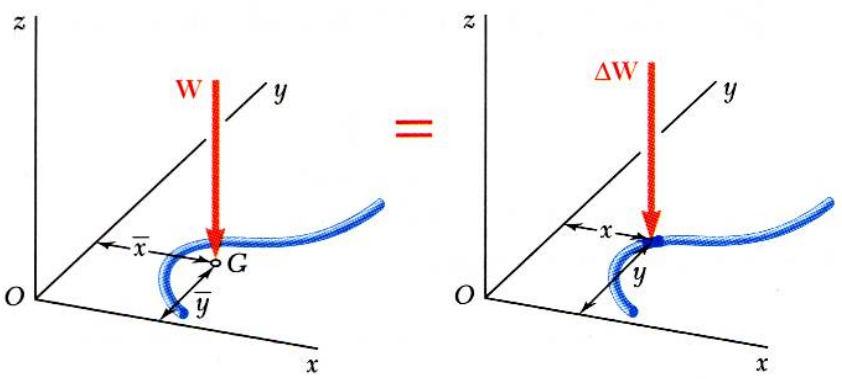
- A terra exerce uma força gravitacional em cada uma das partículas que formam um corpo. Estas forças podem ser substituídas por uma única força equivalente, igual ao peso do corpo, aplicada no seu *centro de gravidade*.

- O *centróide de uma área* é análogo ao centro de gravidade de um corpo. O conceito de *primeiro momento de uma área* é usado para encontrar o centróide. O *centróide* pode ser considerado como o "centro geométrico" da área em questão.

Centro de Gravidade de um Corpo 2D

- Centro de gravidade de uma placa
- Centro de gravidade de um fio

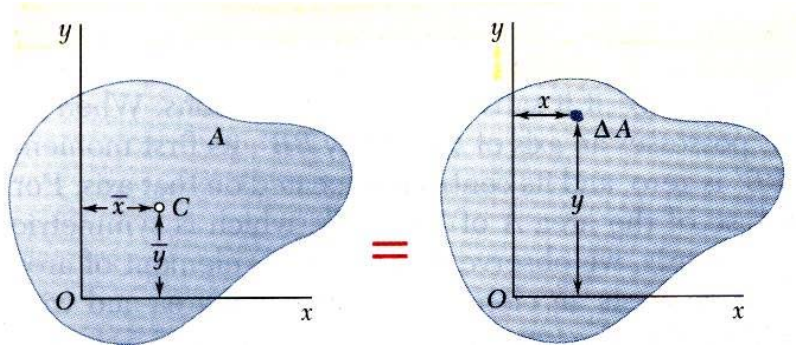




$$\sum M_y \quad \bar{x}W = \sum x\Delta W$$
$$= \int x\, dW$$
$$\sum M_x \quad \bar{y}W = \sum y\Delta W$$
$$= \int y\, dW$$

Centróides e Primeiros Momentos de Áreas e Linhas

- Centróide de uma área



$$\bar{x}W = \int x\,dW$$

$$\bar{x}(\gamma At) = \int x(\gamma t)\,dA$$

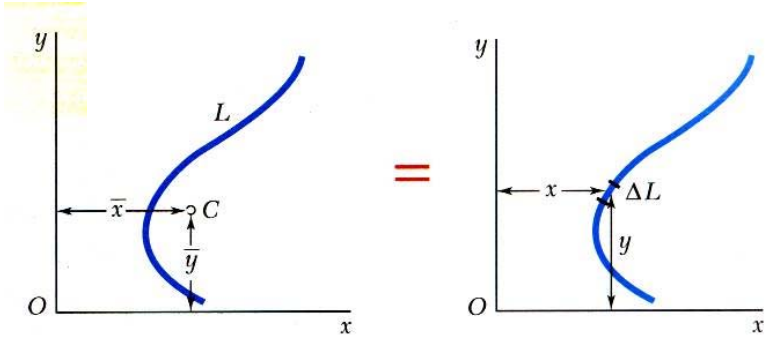
$$\bar{x}A = \int x\,dA = Q_y$$

$$= \text{ primeiro momento com relação a } y$$

$$\bar{y}A = \int y\,dA = Q_x$$

$$= \text{ primeiro momento com relação a } x$$

- Centróide de uma linha



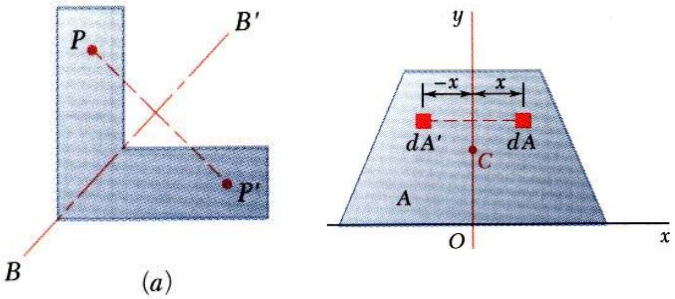
$$\bar{x}W = \int x\,dW$$

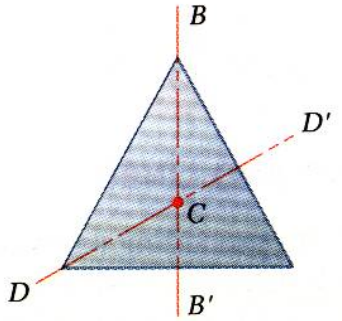
$$\bar{x}(\gamma La) = \int x(\gamma a)\,dL$$

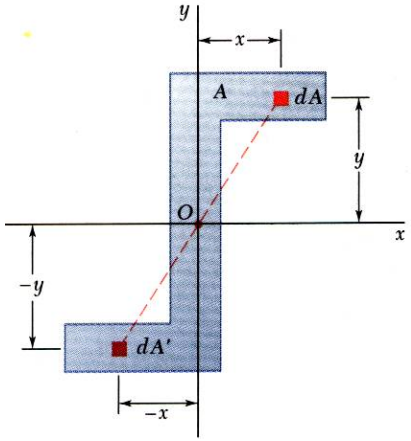
$$\bar{x}L = \int x\,dL$$

$$\bar{y}L = \int y\,dL$$

Primeiros Momentos de Áreas e Linhas

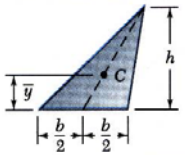
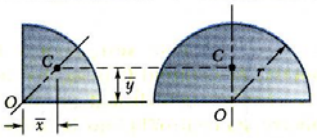
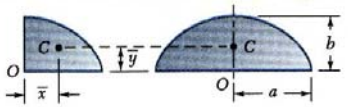
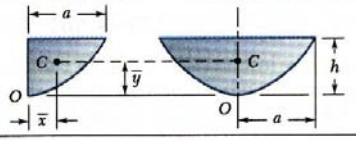
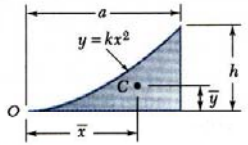
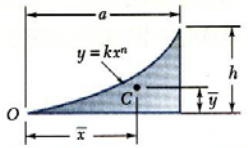
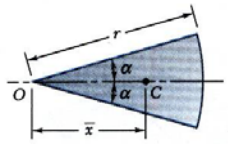




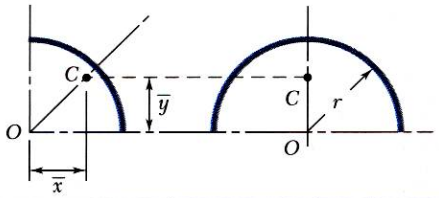
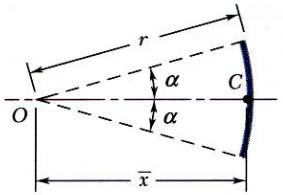


- Uma área é simétrica com relação a um eixo *BB'* se para cada ponto *P* existir um ponto *P'* tal que *PP'* seja perpendicular a *BB'* e seja dividida em duas partes iguais por *BB'.*
- O primeiro momento de uma área com relação a uma linha de simetria é zero.
- Se uma área possui uma linha de simetria, seu centróide se encontra naquele eixo.
- Se uma área possui duas linhas de simetria, seu centróide se encontra na interseção dessas linhas.
- Uma área é simétrica com relação a um centro *O,* se para cada elemento *dA* em (*x,y*) existir uma área *dA'* de área igual em (*-x,-y*).
- O centróide da área coincide com o centro de simetria.

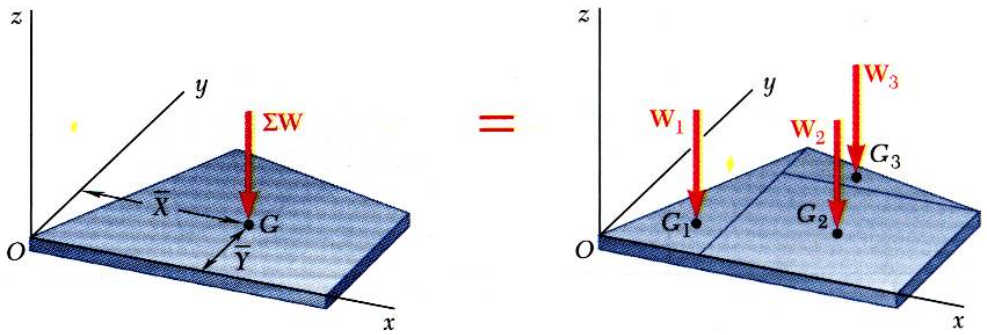
Centróides de Áreas Comuns

Forma		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Area
Triângulo			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Quarto de círculo		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Semi-círculo		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Quarto de elípse		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Semi-elípse		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Semi-Parábola		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Parábola		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Setor de Parábola		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Setor de Curva em Geral		$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{4n+2}h$	$\frac{ah}{n+1}$
Setor Circular		$\frac{2r\sin\alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

Centróides de Formas de Linhas Comuns

Forma		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Comprimento
Quarto de circunferência		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Semi circunferência		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arco de circunferência		$\frac{r \sin \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

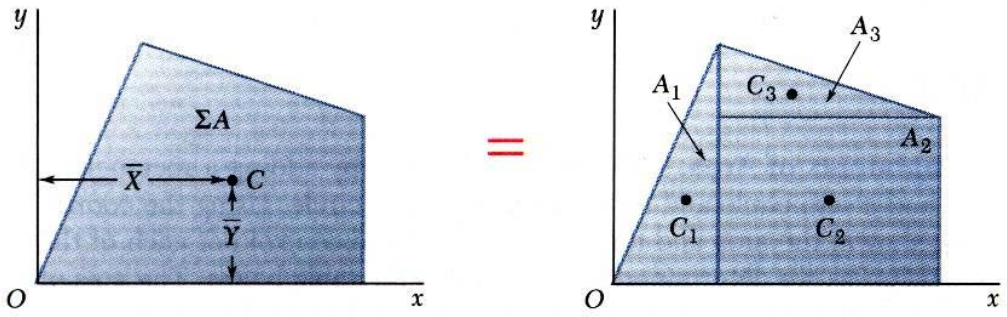
Placas e Áreas Compostas



- Placas compostas

$$\bar{X}\sum W = \sum \bar{x} W$$

$$\bar{Y}\sum W = \sum \bar{y} W$$

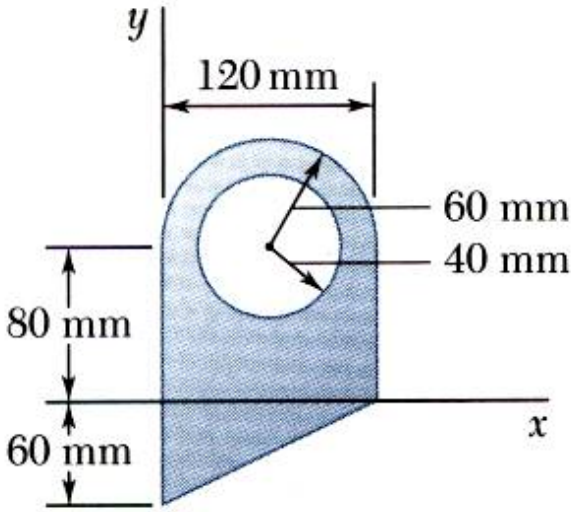


- Área composta

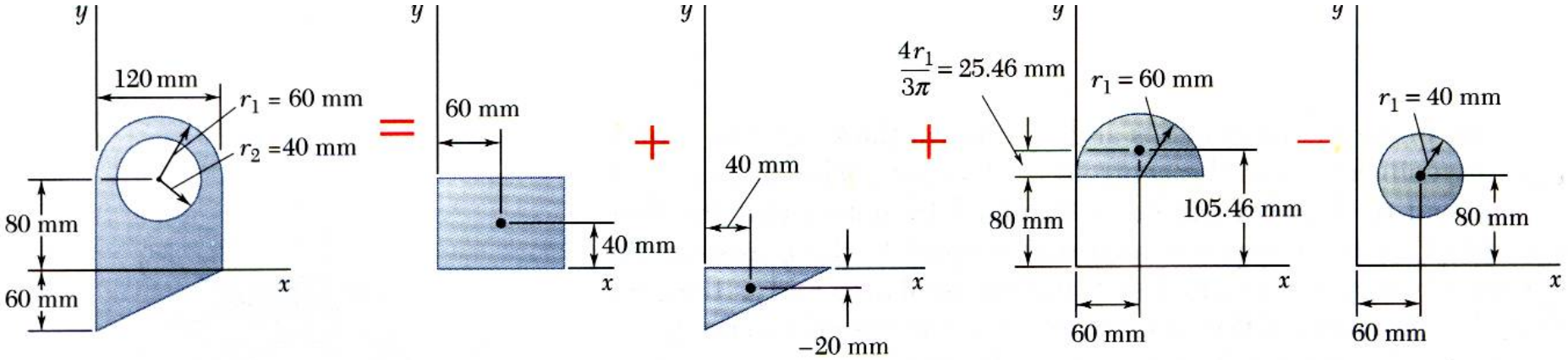
$$\bar{X}\sum A = \sum \bar{x} A$$

$$\bar{Y}\sum A = \sum \bar{y} A$$

Ex. 5.1: Para a área plana mostrada, determine os primeiros momentos com relação aos eixos *x* e *y* e a localização do centróide.

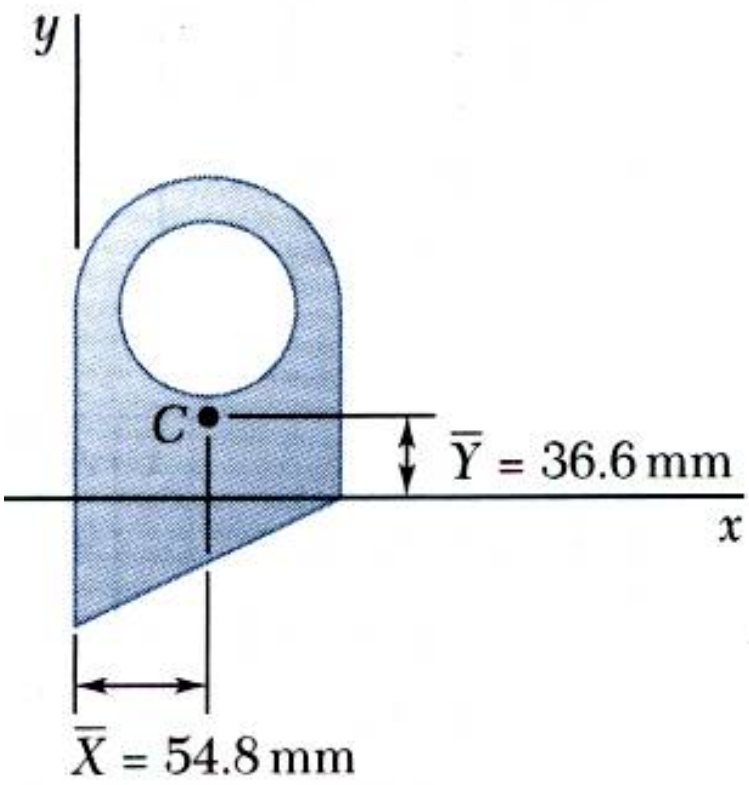


Ex. 5.1



Componente	A, mm²	$\bar{x}$, mm	$\bar{y}$, mm	$\bar{x}A$, mm³	$\bar{y}A$, mm³
Retângulo	$(120)(80) = 9.6 \times 10^3$	60	40	$+576 \times 10^3$	$+384 \times 10^3$
Triângulo	$\frac{1}{2}(120)(60) = 3.6 \times 10^3$	40	−20	$+144 \times 10^3$	-72×10^3
Semi-Círculo	$\frac{1}{2}\pi(60)^2 = 5.655 \times 10^3$	60	105.46	$+339.3 \times 10^3$	$+596.4 \times 10^3$
Círculo	$-\pi(40)^2 = -5.027 \times 10^3$	60	80	-301.6×10^3	-402.2×10^3
	$\Sigma A = 13.828 \times 10^3$			$\Sigma\bar{x}A = +757.7 \times 10^3$	$\Sigma\bar{y}A = +506.2 \times 10^3$

Ex. 5.1

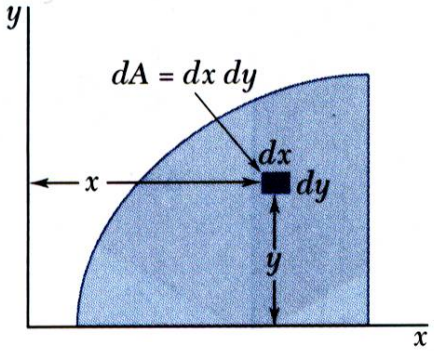


Determinação de Centróides por Integração

$$\bar{x}A = \int x\,dA = \iint x\,dx\,dy = \int \bar{x}_{el}\,dA$$

$$\bar{y}A = \int y\,dA = \iint y\,dx\,dy = \int \bar{y}_{el}\,dA$$

- A integração dupla para encontrar o primeiro momento pode ser evitada definindo-se *dA* como um retângulo (vertical ou horizontal) de lado infinitesimal.

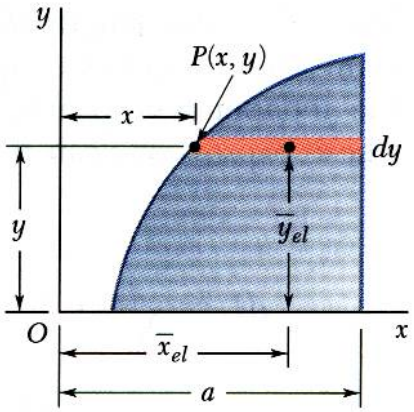


$$\bar{x}A = \int \bar{x}_{el}\,dA$$

$$= \int x\,(y\,dx)$$

$$\bar{y}A = \int \bar{y}_{el}\,dA$$

$$= \int \frac{y}{2}(y\,dx)$$

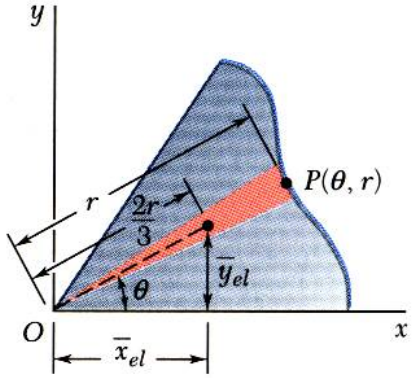


$$\bar{x}A = \int \bar{x}_{el}\,dA$$

$$= \int \frac{a+x}{2}\left[(a-x)\,dx\right]$$

$$\bar{y}A = \int \bar{y}_{el}\,dA$$

$$= \int y\left[(a-x)\,dx\right]$$



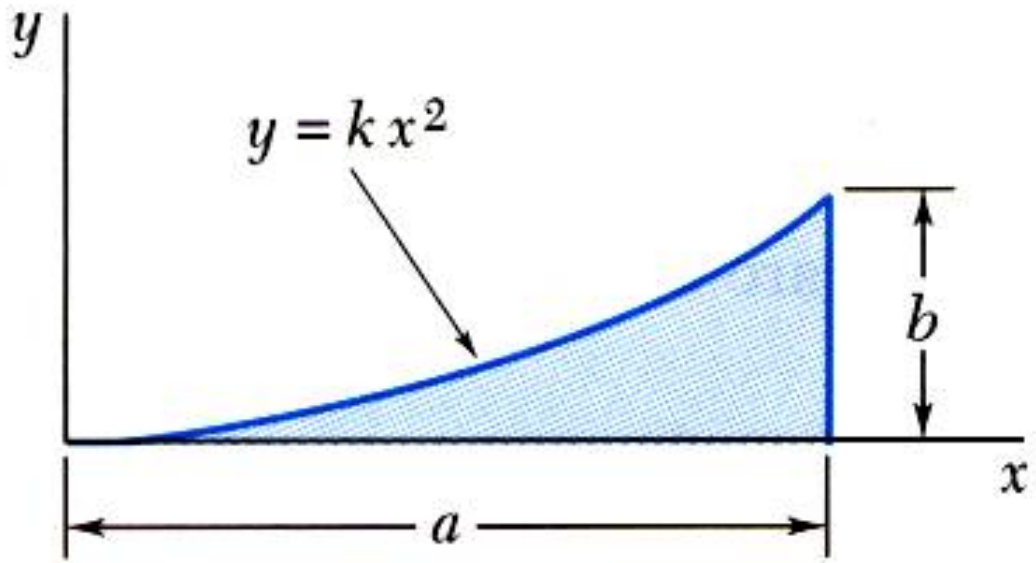
$$\bar{x}A = \int \bar{x}_{el}\,dA$$

$$= \int \frac{2r}{3}\cos\theta\left(\frac{1}{2}r^2 d\theta\right)$$

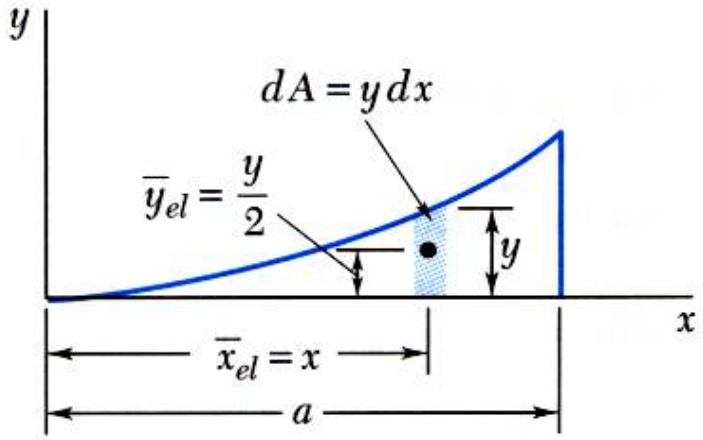
$$\bar{y}A = \int \bar{y}_{el}\,dA$$

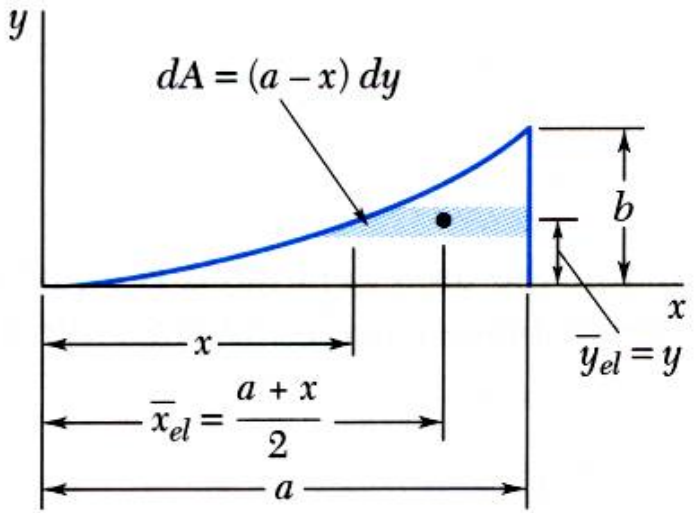
$$= \int \frac{2r}{3}\sin\theta\left(\frac{1}{2}r^2 d\theta\right)$$

Ex. 5.4: Determine por integração direta a localização do centróide do setor parabólico abaixo.



Ex. 5.4


y
dA = y dx
$\bar{y}_{el} = \frac{y}{2}$
y
x
$\bar{x}_{el} = x$
a


y
dA = (a – x) dy
b
x
x
$\bar{y}_{el} = y$
$\bar{x}_{el} = \frac{a + x}{2}$
a