

Cap. II - Estática da Partícula

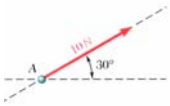
Conteúdo

- Introdução
- Resultante de Duas Forças
- Vetores
- Adição de Vetores
- Sistema de Forças Concorrentes
- Problema Exemplo 2.1
- Componentes Retangulares de uma Força: Vetores Unitários
- Adição de Forças pela Soma das Componentes
- Problema Exemplo 2.3
- Equilíbrio de uma Partícula
- Diagrama de Corpo Livre
- Problema Exemplo 2.4
- Problema Exemplo 2.6
- Componentes Retangulares no Espaço

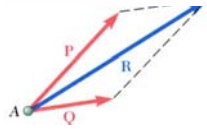
Introdução

- O objetivo deste capítulo é investigar os efeitos de forças sobre partículas, com destaque para os seguintes pontos:
  - Substituição de um sistema de forças agindo numa partícula por uma força *resultante,*
  - Avaliação das relações entre forças agindo sobre uma partícula que está em um estado de equilíbrio.
- O foco na *partícula* não implica em uma restrição a pequenos corpos. Na realidade, o estudo é restrito à análise na qual o tamanho e o formato dos corpos não é significativo, de forma que todas as forças podem ser assumidas como aplicadas em um ponto único do corpo.

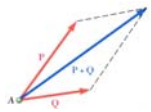
Resultante de duas forças



- **Força**: ação de um corpo sobre outro; caracterizada por *seu ponto de aplicação, intensidade, linha de ação e sentido*.



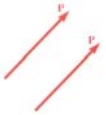
- Resultados experimentais mostram que o efeito combinado de duas forças pode ser representado por uma força única, chamada *Resultante*
- Graficamente, a Resultante é equivalente à diagonal do paralelogramo que contem as duas forças em lados adjacentes.
- A força é uma grandeza vetorial.



- ***Vetor***: entidade que possui intensidade e direção, e cuja adição obedece à lei do paralelogramo.

  Ex: deslocamento, velocidade, aceleração, força, etc.
- ***Escalar***: entidade que possui intensidade, apenas.

  Ex: massa, volume e temperatura.
- **Classificação de Vetores**:

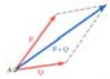


- ***Fixos***: vetores que possuem ponto bem definido de aplicação, cuja mudança altera o resultado da análise;
  Ex: Força sobre um corpo não rígido.
- ***Livres***: vetores que podem ser movidos livremente no espaço sem causar alteração no resultado da análise.
  Ex: Momento de um binário.



- ***Deslizantes***: vetores que podem ser aplicados em qualquer ponto de sua linha de ação sem causar alteração no resultado da análise.
  Ex: Força sobre um corpo rígido.
- ***Iguais***: vetores com a mesma intensidade e direção
- ***Negativo***: vetor com a mesma intensidade, porém com sentido contrário a um dado vetor.

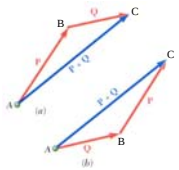
Adição de Vetores



- Regra do Pararalelogramo
  - Regra do Triângulo
  - Lei dos cosenos:

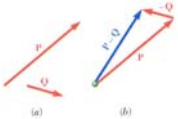
$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos B$$

R = P + Q



  - Lei dos Senos:

$$\frac{\text{sen}A}{Q} = \frac{\text{sen}B}{R} = \frac{\text{sen}C}{P}$$



  - A adição de vetores é comutativa:

P + Q = Q + P

  - Subtração de vetores

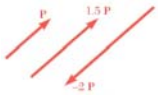
Adição de Vetores





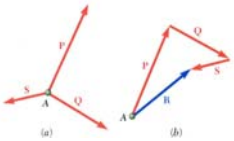
- Adição de três ou mais vetores: aplicação repetida da regra do triângulo.
- Regra do Polígono
- A adição vetorial é associativa:

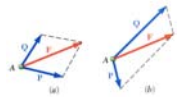
P + Q + S = (P + Q) + S = P + (Q + S)

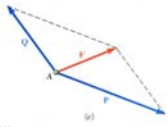


- Multiplicação de um vetor por um escalar

Resultante de diversas forças concorrentes



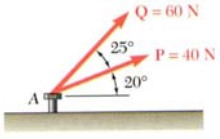




- Forças Concorrentes: Conjunto de forças que passam por um ponto em comum.
- Um conjunto de forças aplicadas a uma partícula pode ser substituido por uma única força resultante, igual à soma das forças aplicadas.

- Componentes do vetor força: dois ou mais vetores força, os quais, juntos, possuem o mesmo efeito do vetor força dado.

Problema Exemplo 2.1

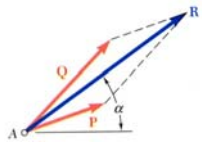


Duas forças agem sobre um parafuso em A. Determine a resultante do sistema de forças.

SOLUÇÃO:

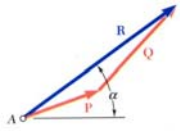
- Solução gráfica: construir o paralelogramo com os lados na mesma direção de **P** e **Q** e comprimentos proporcionais. Graficamente, determinar a resultante, a qual é equivalente em direção e proporcional em intensidade à diagonal.
- Solução trigonométrica: usar a regra do triângulo para soma vetorial, em conjunto com a Lei dos Cosenos e a Lei dos Senos, para encontrar a resultante.

Problema Exemplo 2.1



- Solução Gráfica: Desenha-se em escala um paralelogramo com lados iguais a **P** e **Q**. A intensidade e direção da resultante ou da diagonal do paralelogramo é medida.

R = 98 N, α = 35º



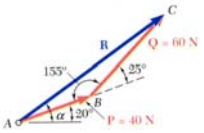
- Solução Gráfica: Um triângulo com lados **P** e **Q** é desenhado em escala. A intensidade e a direção do terceiro lado do triângulo é medida.

R = 98 N, α = 35º

Problema Exemplo 2.1

Da Lei dos Cosenos:

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos B$$
$$= (40\text{N})^2 + (60\text{N})^2 - 2(40\text{N})(60\text{N})\cos 155°$$
$$R = 97.73\text{N}$$

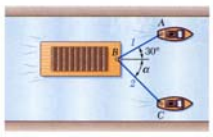


Da Lei dos Senos:

$$\frac{\text{sen}A}{Q} = \frac{\text{sen}B}{R}$$
$$\text{sen}A = \text{sen}B\frac{Q}{R}$$
$$= \text{sen}155°\frac{60\text{N}}{97.73\text{N}}$$
$$A = 15.04°$$

α = 20º + A α = 35.04º

Problema Exemplo 2.2



Uma balsa é puxada por dois rebocadores. Se a resultante das forças aplicadas pelos rebocadores é de 5000 N, dirigida ao longo do eixo da balsa, determine:

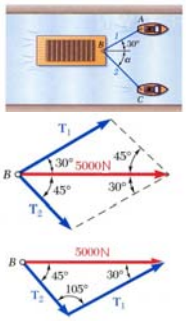
a) A força em cada uma das cordas para α = 45º,

b) O valor de α para o qual a força na corda 2 é mínima.

SOLUÇÃO:

- A solução gráfica se dá através da aplicação da Regra do Paralelogramo. O paralelogramo possui lados nas direções das duas cordas e a diagonal na direção do eixo da balsa, com comprimento proporcional a 5000 N.
- A solução trigonométrica se dá através da aplicação da Regra do Triângulo. A partir da intensidade e da direção da resultante, conhecidas, e com os outros dois lados paralelos às cordas, aplicar a Lei dos Senos para encontrar as forças na corda.
- O ângulo para a força mínima na corda 2 é determinado pela aplicação da Regra do Tirângulo, observando o efeito da variação de α.

Problema Exemplo 2.2



- Solução Gráfica – Aplicação da Regra do Paralelogramo a partir da direção e da magnitude da resultante e da direção dos lados:

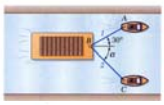
$T_1 = 3700\text{N} \quad T_2 = 2600\text{N}$

- Solução Trigonométrica - Aplicação da Regra do Triângulo e da Lei dos Senos:

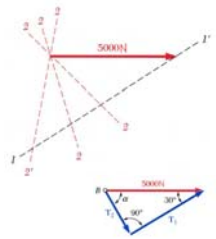
$$\frac{T_1}{\text{sen}45^\circ} = \frac{T_2}{\text{sen}30^\circ} = \frac{5000\text{N}}{\text{sen}105^\circ}$$

$T_1 = 3660\text{N} \quad T_2 = 2590\text{N}$

Problema Exemplo 2.2



- O ângulo de mínima força na corda 2 é determinado a partir da aplicação da Regra do Triângulo e da observação do efeito da variação de α.
- A força mínima na corda 2 ocorre quando $\mathbf{T_1}$ e $\mathbf{T_2}$ são perpendiculares.

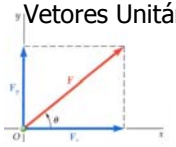


$T_2 = (5000\text{N})\text{sen}30^\circ \qquad T_2 = 2500\text{ N}$

$T_1 = (5000\text{N})\cos 30^\circ \qquad T_1 = 4330\text{N}$

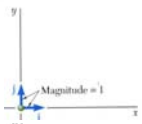
$\alpha = 90^o - 30^o \qquad \alpha = 60^o$

Componentes Retangulares de uma Força. Vetores Unitários.



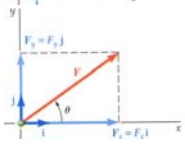
- Permitem a representação de um vetor força em duas componentes perpendiculares $\mathbf{F_x}$ e $\mathbf{F_y}$, de forma que o paralelogramo resultante seja um retângulo:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_X + \mathbf{F}_Y$$



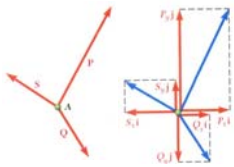
- Definem vetores unitários perpendiculares, **i** e **j**, paralelos aos eixos x e y.
- Componentes vetoriais podem ser expressas como o produto de vetores unitários pelo valor escalar de sua magnitude.

$$\mathbf{F} = F_X\mathbf{i} + F_Y\mathbf{j}$$



- F_x e F_y são as *componentes escalares* de **F**

Adição de Forças pela Soma das Componentes

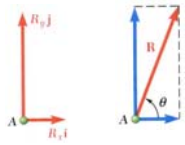


- Resultante de 3 ou mais forças concorrentes:

$$\mathbf{R = P + Q + S}$$

- Escrever cada força nas suas componentes retangulares:

$$R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} = (P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j}) + (Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j}) + (S_x\mathbf{i} + S_y\mathbf{j})$$
$$= (P_x + Q_x + S_x)\mathbf{i} + (P_y + Q_y + S_y)\mathbf{j}$$



- As componentes escalares da resultante são iguais à soma das componentes das forças dadas.

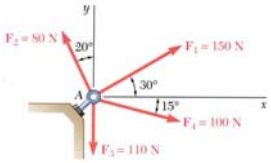
$$R_x = P_x + Q_x + S_x \qquad R_y = P_y + Q_y + S_y$$

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y$$

- Magnitude e direção da resultante:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad \theta = \text{tg}^{-1}\frac{R_y}{R_x}$$

Problema Exemplo 2.3



Quatro forças agem sobre o pino, conforme mostrado. Determine a resultante das forças.

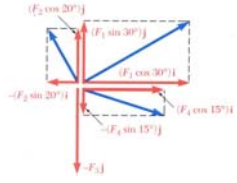
SOLUÇÃO:

- Decompor cada força em suas componentes retangulares.
- Determinar as componentes da resultante a partir da adição das correspondentes componentes das forças.
- Calcular a magnitude e a direção da resultante.

Problema Exemplo 2.3

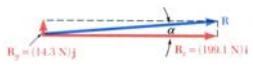
SOLUÇÃO:

- Decompor cada força em componentes retangulares:



força	*mag*	*comp. x*	*comp. y*
$\mathbf{F}_1$	150	+129.9	+75.0
$\mathbf{F}_2$	80	−27.4	+75.2
$\mathbf{F}_3$	110	0	−110.0
$\mathbf{F}_4$	100	+96.6	−25.9
		$R_x = +199.1$	$R_y = +14.3$

- Determinar as componentes da resultante pela adição das correspondentes componentes da força.



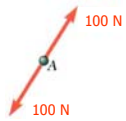
- Calcular a magnitude e direção:

$$R = \sqrt{199.1^2 + 14.3^2} \qquad R = 199.6\text{N}$$

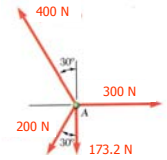
$$\text{tg}^{-1}\alpha = \frac{14.3\text{N}}{199.1\text{N}} \qquad \alpha = 4.1^{\circ}$$

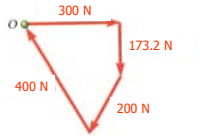
Equilíbrio da Partícula

- Quando a resultante de todas as forças agindo sobre uma partícula é nula, a partícula se encontra em *equilíbrio*.
- *Primeira Lei de Newton*: "Se a resultante sobre a partícula é nula, esta permanecerá em repouso ou em movimento retilíneo uniforme."



- Partícula sob ação de duas forças:
  - mesma magnitude
  - mesma linha de ação
  - sentidos opostos





- Partícula sob ação de três ou mais forças:
  - A solução gráfica gera um polígono fechado
  - Solução algébrica: $\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} = 0$

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0$$

Diagrama de Corpo Livre

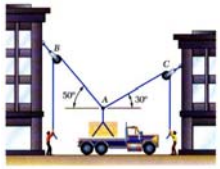


Diagrama Espacial :

Esquema gráfico representando as condições físicas do problema.



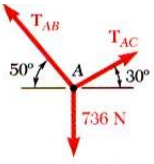
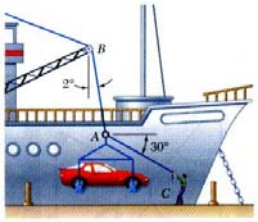


Diagrama de Corpo Livre:

Esquema gráfico representando as forças atuantes sobre a partícula em estudo.

Problema Exemplo 2.4

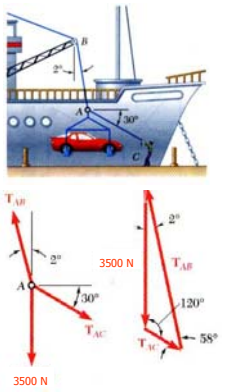


Numa operação de descarregamento em um navio, um automóvel pesando 3500 N é suportado por um cabo. Uma corda presa ao cabo é usada de forma a centrar o automóvel na descida. Determinar a força na corda.

SOLUÇÃO:

- Construir o diagrama de corpo livre da partícula no ponto de junção do cabo com a corda.
- Aplicar as condições de equilíbrio, criando um polígono fechado a partir das forças aplicadas na partícula.
- Aplicar as relações trigonométricas de forma a determinar os valores das forças desconhecidas.

Problema Exemplo 2.4



SOLUÇÃO:

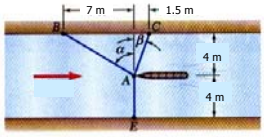
- Construir o diagrama de corpo livre da partícula no ponto A.
- Aplicar as condições de equilíbrio.
- Resolver para as forças desconhecidas.

$$\frac{T_{AB}}{\text{sen}120°} = \frac{T_{AC}}{\text{sen}2°} = \frac{3500\text{N}}{\text{sen}58°}$$

$$T_{AB} = 3570\text{N}$$

$$T_{AC} = 144\text{N}$$

Problema Exemplo 2.6



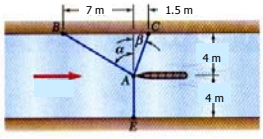
Deseja-se determinar a força de arrasto, a uma determinada velocidade, sobre o protótipo do casco de um veleiro. O modelo é colocado em um canal de teste e três cabos são usados para alinhar a proa com a linha de centro do canal. Para uma dada velocidade, a força no cabo AB é de 40 N e no cabo AE de 60 N.

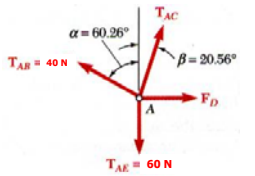
Determinar a força de arrasto sobre o casco e a força no cabo AC.

SOLUÇÃO:

- Selecionando o casco como o corpo livre, construir o DCL.
- Expressar a condição de equilíbrio para o casco a partir do somatório nulo das forças aplicadas.
- Decompor a equação vetorial de equilíbrio em duas equações escalares e resolver para as forças desconhecidas.

Problema Exemplo 2.6





SOLUÇÃO:

- Selecionando o casco como o corpo livre, construir o DCL.

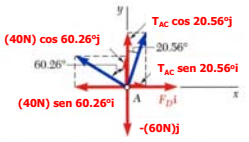
$$\text{tg}^{-1}\alpha = \frac{7\text{ m}}{4\text{ m}} = 1.75 \qquad \text{tg}^{-1}\beta = \frac{1.5\text{ m}}{4\text{ m}} = 0.375$$

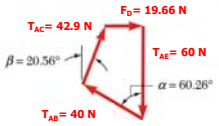
$$\alpha = 60.25° \qquad \beta = 20.56°$$

- Expressar a condição de equilíbrio para o casco a partir do somatório nulo das forças aplicadas.

$$\mathbf{R = T_{AB} + T_{AC} + T_{AE} + F_D = 0}$$

Problema Exemplo 2.6





- Decompor a equação vetorial de equilíbrio em duas equações escalares e resolver para as forças desconhecidas.

$\mathbf{T}_{AB} = -40\text{sen}(60.26)\mathbf{i} + 40\cos(60.26)\mathbf{j}$

$= -34.74\mathbf{i} + 19.84\mathbf{j}$

$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC}\text{sen}20.56\mathbf{i} + T_{AC}\cos 20.56\mathbf{j}$

$= 0.3512T_{AC}\mathbf{i} + 0.9363T_{AC}\mathbf{j}$

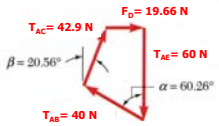
$\mathbf{T} = -60\text{N}\mathbf{j}$

$\mathbf{F}_D = F_D\mathbf{i}$

$\mathbf{R} = 0$

$= (-34.74 + 0.3512T_{AC} + F_D)\mathbf{i} + (19.84 + +0.9363T_{AC} - 60)\mathbf{j}$

Problema Exemplo 2.6



$\mathbf{R} = 0$

$= (-34.74 + 0.3512T_{AC} + F_D)\mathbf{i} + (19.84 + +0.9363T_{AC} - 60)\mathbf{j}$

Esta equação é satisfeita somente se cada componente da resultante for nula separadamente:

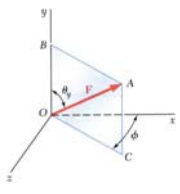
$(\Sigma F_X = 0) \Rightarrow 0 = -34.74 + 0.3512T_{AC} + F_D$

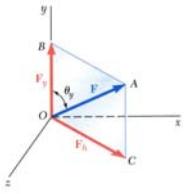
$(\Sigma F_Y = 0) \Rightarrow 0 = -19.84 + 0.9363T_{AC} - 60$

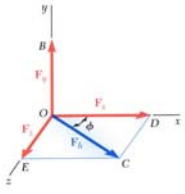
$T_{AC} = 42.9$ N

$F_D = 19.66$ N

Componentes Retangulares no Espaço







- O vetor **F** está contido no plano *OBAC*.
- Decompor **F** nas suas componentes horizontal e vertical.

$F_v = F\cos\theta_y$

$F_h = F\text{sen}\theta_y$

- Decompor $\mathbf{F_h}$ em componentes retangulares.

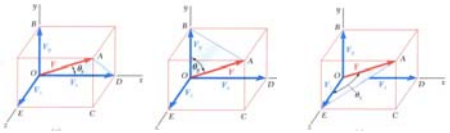
$F_x = F_h\cos\Phi$

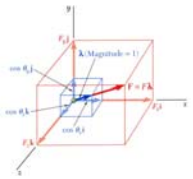
$= F\text{sen}\theta_y\cos\Phi$

$F_z = F_h\text{sen}\Phi$

$= F\text{sen}\theta_y\text{sen}\Phi$

Componentes Retangulares no Espaço





- A partir dos ângulos entre **F** e os eixos,

$F_x = F\cos\theta_x \qquad F_y = F\cos\theta_y \qquad F_z = F\cos\theta_z$

$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$

$= F(\cos\theta_x\mathbf{i} + \cos\theta_y\mathbf{j} + \cos\theta_z\mathbf{k})$

$= F\boldsymbol{\lambda}$

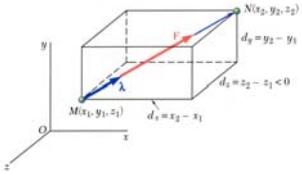
$\boldsymbol{\lambda} = \cos\theta_x\mathbf{i} + \cos\theta_y\mathbf{j} + \cos\theta_z\mathbf{k}$

- **λ** é o vetor unitário da linha de ação de **F**, e $\cos\theta_x$, $\cos\theta_y$, e $\cos\theta_z$ são os cosenos diretores de **F**.

Componentes Retangulares no Espaço

A direção da força é definida a partir da localização de dois pontos sobre sua linha de ação:

$M(x_1, y_1, z_1)$ e $N(x_2, y_2, z_2)$





d é o vetor ligando os pontos M e N

$\mathbf{d} = d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}$

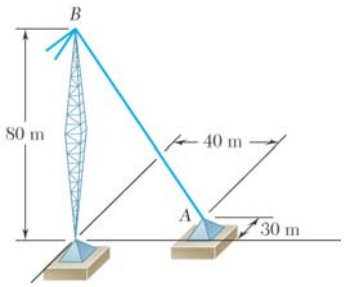
$d_x = x_2 - x_1 \quad d_y = y_2 - y_1 \quad d_z = z_2 - z_1$

$\mathbf{d} = d\boldsymbol{\lambda}$:

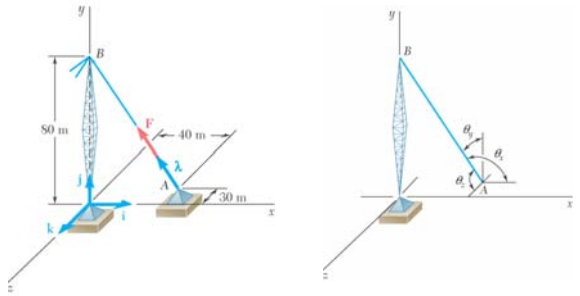
$\boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k})$

$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda}$ => $F_x = \frac{Fd_x}{d} \quad F_y = \frac{Fd_y}{d} \quad F_z = \frac{Fd_z}{d}$

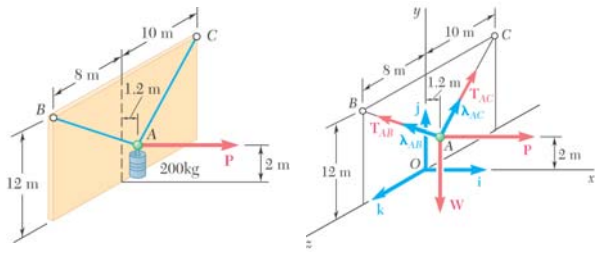
Ex. 2.7: O cabo de sustentação da torre mostrada está ancorado por meio de um parafuso em A. A tração no cabo é de 2500 N. Determinar (a) os componentes x, y e z, da força sobre o parafuso, (b) os ângulos que esta faz com os três eixos



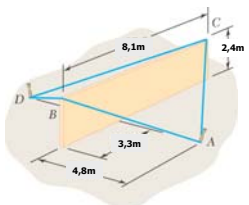
Ex. 2.7

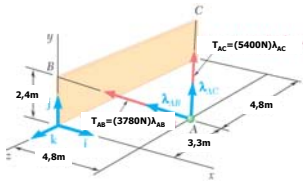


Ex. 2.9: Um cilindro de 200kg está pendurado como mostrado. Determinar a intensidade da força P, perpendicular à parede.



Ex. 2.8: Um muro de concreto é temporariamente seguro pelos cabos mostrados. Sabendo que a tração é de 3780N no cabo AB e 5400N no cabo AC, determine a intensidade e a direção da resultante das forças exercidas pelos cabos AB e AC na estaca A.




C
y
B
$T_{AC}=(5400N)\lambda_{AC}$
2,4m
λ_{AB}
λ_{AC}
4,8m
$T_{AB}=(3780N)\lambda_{AB}$
A
3,3m
4,8m
z
x