

Cap. III – Revisão da Análise do Comportamento de Fluidos

1- Estática dos Fluidos

• Fluidos em movimento relativo com deformação angular: presença de tensões normais e de cisalhamento.

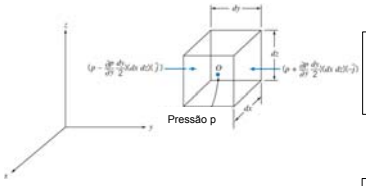
•Fluidos em repouso ou com movimento de corpo rígido (sem deformação): presença de tensões normais apenas.

•**Objetivo**: obter uma equação que permita determinar o campo de pressões no interior da massa fluida.

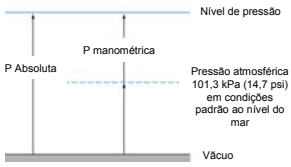
•Aplicações:

- instrumentos de medição de pressão $p - p_0 = \rho g h$
- forças atuantes em superfícies submersas $\sum \vec{F} = \int_A -p\,dA$
- empuxo e estabilidade $F_z = \rho g \forall$
- fluidos em movimento de corpo rígido $-grad\ p + \rho g = \rho \vec{a}$
- forças desenvolvidas em sistemas hidráulicos (prensas, freios)

1- Estática dos Fluidos



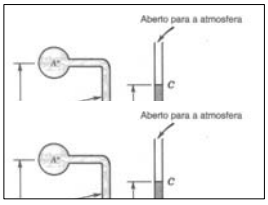
$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g = \gamma$$



$$\int_{p_0}^{p} dp = -\int_{z_0}^{z} \rho g dz$$

$$p - p_0 = -\rho g (z - z_0)$$

$$p - p_0 = \rho g (z_0 - z), \quad z^+ \downarrow$$



$$p - p_0 = \rho g h$$

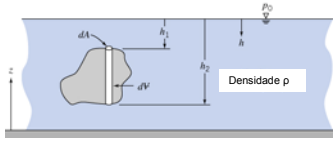
1- Estática dos Fluidos



Força sobre corpos Submersos

$$\sum \vec{F} = \int_A p\, dA$$

$$\sum \vec{F} = p_c A = (p_0 + \rho g h_c) A$$



Empuxo

$$F_Z = \rho g \forall$$

2- Dinâmica dos Fluidos

2.1 Equações Básicas Integrais para um Sistema (porção arbitrária fixa de massa)

1- Conservação da Massa:

$$\left.\frac{dM}{dt}\right)_{sistema} = 0,\ M_{sistema} = \int_{M(sistema)} dm = \int_{\forall(sistema)} \rho d\forall$$

2- Segunda Lei de Newton:

$$\sum \vec{F} = \left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{sistema},\ \vec{P}_{sistema} = \int_{M(sistema)} \vec{V} dm = \int_{\forall(sistema)} \vec{V}\rho d\forall$$

3- Quantidade de Mov. Angular:

$$\sum \vec{M} = \left.\frac{d\vec{H}}{dt}\right)_{sistema},\ \vec{H}_{sistema} = \int_{M(sistema)} \vec{r}\times\vec{V} dm = \int_{\forall(sistema)} \vec{r}\times\vec{V}\rho d\forall$$

4- 1ª Lei da Termodinâmica:

$$\dot{Q} - \dot{W} = \left.\frac{dE}{dt}\right)_{sistema},\ E_{sistema} = \int_{M(sistema)} e dm = \int_{\forall(sistema)} e\rho d\forall \qquad e = u + \frac{V^2}{2} + gz$$

5- 2ª Lei da Termodinâmica:

$$\left.\frac{dS}{dt}\right)_{sistema} \geq \frac{1}{T}\dot{Q},\ S_{sistema} = \int_{M(sistema)} s dm = \int_{\forall(sistema)} s\rho d\forall$$

2- Dinâmica dos Fluidos

2.1 Equações Básicas Integrais para um Volume de Controle

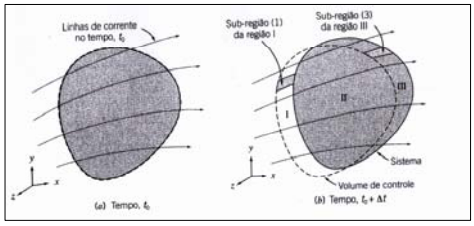
- **Objetivo**: Expressar as leis básicas que regem o comportamento de um sistema fluido em termos de volume de controle:

Propriedade extensiva — Propriedade intensiva

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{sistema} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \eta\rho\, d\forall + \int_{sc} \eta\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Fluxo de massa através da SC

Elemento de massa no VC



1- Conservação da Massa:

$$\left.\frac{dM}{dt}\right)_{sistema} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho\, d\forall + \int_{sc} \rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho\, d\forall + \int_{sc} \rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

2- Quantidade de Movimento Linear (segunda lei de Newton):

$$\left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{sistema} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \vec{V}\,\rho\, d\forall + \int_{sc} \vec{V}\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$\sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \vec{V}\,\rho\, d\forall + \int_{sc} \vec{V}\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

2- Dinâmica dos Fluidos

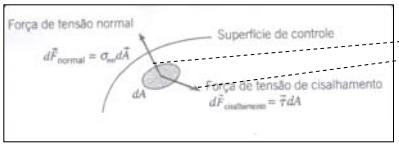
2.1 Equações Básicas Integrais para um Volume de Controle

3- Quantidade de Movimento Angular (rotação):

$$\left(\frac{d\vec{H}}{dt}\right)_{sistema} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \vec{r}\times\vec{V}\,\rho\, d\forall + \int_{sc} \vec{r}\times\vec{V}\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$\sum \vec{M} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \vec{r}\times\vec{V}\,\rho\, d\forall + \int_{sc} \vec{r}\times\vec{V}\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

4- Primeira Lei da Termodinâmica:



$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{sistema} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} e\rho\, d\forall + \int_{sc} e\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} e\rho\, d\forall + \int_{sc} e\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$e = u + \frac{V^2}{2} + gz$$

$$\dot{W} = \dot{W}_s + \dot{W}_{normal} + \dot{W}_{cisalh.} + \dot{W}_{outros}$$

$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} e\rho\, d\forall + \int_{sc} (e + pv)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$\dot{W} = \dot{W}_s + \dot{W}_{cisalh.} + \dot{W}_{outros}$$

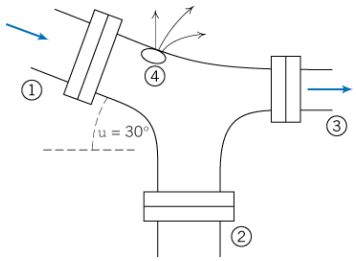
5- Segunda Lei da Termodiâmica:

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)_{sistema} \geq \frac{1}{T}\dot{Q}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} s\rho\, d\forall + \int_{sc} s\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \geq \int_{sc} \frac{1}{T}\frac{Q}{A} dA$$

2- Dinâmica dos Fluidos - Exemplos

1- Conservação da Massa: *Considere o escoamento permanente de água em uma junção de tubos conforme mostrado no diagrama. As áreas das seções são A_1=0,2m², A_2=0,2m², e A_3=0,15m². O fluido também vaza para fora do tubo através de um orifício no ponto 4, com uma vazão volumétrica estimada em 0,1m³/s. As velocidades médias nas seções 1 e 3 são V_1= 5m/s e V_3=12m/s, respectivamente. Determine a velocidade do escoamento na seção 2.*



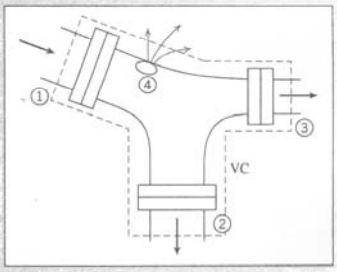
DADOS: Escoamento permanente de água através do dispositivo mostrado.

$A_1 = 0{,}2\ m^2$ $A_2 = 0{,}2\ m^2$ $A_3 = 0{,}15\ m^2$

$V_1 = 5\ m/s$ $V_3 = 12\ m/s$ $\rho = 999\ kg/m^3$

Vazão em volume ~~entrando em~~ através de ④ = 0,1 m³/s

DETERMINAR: A velocidade na seção ②.



SOLUÇÃO:

Escolha um volume de controle fixo, conforme mostrado. Considere a hipótese de que o escoamento na seção ② é para fora e sinalize no diagrama (se esta hipótese for incorreta, o resultado final nos dirá).

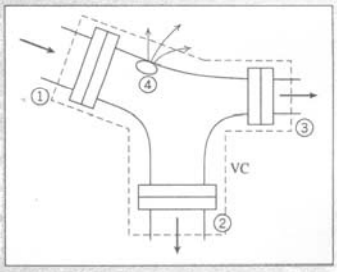
DADOS: Escoamento permanente de água através do dispositivo mostrado.

$A_1 = 0{,}2\ m^2$ $A_2 = 0{,}2\ m^2$ $A_3 = 0{,}15\ m^2$

$V_1 = 5\ m/s$ $V_3 = 12\ m/s$ $\rho = 999\ kg/m^3$

Vazão em volume ~~entrando em~~ através de ④ = 0,1 m³/s

DETERMINAR: A velocidade na seção ②.



SOLUÇÃO:

Escolha um volume de controle fixo, conforme mostrado. Considere a hipótese de que o escoamento na seção ② é para fora e sinalize no diagrama (se esta hipótese for incorreta, o resultado final nos dirá).

Equação básica:

A equação geral para um volume de controle é a Eq. 4.12, porém podemos escrever imediatamente a Eq. 4.13 por causa da consideração (2),

$$\int_{SC} \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

Considerações: (1) Escoamento permanente (dado).
(2) Escoamento incompressível.
(3) Propriedades uniformes em cada seção.

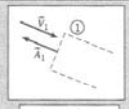
A consideração (3) (e o uso da Eq. 4.14a para o vazamento) leva a

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{A}_1 + \vec{V}_2 \cdot \vec{A}_2 + \vec{V}_3 \cdot \vec{A}_3 + Q_4 = 0 \qquad (1)$$

onde Q_4 é a vazão ~~mássica~~ volumétrica do vazamento para fora.

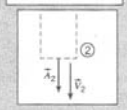
Vamos examinar os três primeiros termos na Eq. 1 com base na Fig. 4.3 e nos sentidos dos vetores velocidades:

$\vec{V}_1 \cdot \vec{A}_1 = -V_1 A_1$



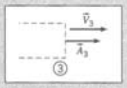
Sinal de $\vec{V}_1 \cdot \vec{A}_1$ é negativo na superfície ①

$\vec{V}_2 \cdot \vec{A}_2 = +V_2 A_2$



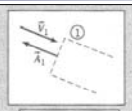
Sinal de $\vec{V}_2 \cdot \vec{A}_2$ é positivo na superfície ②

$\vec{V}_3 \cdot \vec{A}_3 = +V_3 A_3$



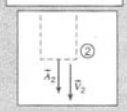
Sinal de $\vec{V}_3 \cdot \vec{A}_3$ é positivo na superfície ③

$\vec{V}_1 \cdot \vec{A}_1 = -V_1 A_1$



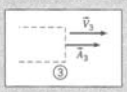
Sinal de $\vec{V}_1 \cdot \vec{A}_1$ é negativo na superfície ①

$\vec{V}_2 \cdot \vec{A}_2 = +V_2 A_2$



Sinal de $\vec{V}_2 \cdot \vec{A}_2$ é positivo na superfície ②

$\vec{V}_3 \cdot \vec{A}_3 = +V_3 A_3$



Sinal de $\vec{V}_3 \cdot \vec{A}_3$ é positivo na superfície ③

Usando estes resultados na Eq. 1,

$$-V_1 A_1 + V_2 A_2 + V_3 A_3 + Q_4 = 0$$

ou

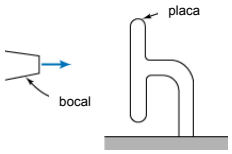
$$V_2 = \frac{V_1 A_1 - V_3 A_3 - Q_4}{A_2} = \frac{\frac{5\ \text{m}}{\text{s}} \times 0{,}2\ \text{m}^2 - \frac{12\ \text{m}}{\text{s}} \times 0{,}15\ \text{m}^2 - \frac{0{,}1\ \text{m}^3}{\text{s}}}{0{,}2\ \text{m}^2} = -4{,}5\ \text{m/s} \longleftarrow V_2$$

Lembre-se de que V_2 representa o módulo da velocidade, que assumimos supostamente apontar para fora do volume de controle. O fato de V_2 ter sinal negativo significa que, na verdade, temos uma *entrada* de escoamento na seção ② — a nossa hipótese inicial não era válida.

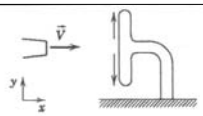
Este problema demonstra o uso da convenção de sinal para avaliar $\int_A \vec{V} \cdot d\vec{A}$. Destacando: o vetor área é *sempre* traçado *para fora* da superfície de controle numa normal a ela.

2- Dinâmica dos Fluidos - Exemplos

2- Quantidade de Movimento: *A água sai de um bocal estacionário e atinge uma placa plana, conforme mostrado. A água deixa o bocal a 15m/s; a área do bocal é de 0,01m². Admitindo que a água é dirigida normal à placa e que escoa totalmente ao longo da placa, determine a força horizontal sobre o suporte.*

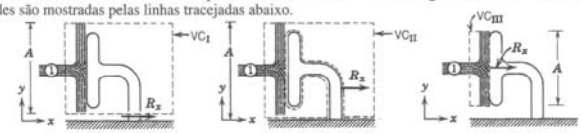


DADOS: A água de um bocal estacionário é dirigida normalmente contra uma placa plana; o escoamento subseqüente é paralelo à placa.
Velocidade do jato, $\vec{V} = 15\,\hat{i}$ m/s
Área do bocal, $A_o = 0{,}01$ m²

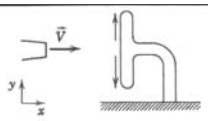


DETERMINAR: A força horizontal sobre o suporte.

SOLUÇÃO:
Escolhemos um sistema de coordenadas ao definir o problema anteriormente. Devemos agora escolher um volume de controle adequado. Várias possibilidades são mostradas pelas linhas tracejadas abaixo.

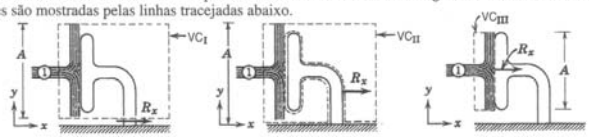


DADOS: A água de um bocal estacionário é dirigida normalmente contra uma placa plana; o escoamento subseqüente é paralelo à placa.
Velocidade do jato, $\vec{V} = 15\,\hat{i}$ m/s
Área do bocal, $A_n = 0{,}01$ m²



DETERMINAR: A força horizontal sobre o suporte.

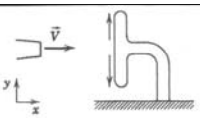
SOLUÇÃO:
Escolhemos um sistema de coordenadas ao definir o problema anteriormente. Devemos agora escolher um volume de controle adequado. Várias possibilidades são mostradas pelas linhas tracejadas abaixo.



Em todos os três casos, a água proveniente do bocal cruza a superfície de controle através da área A_1 (admitida como igual à área do bocal), e admite-se que ela deixa o volume de controle tangencialmente à superfície da placa no sentido $+y$ ou $-y$. Antes de decidir qual é o "melhor" volume de controle, escrevamos as equações básicas.

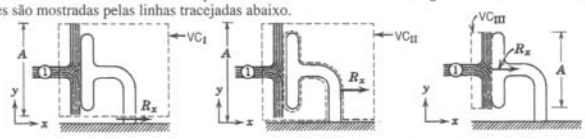
$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}\rho d\forall + \int_{SC} \vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho d\forall + \int_{SC} \rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = 0$$

DADOS: A água de um bocal estacionário é dirigida normalmente contra uma placa plana; o escoamento subseqüente é paralelo à placa.
Velocidade do jato, $\vec{V} = 15\,\hat{i}$ m/s
Área do bocal, $A_n = 0{,}01$ m²



DETERMINAR: A força horizontal sobre o suporte.

SOLUÇÃO:
Escolhemos um sistema de coordenadas ao definir o problema anteriormente. Devemos agora escolher um volume de controle adequado. Várias possibilidades são mostradas pelas linhas tracejadas abaixo.



Em todos os três casos, a água proveniente do bocal cruza a superfície de controle através da área A_1 (admitida como igual à área do bocal), e admite-se que ela deixa o volume de controle tangencialmente à superfície da placa no sentido $+y$ ou $-y$. Antes de decidir qual é o "melhor" volume de controle, escrevamos as equações básicas.

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{V}\rho d\forall + \int_{SC} \vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho d\forall + \int_{SC} \rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = 0$$

Hipóteses: (1) Escoamento permanente
(2) Escoamento incompressível
(3) Escoamento uniforme em cada seção onde o fluido cruza as fronteiras do VC

A despeito da nossa escolha do volume de controle, o escoamento é permanente e as equações básicas tornam-se

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \int_{SC} \vec{V}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad \text{e} \qquad \int_{SC} \rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = 0$$

A avaliação do termo de fluxo da quantidade de movimento levará ao mesmo resultado, para todos os volumes de controle. Deveríamos escolher aquele que permita a avaliação mais direta das forças.

Lembre, ao aplicar a equação da quantidade de movimento, que a força $\vec{F}$ representa todas as forças atuando *sobre* o volume de controle.

Resolvamos o problema, utilizando todos os três volumes de controle.

VC_1

O volume de controle foi selecionado de modo que a área da superfície esquerda é igual à área da superfície direita. Denotemos esta área por A.

O volume de controle intercepta o suporte. Denominemos a força do suporte sobre o volume de controle como R_x e a admitamos positiva. (A força do volume de controle sobre o suporte é igual e oposta a R_x.)

Como buscamos a força horizontal, escrevemos a componente x da equação da quantidade de movimento para escoamento permanente

$$F_{S_x} + F_{B_x} = \int_{SC} u\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Não há forças de massa na direção x; logo, $F_{B_x} = 0$, e

$$F_{S_x} = \int_{SC} u\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Para avaliar F_{S_x}, devemos incluir todas as forças de superfície atuando sobre o volume de controle

$$F_{S_x} = \underbrace{p_a A}_{\substack{\text{força devida à pressão atmosférica; atua para a direita (direção positiva), sobre a superfície esquerda}}} - \underbrace{p_a A}_{\substack{\text{força devida à pressão atmosférica; atua para a esquerda (direção negativa), sobre a superfície direita}}} + \underbrace{R_x}_{\substack{\text{força do suporte sobre o volume de controle (admitida como positiva)}}}$$

Conseqüentemente, $F_{S_x} = R_x$, e

$$R_x = \int_{SC} u\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = \int_{A_1} u\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} \qquad \left\{\begin{array}{l}\text{Para a massa cruzando as superfícies superior e}\\ \text{inferior, } u = 0\end{array}\right\}$$

$$= \int_{A_1} u\{-|\rho V_1\, dA|\} \qquad \left\{\begin{array}{l}\text{Em ①, } \rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = -|\rho V_1 dA|\text{, visto que os sentidos}\\ \text{de } \vec{V}_1 \text{ e de } d\vec{A}_1 \text{ diferem de } 180°.\end{array}\right\}$$

$$= -u_1|\rho V_1 A_1| \qquad \{\text{propriedades uniformes em } A_1\}$$

$$= -15\frac{\text{m}}{\text{s}}\left|999\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\times 15\frac{\text{m}}{\text{s}}\times 0{,}01\,\text{m}^2\right|\frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}} \qquad \{u_1 = 15\,\text{m/s}\}$$

$R_x = -2{,}25$ kN $\{R_x$ atua no sentido oposto ao que foi admitido como positivo.$\}$

A força sobre o suporte é

$K_x = -R_x = 2{,}25$ kN $\longleftarrow$ {a força sobre o suporte atua para a direita} K_x

VC_{II}

O volume de controle foi escolhido de modo que a área da superfície esquerda seja igual à da superfície direita. Denotemos esta área por A.

O volume de controle não intercepta o suporte. Entretanto, ele está em contato com aquele em diversas porções da sua superfície. Há uma força exercida pelo suporte sobre a superfície de controle. Denotemos a componente x desta força como R_x.

Então, para este volume de controle, a componente x da equação da quantidade de movimento leva diretamente (da mesma maneira passo a passo), à mesma solução que a obtida com o VC_I anteriormente.

VC_{III}

O volume de controle foi selecionado de modo que as áreas das superfícies esquerda e direita são iguais à área da placa. Denotemos esta área por A.

Como no caso do VC_{II}, a componente x da força do suporte sobre o VC é denotada por R_x.

Então, a componente x da equação da quantidade de movimento,

$$F_{S_x} = \int_{SC} u\rho\,\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

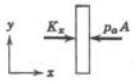
fornece

$$F_{S_x} = p_a A + R_x = \int_{A_1} u\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = \int_{A_1} u\{-|\rho V_1 dA|\} = -2{,}25\ \text{kN}$$

Então,

$$R_x = -p_a A - 2{,}25\ \text{kN} \qquad \text{e} \qquad K_x = -R_x = p_a A + 2{,}25\ \text{kN}$$

Para determinar a força líquida sobre a placa, precisamos de um diagrama de corpo-livre desta:



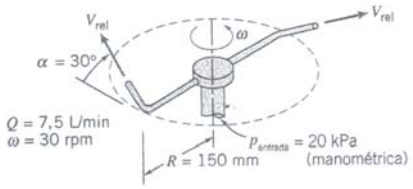
$F_{\text{líquida}} = K_X - p_a A$ {uma vez que a pressão atmosférica atua no dorso da placa}

$$F_{\text{líquida}} = p_a A + 2{,}25\ \text{kN} - p_a A = 2{,}25\ \text{kN}$$

Este problema ilustra a aplicação da equação da quantidade de movimento a um volume de controle inercial, com ênfase na escolha adequada do volume de controle.

2- Dinâmica dos Fluidos - Exemplos

3- Quantidade de Movimento Angular (rotação): *Um pequeno regador giratório de gramados é mostrado na figura. Para uma pressão manométrica de entrada de 20kPa, a vazão volumétrica total de água é de 7,5 litros por minuto e o dispositivo gira a 30rpm. O diâmetro do jato é de 4mm. Calcule a velocidade do jato em relação a cada bocal do regador. Avalie o torque de atrito no pivô do regador.*

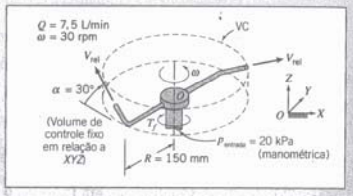


DADOS: Um pequeno regador giratório de jardim conforme mostrado.

DETERMINAR: (a) A velocidade do jato relativa a cada bocal.
(b) O torque devido ao atrito no pivô.

SOLUÇÃO:

Aplique as equações da continuidade e da quantidade de movimento angular, usando o volume de controle fixo que envolve os braços do regador.



Equações básicas:

$$= 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

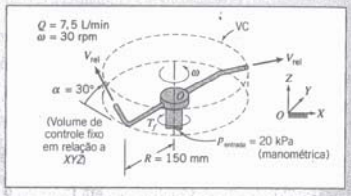
$$\vec{r} \times \vec{F}_s + \int_{VC} \vec{r} \times \vec{g}\,\rho \, d\forall + \vec{T}_{eixo} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{r} \times \vec{V}\,\rho \, d\forall + \int_{SC} \vec{r} \times \vec{V}\,\rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (1)$$

onde todas as velocidades são medidas em relação às coordenadas inerciais XYZ.

DADOS: Um pequeno regador giratório de jardim conforme mostrado.

DETERMINAR: (a) A velocidade do jato relativa a cada bocal.
(b) O torque devido ao atrito no pivô.

SOLUÇÃO:
Aplique as equações da continuidade e da quantidade de movimento angular, usando o volume de controle fixo que envolve os braços do regador.



Equações básicas: $= 0 (1)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\vec{r} \times \vec{F}_s + \int_{VC} \vec{r} \times \vec{g}\, \rho \, d\forall + \vec{T}_{eixo} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{r} \times \vec{V}\, \rho \, d\forall + \int_{SC} \vec{r} \times \vec{V}\, \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (1)$$

onde todas as velocidades são medidas em relação às coordenadas inerciais *XYZ*.

Considerações: (1) Escoamento incompressível.
(2) Escoamento uniforme em cada seção.
(3) $\vec{\omega}$ = constante.

Da continuidade, a velocidade do jato em relação ao bocal é dada por

$$V_{rel} = \frac{Q}{2A_{jato}} = \frac{Q}{2}\frac{4}{\pi D_{jato}^2}$$

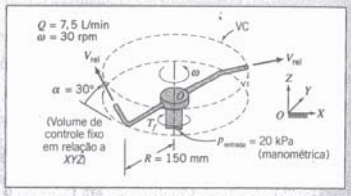
$$= \frac{1}{2} \times 7{,}5 \frac{\text{L}}{\text{min}} \times \frac{4}{\pi\,(4)^2\,\text{mm}^2} \times \frac{\text{m}^3}{1000\,\text{L}} \times 10^6 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}^2} \times \frac{\text{min}}{60\,\text{s}}$$

$$V_{rel} = 4{,}97 \text{ m/s} \longleftarrow V_{rel}$$

DADOS: Um pequeno regador giratório de jardim conforme mostrado.

DETERMINAR: (a) A velocidade do jato relativa a cada bocal.
(b) O torque devido ao atrito no pivô.

SOLUÇÃO:
Aplique as equações da continuidade e da quantidade de movimento angular, usando o volume de controle fixo que envolve os braços do regador.



Equações básicas: $= 0 (1)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \, d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\vec{r} \times \vec{F}_s + \int_{VC} \vec{r} \times \vec{g}\, \rho \, d\forall + \vec{T}_{eixo} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \vec{r} \times \vec{V}\, \rho \, d\forall + \int_{SC} \vec{r} \times \vec{V}\, \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (1)$$

onde todas as velocidades são medidas em relação às coordenadas inerciais *XYZ*.

Considerações: (1) Escoamento incompressível.
(2) Escoamento uniforme em cada seção.
(3) $\vec{\omega}$ = constante.

Da continuidade, a velocidade do jato em relação ao bocal é dada por

$$V_{rel} = \frac{Q}{2A_{jato}} = \frac{Q}{2}\frac{4}{\pi D_{jato}^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times 7{,}5 \frac{\text{L}}{\text{min}} \times \frac{4}{\pi\,(4)^2\,\text{mm}^2} \times \frac{\text{m}^3}{1000\,\text{L}} \times 10^6 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}^2} \times \frac{\text{min}}{60\,\text{s}}$$

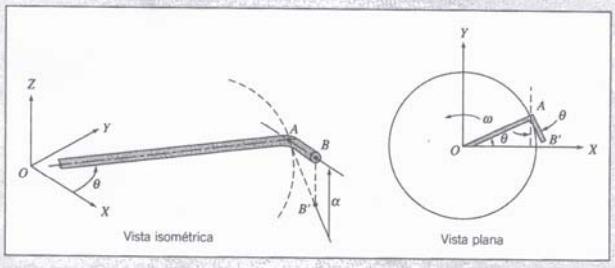
$$V_{rel} = 4{,}97 \text{ m/s} \longleftarrow V_{rel}$$

Considere, separadamente, os termos na equação da quantidade de movimento angular. Visto que a pressão atmosférica atua sobre toda a superfície de controle e a força de pressão na entrada não causa momento em torno de O, $\vec{r} \times \vec{F}_S = 0$. As quantidades de movimento das forças de campo (isto é, da gravidade) são iguais e de sinal contrário nos dois braços do dispositivo,

logo o segundo termo no lado esquerdo da equação é igual a zero. O único torque externo atuando sobre o VC é o atrito no pivô. Ele opõe-se ao movimento, de modo que

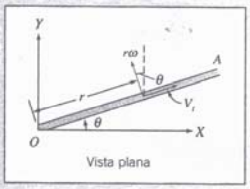
$$\vec{T}_{eixo} = -T_f \hat{K} \tag{2}$$

A nossa próxima tarefa é determinar os dois termos de quantidade de movimento angular do lado direito da Eq. 1. Considere o termo transiente: ele é a taxa de variação da quantidade de movimento angular no interior do volume de controle. Está claro que, embora a posição $\vec{r}$ e a velocidade $\vec{V}$ das partículas de fluido sejam funções do tempo nas coordenadas *XYZ*, porque o regador gira com velocidade constante, a quantidade de movimento do volume de controle é constante nas coordenadas *XYZ* e, portanto, esse termo é zero; contudo, como exercício de manipulação de quantidades vetoriais, vamos deduzir este resultado. Para determinar a integral do volume de controle, necessitamos antes desenvolver expressões para o vetor posição instantânea, $\vec{r}$, e para o vetor velocidade instantânea, $\vec{V}$ (medido em relação ao sistema de coordenadas fixas *XYZ*) para cada elemento do fluido no volume de controle.



OA situa-se no plano *XY*; *AB* é inclinada de um ângulo α em relação ao plano *XY*; o ponto *B'* é a projeção do ponto *B* sobre o plano *XY*.

Admitimos que o comprimento, *L*, da extremidade *AB* é pequeno comparado com o comprimento, *R*, do braço horizontal *OA*. Assim, podemos desprezar a quantidade de movimento angular do fluido nas extremidades comparada com a quantidade de movimento angular nos braços horizontais.



Considere agora o escoamento no tubo horizontal *OA* de comprimento *R*. Denote a posição radial a partir de *O* por *r*. Em qualquer ponto no tubo, a velocidade do fluido em relação às coordenadas fixas *XYZ* é a soma da velocidade relativa ao tubo $\vec{V}_r$ com a velocidade tangencial $\vec{\omega} \times \vec{r}$. Deste modo,

$$\vec{V} = \hat{I}(V_r \cos\theta - r\omega \operatorname{sen}\theta) + \hat{J}(V_r \operatorname{sen}\theta + r\omega \cos\theta)$$

(Note que θ é uma função do tempo.) O vetor posição é

$$\vec{r} = \hat{I}r\cos\theta + \hat{J}r\operatorname{sen}\theta$$

e

$$\vec{r} \times \vec{V} = \hat{K}(r^2\omega\cos^2\theta + r^2\omega\operatorname{sen}^2\theta) = \hat{K}r^2\omega$$

Então,

$$\int_{V_{OA}} \vec{r} \times \vec{V}\,\rho\,d\forall = \int_0^R \hat{K}r^2\omega\rho A\,dr = \hat{K}\frac{R^3\omega}{3}\rho A$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_{OA}} \vec{r} \times \vec{V}\,\rho\,d\forall = \frac{\partial}{\partial t}\left[\hat{K}\frac{R^3\omega}{3}\rho A\right] = 0 \tag{3}$$

onde A é a área da seção transversal do tubo horizontal. Resultados idênticos são obtidos para o outro tubo horizontal no volume de controle. Dessa forma, confirmamos a nossa assertiva de que a quantidade de movimento angular no interior do volume de controle não varia com o tempo.

Precisamos agora determinar o segundo termo no lado direito da Eq. (1), a taxa líquida de fluxo de quantidade de movimento através da superfície de controle. Existem três superfícies através das quais detectamos fluxo de massa e, portanto, de quantidade de movimento: a seção transversal do tubo de suprimento de água (para o qual $\vec{r} \times \vec{V} = 0$ porque $\vec{r} = 0$) e as seções dos dois bocais. Considere o bocal no final do braço OAB. Para $L << R$, temos

$$\vec{r}_{\text{jato}} = \vec{r}_B \approx \vec{r}\Big|_{r=R} = (\hat{I}r\cos\theta + \hat{J}r\,\text{sen}\theta)\Big|_{r=R} = \hat{I}R\cos\theta + \hat{J}R\,\text{sen}\theta$$

e para a velocidade instantânea do jato $\vec{V}_j$, temos

$$\vec{V}_j = \vec{V}_{\text{rel}} + \vec{V}_{\text{cxu}} = \hat{I}V_{\text{rel}}\cos\alpha\,\text{sen}\,\theta - \hat{J}V_{\text{rel}}\cos\alpha\cos\theta + \hat{K}V_{\text{rel}}\,\text{sen}\,\alpha - \hat{I}\omega R\,\text{sen}\,\theta + \hat{J}\omega R\cos\theta$$

$$\vec{V}_j = \hat{I}(V_{\text{rel}}\cos\alpha - \omega R)\,\text{sen}\,\theta - \hat{J}(V_{\text{rel}}\cos\alpha - \omega R)\cos\theta + \hat{K}V_{\text{rel}}\,\text{sen}\,\alpha$$

$$\vec{r}_B \times \vec{V}_j = \hat{I}RV_{\text{rel}}\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\theta - \hat{J}RV_{\text{rel}}\,\text{sen}\,\alpha\cos\theta - \hat{K}R(V_{\text{rel}}\cos\alpha - \omega R)(\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta)$$

$$\vec{r}_B \times \vec{V}_j = \hat{I}RV_{\text{rel}}\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\theta - \hat{J}RV_{\text{rel}}\,\text{sen}\,\alpha\cos\theta - \hat{K}R(V_{\text{rel}}\cos\alpha - \omega R)$$

A integral do fluxo avaliada para o escoamento atravessando a superfície de controle na posição B é, então,

$$\int_{SC} \vec{r} \times \vec{V}_j\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = \left[\hat{I}RV_{\text{rel}}\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\theta - \hat{J}RV_{\text{rel}}\,\text{sen}\,\alpha\cos\theta - \hat{K}R(V_{\text{rel}}\cos\alpha - \omega R)\right]\rho\frac{Q}{2}$$

Os vetores raio e velocidade para o escoamento no braço esquerdo devem ser descritos em termos dos mesmos vetores unitários usados para o braço direito. No braço esquerdo, as componentes $\hat{I}$ e $\hat{J}$ do produto vetorial são de sinais opostos, pois $\text{sen}\,(\theta + \pi) = -\text{sen}(\theta)$ e $\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$. Assim, para todo o VC,

$$\int_{SC} \vec{r} \times \vec{V}_j\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = -\hat{K}R(V_{\text{rel}}\cos\alpha - \omega R)\rho Q \qquad (4)$$

Substituindo os termos (2), (3) e (4) na Eq. 1, obtemos

$$-T_f\hat{K} = -\hat{K}R(V_{\text{rel}}\cos\alpha - \omega R)\rho Q$$

ou

$$T_f = R(V_{\text{rel}}\cos\alpha - \omega R)\rho Q$$

Esta expressão indica que, quando o regador gira com velocidade constante, o torque de atrito no pivô balanceia o torque gerado pela quantidade de movimento angular dos dois jatos.

Dos dados fornecidos,

$$\omega R = \frac{30\ \text{rev}}{\text{min}} \times 150\ \text{mm} \times \frac{2\pi\ \text{rad}}{\text{rev}} \times \frac{\text{min}}{60\ \text{s}} \times \frac{\text{m}}{1000\ \text{mm}} = 0{,}471\ \text{m/s}$$

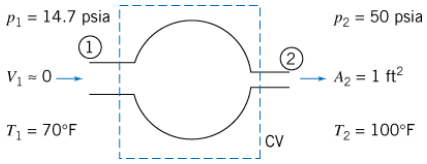
Substituindo, resulta em

$$T_f = 150\ \text{mm} \times \left(4{,}97\frac{\text{m}}{\text{s}} \times \cos 30° - 0{,}471\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) 999\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 7{,}5\ \frac{\text{L}}{\text{min}} \times \frac{\text{m}^3}{1000\ \text{L}} \times \frac{\text{min}}{60\ \text{s}} \times \frac{\text{N}\cdot\text{s}^3}{\text{kg}\cdot\text{m}} \times \frac{\text{m}}{1000\ \text{mm}}$$

$$T_f = 0{,}0718\ \text{N}\cdot\text{m} \longleftarrow T_f$$

2- Dinâmica dos Fluidos - Exemplos

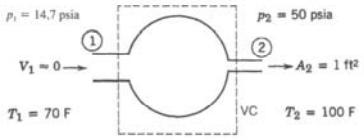
4- Primeira Lei da Termodinâmica: *Ar a 14,7psi, 70°F, entra em um compressor com velocidade desprezível e é descarregado a 50 psia, 100°F, através de um tubo com área transversal de 1 ft². A vazão em massa é de 20lbm/s. A potência fornecida ao compressor é de 600hp. Determine a taxa de transferência de calor.*



DADOS: Ar entrando num compressor em ① e saindo em ② com as condições conforme mostrado. A vazão em massa de ar é 20 lbm/s e a potência fornecida ao compressor é 600 HP.

DETERMINAR: A taxa de transferência de calor.

SOLUÇÃO:



Equações básicas:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \, d\forall + \int_{SC} \rho \, \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (=0(1))$$

$$\dot{Q} - \dot{W}_s - \dot{W}_{cisalhamento} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e \, \rho \, d\forall + \int_{SC} \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\right) \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (=0(4),\ =0(1))$$

Hipóteses: (1) Escoamento permanente
(2) Propriedades uniformes nas seções de entrada e de saída
(3) Considere o ar como um gás ideal, $p = \rho RT$
(4) A área do VC em ① e ② é perpendicular à velocidade; assim, $\dot{W}_{cisalhamento} = 0$
(5) $z_1 = z_2$
(6) Energia cinética na entrada desprezível

Sob as hipóteses listadas, a primeira lei torna-se:

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \int_{SC} \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\right) \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \int_{SC} \left(h + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad \{h \equiv u + pv\}$$

ou

$$\dot{Q} = \dot{W}_s + \int_{SC} \left(h + \frac{V^2}{2} + gz \right) \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Para propriedades uniformes (hipótese 2), podemos escrever

$$\dot{Q} = \dot{W}_s + \left(h_1 + \underbrace{\frac{V_1^2}{2} + gz_1}_{\approx 0 (6)} \right) \{ -|\rho_1 V_1 A_1| \} + \left(h_2 + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \right) \{ |\rho_2 V_2 A_2| \}$$

Para escoamento permanente, da conservação da massa,

$$\int_{SC} \rho \, \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

Por conseguinte, $-|\rho_1 V_1 A_1| + |\rho_2 V_2 A_2| = 0$, ou $|\rho_1 V_1 A_1| = |\rho_2 V_2 A_2| = \dot{m}$. Em conseqüência, podemos escrever

$$\dot{Q} = \dot{W}_s + \dot{m} \left[(h_2 - h_1) + \frac{V_2^2}{2} + \underbrace{g(z_2 - z_1)}_{= 0 (5)} \right]$$

Considere que o ar comporta-se como um gás ideal, com c_p constante. Então, $h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1)$, e

$$\dot{Q} = \dot{W}_s + \dot{m} \left[c_p (T_2 - T_1) + \frac{V_2^2}{2} \right]$$

Da continuidade, $|V_2| = \dot{m} / \rho_2 A_2$. Uma vez que $p_2 = \rho_2 R T_2$, segue-se que

$$|V_2| = \frac{\dot{m}}{A_2} \frac{RT_2}{p_2} = 20 \frac{\text{lbm}}{\text{s}} \times \frac{1}{1 \text{ ft}^2} \times 53,3 \frac{\text{ft} \cdot \text{lbf}}{\text{lbm} \cdot \text{R}} \times 560 \text{ R} \times \frac{\text{in.}^2}{50 \text{ lbf}} \times \frac{\text{ft}^2}{144 \text{ in.}^2}$$

$$|V_2| = 82,9 \text{ ft/s}$$

$$\dot{Q} = \dot{W}_s + \dot{m} c_p (T_2 - T_1) + \dot{m} \frac{V_2^2}{2}$$

Note que a potência fornecida é *ao* VC, logo $\dot{W}_s = -600$ hp, e

$$\dot{Q} = -600 \text{ hp} \times 550 \frac{\text{ft} \cdot \text{lbf}}{\text{hp} \cdot \text{s}} \times \frac{\text{Btu}}{778 \text{ ft} \cdot \text{lbf}} + 20 \frac{\text{lbm}}{\text{s}} \times 0,24 \frac{\text{Btu}}{\text{lbm.R}} \times 30 \text{ R}$$

$$+ 20 \frac{\text{lbm}}{\text{s}} \times \frac{(82,9)^2}{2} \frac{\text{ft}^2}{\text{s}^2} \times \frac{\text{slug}}{32,2 \text{ lbm}} \times \frac{\text{Btu}}{778 \text{ ft} \cdot \text{lbf}} \times \frac{\text{lbf} \cdot \text{s}^2}{\text{slug} \cdot \text{ft}}$$

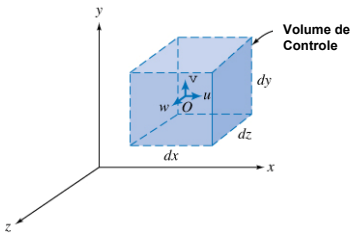
$$\dot{Q} = -277 \text{ Btu/s} \qquad \{\text{rejeição de calor}\} \, \dot{Q}$$

Além de demonstrar uma aplicação objetiva da primeira lei, este problema ilustra a necessidade de manter a coerência de unidades, utilizando-as corretamente.

2- Dinâmica dos Fluidos
2.2 Análise Diferencial do Movimento de Fluidos

- **Objetivo**: Determinação do conhecimento detalhado (ponto a ponto) do campo (distribuição de uma grandeza no espaço e no tempo) de escoamento, a partir do emprego de volumes de controle diferenciais

1- Conservação da Massa:



$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

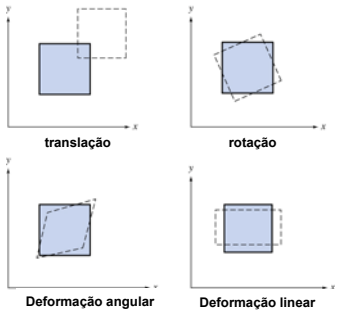
$$\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

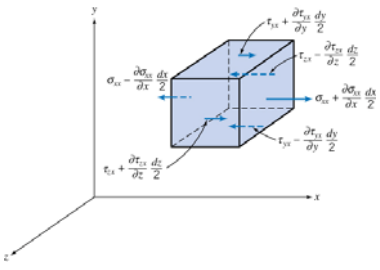
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0, \; se \; incompressível$$

$$\vec{\nabla} \cdot \rho \vec{V} = 0, \; se \; permanente$$

2- Dinâmica dos Fluidos
2.2 Análise Diferencial do Movimento de Fluidos

2- Quantidade de Movimento (cinemática/cinética):





$$d\vec{F} = dm \frac{D\vec{V}}{Dt} = dm \left[u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right]$$

2- Dinâmica dos Fluidos

2.2 Análise Diferencial do Movimento de Fluidos

$$d\vec{F} = dm\,\frac{D\vec{V}}{Dt} = dm\left[u\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial\vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\right]$$

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right] = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]$$

$$\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right] = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right]$$

$$\rho\left[\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right] = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right]$$

Eqs. de Navier-Stokes para escoamento **incompressível** com **viscosidade cte**

2- Dinâmica dos Fluidos

2.3 Escoamento Incompressível não Viscoso

- **Objetivo**: Investigar a dinâmica de um fluido incompressível (líquido) ideal, isto é, desprezando a viscosidade.

A partir das eqs. de Navier-Stokes para escoamento **incompressível**, **desprezando a viscosidade**, obtém-se as equações de Euler:

$$\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} = \rho\left[\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right]$$

$$\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} = \rho\left[\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right]$$

$$\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} = \rho\left[\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right]$$

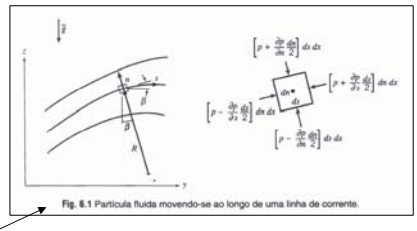


Fig. 6.1 Partícula fluida movendo-se ao longo de uma linha de corrente.

$$\rho\vec{g} - \nabla p = \rho\frac{D\vec{V}}{Dt}$$

Integrando ao longo de uma linha de corrente

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = cte$$

Escoamento:
- Permanente
- Incompressível
- Sem atrito

Equação de Bernoulli

2- Dinâmica dos Fluidos

2.3 Escoamento Incompressível não Viscoso

- **Pressão Estática do escoamento (p):** medida a partir do emprego de um manômetro instalado na parede da tubulação
- **Pressão de Estagnação (p_o):** Pressão em um ponto do escoamento não viscoso em que a a velocidade é nula
- **Pressão Dinâmica (p_d):** Diferença entre a pressão de estagnação e a pressão estática
- Para a medição de **velocidade** ao longo de uma linha de corrente em um escoamento temos:

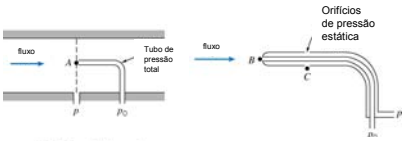
$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = cte$$

$$\frac{p_o}{\rho} + \frac{V_o^2}{2} = \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}$$

$$V_o = 0$$

$$V = \sqrt{\frac{2(p_o - p)}{\rho}}$$

$$p_d = \frac{\rho V^2}{2}$$



(a) Tubo de pressão total com tomada de pressão estática na parede

(b) Tubo pitot-estática

2- Dinâmica dos Fluidos

2.3 Escoamento Incompressível não Viscoso

- **Equação de Bernoulli - Aplicações**

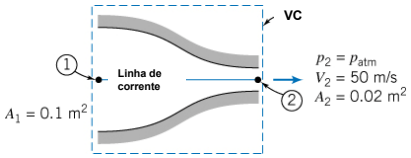
$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

- **Escoamento num bocal**
- **Escoamento através de um sifão**
- **Escoamento sob uma comporta**

2- Dinâmica dos Fluidos

2.3 Escoamento Incompressível não Viscoso

- **Escoamento num bocal:** *Ar escoa em regime permanente e com baixa velocidade através de um bocal horizontal (por definição, um equipamento para acelerar um escoamento) que o descarrega para a atmosfera. Na entrada do bocal, a área é 0,1m² e, na saída, 0,02m². Determine a pressão manométrica necessária na entrada do bocal para produzir uma velocidade de 50m/s na saída.*



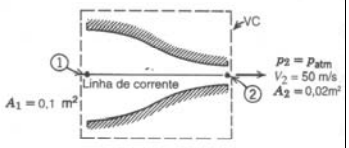
DADOS: Escoamento através de um bocal, conforme mostrado. O escoamento de ar é permanente, incompressível e sem atrito.

DETERMINAR: $p_1 - p_{atm}$.

SOLUÇÃO:

Equações básicas: $\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$

$$0 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho \, d\forall}_{=0(1)} + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$



Hipóteses: (1) Escoamento permanente
(2) Escoamento incompressível
(3) Escoamento sem atrito
(4) Escoamento ao longo de uma linha de corrente
(5) $z_1 = z_2$
(6) Escoamento uniforme nas seções ① e ②

A velocidade máxima de 50 m/s está bem abaixo do valor 100 m/s, que corresponde a um número de Mach, M ≈ 0,3 no ar-padrão. Portanto, o escoamento pode ser considerado incompressível.

Aplique a equação de Bernoulli ao longo de uma linha de corrente entre os pontos ① e ②, a fim de avaliar p_1. Então,

$$p_1 - p_{atm} = p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_1^2)$$

Aplique a equação da continuidade para determinar V_1.

$$0 = \{-|\rho V_1 A_1|\} + \{|\rho V_2 A_2|\} \qquad \text{ou} \qquad V_1 A_1 = V_2 A_2$$

de forma que,

$$V_1 = V_2 \frac{A_2}{A_1} = \frac{50\ \text{m}}{\text{s}} \times \frac{0{,}02\ \text{m}^2}{0{,}1\ \text{m}^2} = 10\ \text{m/s}$$

Para o ar nas condições-padrão, $\rho = 1{,}23\ \text{kg/m}^3$. Então,

$$p_1 - p_{atm} = \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_1^2)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1{,}23\ \text{kg}}{\text{m}^3}\left[(50)^2\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - (10)^2\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right]\frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}$$

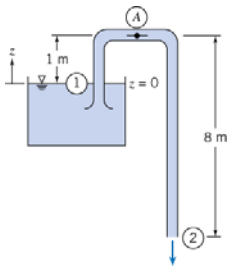
$$p_1 - p_{atm} = 1{,}48\ \text{kPa} \longleftarrow p_1 - p_{atm}$$

Este problema ilustra uma aplicação típica da equação de Bernoulli. Note que, se as linhas de corrente são retilíneas na entrada e na saída do bocal, a pressão será uniforme naquelas seções.

2- Dinâmica dos Fluidos

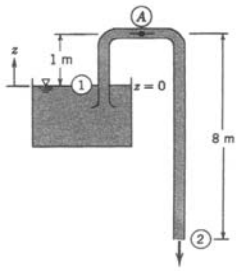
2.3 Escoamento Incompressível não Viscoso

- **Escoamento através de um sifão:** *Um tubo em U atua como sifão d'água. A curvatura no tubo está a 1m acima da superfície da água; a saída do tubo está a 7m abaixo da superfície da água. A água sai pela extremidade inferior do sifão como um jato livre para a atmosfera. Determine (após listar as considerações necessárias) a velocidade do jato livre e a pressão absoluta mínima da água na curvatura.*



DADOS: Água escoando através de um sifão conforme mostrado.

DETERMINAR: (a) A velocidade da água saindo como um jato livre.
(b) A pressão no ponto A do escoamento.



SOLUÇÃO:

Equação básica: $\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz = \text{constante}$

Hipóteses: (1) Desprezar o atrito
(2) Escoamento permanente
(3) Escoamento incompressível
(4) Escoamento ao longo de uma linha de corrente
(5) O reservatório é grande em comparação com o tubo

Aplique a equação de Bernoulli entre os pontos ① e ②.

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{V_1^2}{2}+gz_1=\frac{p_2}{\rho}+\frac{V_2^2}{2}+gz_2$$

Como $\text{área}_{\text{reservatório}} >> \text{área}_{\text{tubo}}$, $V_1 \approx 0$. Também, $p_1 = p_2 = p_{atm}$, logo,

$$gz_1=\frac{V_2^2}{2}+gz_2 \qquad \text{e} \qquad V_2^2=2g(z_1-z_2)$$

$$V_2=\sqrt{2g(z_1-z_2)}=\sqrt{2\times\frac{9{,}81\,\text{m}}{\text{s}^2}\times 7\text{m}}=11{,}7\,\text{m/s}$$

V_2

Para determinar a pressão no ponto Ⓐ, escrevemos a equação de Bernoulli entre ① e Ⓐ.

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{V_1^2}{2}+gz_1=\frac{p_A}{\rho}+\frac{V_A^2}{2}+gz_A$$

Novamente, $V_1 \approx 0$, e da conservação da massa, $V_A = V_2$. Portanto,

$$\frac{p_A}{\rho}=\frac{p_1}{\rho}+gz_1-\frac{V_2^2}{2}-gz_A=\frac{p_1}{\rho}+g(z_1-z_A)-\frac{V_2^2}{2}$$

$$p_A=p_1+\rho g(z_1-z_A)-\rho\frac{V_2^2}{2}$$

$$=1{,}01\times10^5\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}+\frac{999\,\text{kg}}{\text{m}^3}\times\frac{9{,}81\,\text{m}}{\text{s}^2}\times(-1\text{m})\times\frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}$$

$$-\frac{1}{2}\times999\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\times(11{,}7)^2\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\times\frac{\text{N}\cdot\text{s}^2}{\text{kg}\cdot\text{m}}$$

$p_A = 22{,}8$ kPa (abs) ou $-78{,}5$ kPa (manométrica)

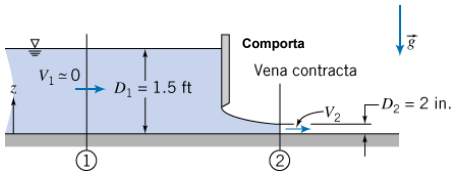
p_A

Este problema ilustra uma aplicação direta da equação de Bernoulli com a inclusão de mudança de elevação.

2- Dinâmica dos Fluidos

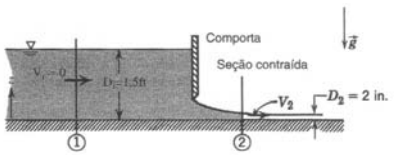
2.3 Escoamento Incompressível não Viscoso

- **Escoamento sob uma comporta:** *Água escoa sob uma comporta, num leito horizontal na entrada de um canal. A montante da comporta, a profundidade da água é 1,5 ft e a velocidade desprezível. Na seção contraída (vena contracta), a jusante da comporta, as linhas de corrente são retilíneas e a profundidade é de 2 in. Determine a velocidade do escoamento a jusante da comporta e a vazão em pés cúbicos por segundo por pé de largura.*



DADOS: Escoamento sob uma comporta, sem atrito, uniforme em cada seção, e distribuição hidrostática de pressão nas seções ① e ②.

DETERMINAR: (a) V_2
(b) Q em ft³/s/ft de largura.



SOLUÇÃO:
Escoamento satisfaz a todas as condições necessárias para a aplicação da equação de Bernoulli. A questão é: que linha de corrente utilizar?

Equação básica: $\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$

Hipóteses: (1) Escoamento permanente
(2) Escoamento incompressível
(3) Escoamento sem atrito
(4) Escoamento ao longo de uma linha de corrente
(5) Escoamento uniforme em cada seção
(6) Distribuição hidrostática de pressão

Da hipótese 6,

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \qquad \text{logo} \qquad p = p_{atm} + \rho g(D - z) \qquad \text{ou} \qquad \frac{p}{\rho} = \frac{p_{atm}}{\rho} + g(D - z)$$

Substituindo esta relação na equação de Bernoulli, obtemos

$$\frac{p_{atm}}{\rho} + g(D_1 - z_1) + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_{atm}}{\rho} + g(D_2 - z_2) + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

ou

$$\frac{V_1^2}{2} + gD_1 = \frac{V_2^2}{2} + gD_2$$

Este resultado implica que $V^2/2 + gD$ = constante, e a constante tem o mesmo valor ao longo de *qualquer* linha de corrente para este escoamento. Explicitando V_2, temos

$$V_2 = \sqrt{2g(D_1 - D_2) + V_1^2}$$

Mas $V_1^2 \approx 0$, logo,

$$V_2 = \sqrt{2g(D_1 - D_2)} = \sqrt{2 \times 32{,}2\ \frac{\text{ft}}{\text{s}^2}\left(1{,}5\,\text{ft} - 2\,\text{in.} \times \frac{\text{ft}}{12\,\text{in.}}\right)}$$

$$V_2 = 9{,}27\,\text{ft/s} \longleftarrow V_2$$

Para escoamento uniforme, $Q = VA = VDw$, ou

$$\frac{Q}{w} = VD = V_2 D_2 = 9{,}27\ \frac{\text{ft}}{\text{s}} \times 2\,\text{in.} \times \frac{\text{ft}}{12\,\text{in.}} = 1{,}55\,\text{ft}^2/\text{s}$$

$$\frac{Q}{w} = 1{,}55\,\text{ft}^3/\text{s por pé de largura} \longleftarrow \frac{Q}{w}$$

2- Dinâmica dos Fluidos

2.3 Escoamento Incompressível não Viscoso

- **Equação de Bernoulli – Relação com a primeira lei da termodinâmica**

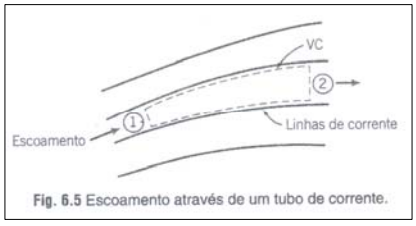


Fig. 6.5 Escoamento através de um tubo de corrente.

$$\dot{Q}^{0} - \dot{W}^{0} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} e^{0}\rho\, dv + \int_{sc}(e + pv)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$e = u + \frac{V^2}{2} + gz, \quad \Delta u = 0$$

$$\left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1\right)\dot{m} = \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2\right)\dot{m}$$

Conservação de energia (por unidade de massa)

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = cte$$

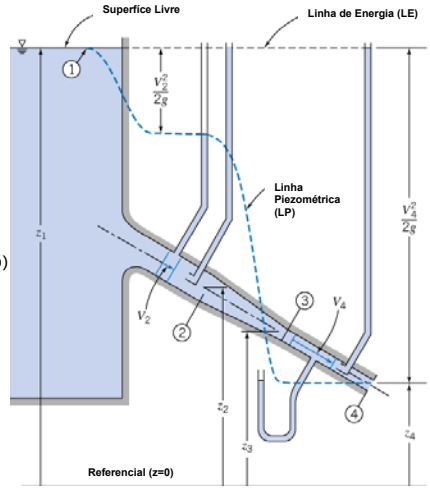
2- Dinâmica dos Fluidos

2.3 Escoamento Incompressível não Viscoso

- **Alturas de Carga**

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = cte$$

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z = H = cte$$



$\frac{p}{\rho g}$: Altura de carga devido à pressão estática local (energia de pressão por unidade de peso (mg) do fluido)

$\frac{V^2}{2g}$: Altura de carga devido à pressão dinâmica local (energia cinética por unidade de peso do fluido)

z: Altura de carga de elevação (pressão hidrostática) (energia potencial por unidade de peso do fluido)

H: Altura de carga total do escoamento (energia mecânica total por unidade de peso do fluido)

2- Dinâmica dos Fluidos

2.4 Escoamento Incompressível Viscoso, Interno

- **Objetivo**: Investigar a dinâmica de um fluido incompressível real, isto é, considerando a viscosidade e a perda de energia ao longo do escoamento confinado em um meio.
- **Classificação**: escoamento laminar e turbulento (função do número de Reynolds)

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \bar{V} D}{\mu}$$

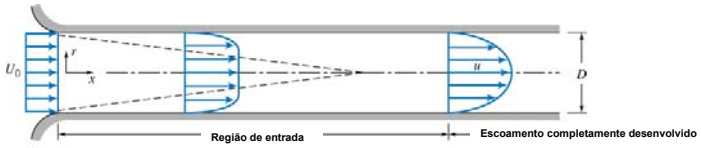
Número adimensional que representa a razão entre as forças de inércia e as forças viscosas.

- **Laminar:** escoamento em lâminas. Não há mistura, a nível macroscópico, de camadas adjacentes do fluido
- **Turbulento:** mistura de partículas de camadas adjacentes do fluido
- **Transição:** $\mathrm{Re} \simeq 2300$

2- Dinâmica dos Fluidos

2.4 Escoamento Incompressível Viscoso

- **Escoamento na região de entrada de um tubo**



Comprimento de entrada para escoamento laminar:

$$\frac{L}{D} \simeq 0,06\,\frac{\rho \bar{V} D}{\mu}$$

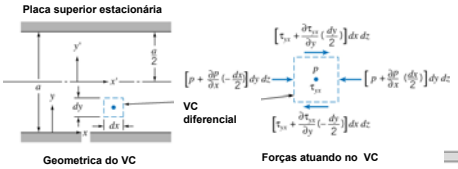
$$L \simeq 0,06\,\mathrm{Re}\,D \leq (0,06)(2300)D = 138D$$

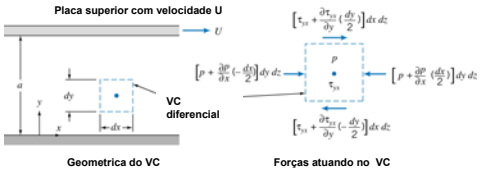
Para escoamento turbulento: $25D \leq L \leq 40D$

2- Dinâmica dos Fluidos

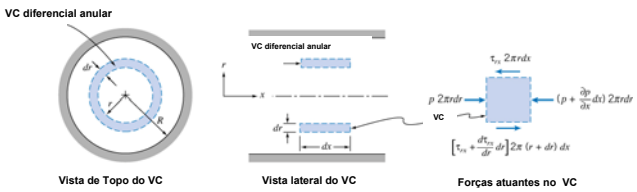
2.4 Escoamento Incompressível Viscoso

- **Escoamento laminar inteiramente desenvolvido entre placas paralelas:**





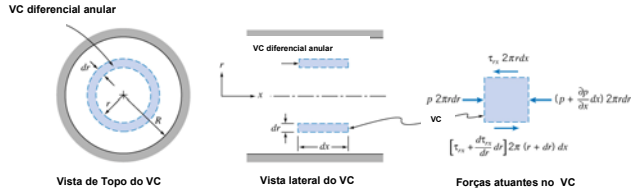
- **Escoamento laminar inteiramente desenvolvido em um tubo**



2- Dinâmica dos Fluidos

2.4 Escoamento Incompressível Viscoso

- **Escoamento laminar inteiramente desenvolvido em um tubo**



Perfil de velocidade

$$u = -\frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

Tensão de Cisalh.

$$\tau_{rx} = \frac{r}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$$

Vazão em volume

$$Q = -\frac{\pi R^4}{8\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{\pi \Delta p D^4}{128\mu L}$$

Velocidade Média

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{R^2}{8\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$$

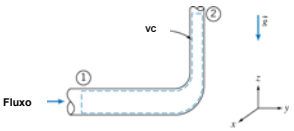
Velocidade Máxima

$$u_{max} = U = -\frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 2\bar{V}$$

2- Dinâmica dos Fluidos

2.4 Escoamento Incompressível Viscoso

- **Considerações de energia no escoamento em tubos**



$$\dot{Q} - \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} e\rho\, dv + \int_{sc}(e + pv)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

$$e = u + \frac{V^2}{2} + gz$$

$$\dot{W} = \dot{W}_s + \dot{W}_{normal} + \dot{W}_{cisalh.} + \dot{W}_{outros}$$

$$\dot{Q} = \dot{m}(u_2 - u_1) + \dot{m}\left(\frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho}\right) + \dot{m}\,g(z_2 - z_1) + \left(\int_A \frac{V_2^2}{2}\rho V_2 dA_2 - \int_A \frac{V_1^2}{2}\rho V_1 dA_1\right)$$

$$\left(\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1\frac{\bar{V}_1^2}{2} + gz_1\right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + \alpha_2\frac{\bar{V}_2^2}{2} + gz_2\right) = (u_2 - u_1) - \frac{\delta Q}{dm}$$

$$\alpha = \frac{\int_A \rho V^3 dA}{\dot{m}\bar{V}^2}$$

coef. de energia cinética

$$\left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{\bar{V}_1^2}{2} + gz_1\right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{\bar{V}_2^2}{2} + gz_2\right) = (u_2 - u_1) - \frac{\delta Q}{dm}$$

Perda de carga total (head loss), h_T, na forma térmica, devida à variação da energia interna e à transferência de calor no escoamento.

2- Dinâmica dos Fluidos

2.4 Escoamento Incompressível Viscoso

- **Determinação da Perda de Carga**

$$\left(\frac{p_1}{\rho}+\alpha_1\frac{\bar{V}_1^2}{2}+gz_1\right)-\left(\frac{p_2}{\rho}+\alpha_2\frac{\bar{V}_2^2}{2}+gz_2\right)=h_T$$

1- Perdas Distribuídas para um tubo horizontal de área cte:

$$\frac{p_1-p_2}{\rho}=\frac{\Delta p}{\rho}=h_D$$ → Por medição

Para o Escoamento Laminar:

$$Q=\frac{\pi\Delta p D^4}{128\mu L} \Rightarrow \Delta p=\frac{128\mu L Q}{\pi D^4}=\frac{128\mu L\bar{V}(\pi D^2/4)}{\pi D^4}=32\frac{L}{D}\frac{\mu\bar{V}}{D}$$

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho\bar{V}D}{\mu} \Rightarrow h_D=\frac{64}{\mathrm{Re}}\frac{L}{D}\frac{\bar{V}^2}{2}$$ → Por cálculo

2- Dinâmica dos Fluidos

2.4 Escoamento Incompressível Viscoso

- **Determinação da Perda de Carga**

$$\left(\frac{p_1}{\rho}+\alpha_1\frac{\bar{V}_1^2}{2}+gz_1\right)-\left(\frac{p_2}{\rho}+\alpha_2\frac{\bar{V}_2^2}{2}+gz_2\right)=h_{IT}$$

1- Perdas Distribuídas para um tubo horizontal de área cte:

$$\frac{p_1-p_2}{\rho}=\frac{\Delta p}{\rho}=h_D$$

Para escoamento Turbulento (determinação experimental):

$$\Delta p=\Delta p(D,L,e,\bar{V},\rho,\mu)$$

$$h_D=f\frac{L}{D}\frac{\bar{V}^2}{2}$$ → **Fórmula de Darcy-Weisbach**

$$f=\phi\left(\mathrm{Re},\frac{e}{D}\right)$$ → **Diagrama de Moody**

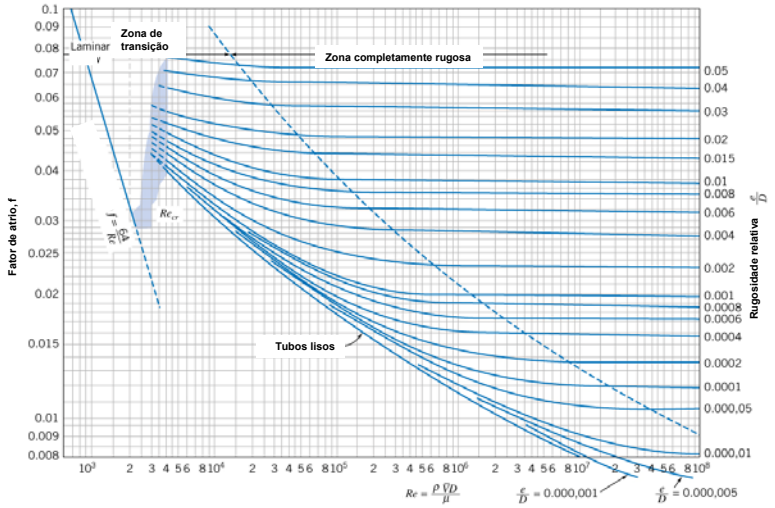
Para escoamento Laminar:

$$f=\frac{64}{\mathrm{Re}}$$

2- Dinâmica dos Fluidos

2.4 Escoamento Incompressível Viscoso

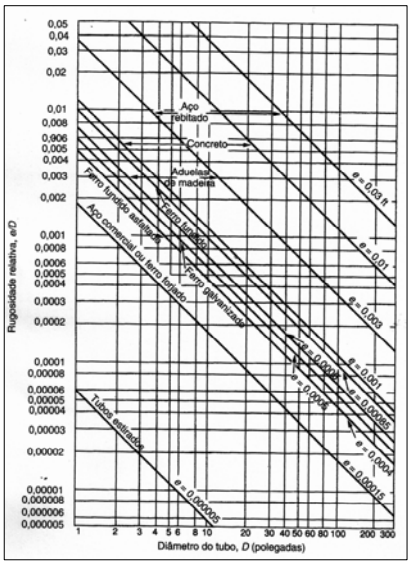
- **Diagrama de Moody**



2- Dinâmica dos Fluidos

2.4 Escoamento Incompressível Viscoso

- **Curvas de rugosidade relativa**



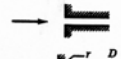
2- Dinâmica dos Fluidos

2.4 Escoamento Incompressível Viscoso

2- Perdas Localizadas

$$h_L = K \frac{\bar{V}^2}{2} \qquad h_L = f \frac{L_e}{D} \frac{\bar{V}^2}{2}$$

2.1- Entrada de Tubos

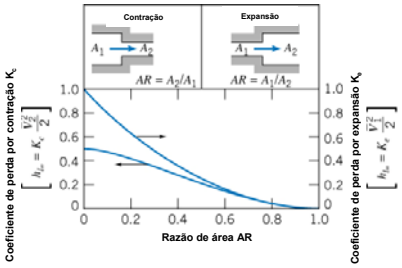
Tipo de Entrada		Coeficiente de Perda Localizada, K^a
Reentrante		0,78
Com quinas vivas		0,5
Arredondada		r/D: 0,02 | 0,06 | ≥0,15 K: 0,28 | 0,15 | 0,04

$$h_L = K \frac{\bar{V}^2}{2}$$

2- Dinâmica dos Fluidos

2.4 Escoamento Incompressível Viscoso

2.2- Expansões e Contrações Súbitas

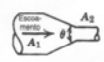


$$h_L = K \frac{\bar{V}^2}{2}$$

2- Dinâmica dos Fluidos

2.4 Escoamento Incompressível Viscoso

2.3- Expansões e Contrações Suaves (difusores e bocais)



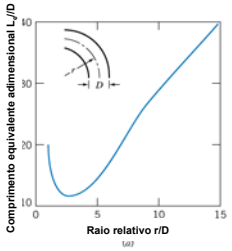
	Ângulo Incluso, θ, Graus						
A_2/A_1	10	15-40	50-60	90	120	150	180
0,50	0,05	0,05	0,06	0,12	0,18	0,24	0,26
0,25	0,05	0,04	0,07	0,17	0,27	0,35	0,41
0,10	0,05	0,05	0,08	0,19	0,29	0,37	0,43

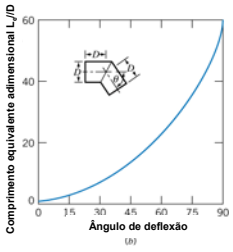
$$h_L = K \frac{\overline{V}_2^2}{2}$$

2- Dinâmica dos Fluidos

2.4 Escoamento Incompressível Viscoso

2.4- Curvas





$$h_L = f \frac{L_e}{D} \frac{\overline{V}^2}{2}$$

2.5- Válvulas e Acessórios

Tipo de Acessório	Comprimento Equivalente* L_e/D
Válvulas (inteiramente abertas)	
Válvula de gaveta	8
Válvula globo	340
Válvula em ângulo	150
Válvula de esfera	3
Válvula de retenção: tipo globo	600
: tipo em ângulo	55
Válvula de pé com crivo: de disco móvel	420
: de disco articulado	75
Cotovelo padronizado: 90°	30
: 45°	16
Curva em U, configuração apertada	50
Tê padronizado: escoamento direto	20
: escoamento pelo ramal	60

$$h_L = f \frac{L_e}{D} \frac{\overline{V}^2}{2}$$

2- Dinâmica dos Fluidos
2.4 Escoamento Incompressível Viscoso

2.6- Diâmetro hidráulico: $D_h \equiv \frac{4A}{P}$

Para um tubo circular: $D_h = D$

Para um tubo retangular: $D_h = \frac{4bh}{2(b+h)}$

Para um tubo quadrado: $D_h = h$

Em geral, empregados para escoamento de ar

2- Dinâmica dos Fluidos
2.4 Escoamento Incompressível Viscoso

A Solução de Problemas de Escoamento em Tubos:

A queda de pressão é função da vazão, da variação de elevação e da perda de carga total:

$$\Delta p = \Delta p(L, Q, D, e, \Delta z, config.do\,sistema, \rho, \mu)$$

Para o fluido incompressível, de propriedades constantes e com o arranjo de tubos conhecido, temos:

$$\Delta p = \Delta p(L, Q, D)$$

2- Dinâmica dos Fluidos

2.4 Escoamento Incompressível Viscoso

A Solução de Problemas de Escoamento em Tubos:

$$\left(\frac{p_1}{\rho}+\alpha_1\frac{\bar{V}_1^2}{2}+gz_1\right)-\left(\frac{p_2}{\rho}+\alpha_2\frac{\bar{V}_2^2}{2}+gz_2\right)=h_T \qquad h_T = h_D + h_L$$

$$\Delta p = \Delta p(L, Q, D)$$

Situações:

- L, Q e D conhecidos, Δp desconhecido
- Δp, Q e D conhecidos, L desconhecido
- Δp, L e D conhecidos, Q desconhecido
- Δp, L e Q conhecidos, D desconhecido

2- Dinâmica dos Fluidos

2.4 Escoamento Incompressível Viscoso

A Solução de Problemas de Escoamento em Tubos:

$$\left(\frac{p_1}{\rho}+\alpha_1\frac{\bar{V}_1^2}{2}+gz_1\right)-\left(\frac{p_2}{\rho}+\alpha_2\frac{\bar{V}_2^2}{2}+gz_2\right)=h_T \qquad h_T = h_D + h_L$$

$$\Delta p = \Delta p(L, Q, D)$$

1. **L, Q e D conhecidos, Δp desconhecido:**

- Fator de atrito (do diagrama de Moody em função de Re, e/D)
- Perda de carga total: $h_D + h_L$
- Equação da energia -> Δp

2- Dinâmica dos Fluidos

2.4 Escoamento Incompressível Viscoso

A Solução de Problemas de Escoamento em Tubos:

$$\left(\frac{p_1}{\rho}+\alpha_1\frac{\bar{V}_1^2}{2}+gz_1\right)-\left(\frac{p_2}{\rho}+\alpha_2\frac{\bar{V}_2^2}{2}+gz_2\right)=h_T \qquad h_T = h_D + h_L$$

$$\Delta p = \Delta p(L, Q, D)$$

2. Δp, Q e D conhecidos, L desconhecido

- Equação da energia -> perda de carga total
- Fator de atrito (do diagrama de Moody em função de Re, e/D)

$$h_D = f\frac{L}{D}\frac{\bar{V}^2}{2} \rightarrow L$$

2- Dinâmica dos Fluidos

2.4 Escoamento Incompressível Viscoso

A Solução de Problemas de Escoamento em Tubos:

$$\left(\frac{p_1}{\rho}+\alpha_1\frac{\bar{V}_1^2}{2}+gz_1\right)-\left(\frac{p_2}{\rho}+\alpha_2\frac{\bar{V}_2^2}{2}+gz_2\right)=h_T \qquad h_T = h_D + h_L$$

$$\Delta p = \Delta p(L, Q, D)$$

3. Δp, L e D conhecidos, Q desconhecido

- Processo iterativo, pois Q, e consequentemente V e Re, não são conhecidos

2- Dinâmica dos Fluidos

2.4 Escoamento Incompressível Viscoso

A Solução de Problemas de Escoamento em Tubos:

$$\left(\frac{p_1}{\rho}+\alpha_1\frac{\bar{V}_1^2}{2}+gz_1\right)-\left(\frac{p_2}{\rho}+\alpha_2\frac{\bar{V}_2^2}{2}+gz_2\right)=h_T \qquad h_T = h_D + h_L$$

$$\Delta p = \Delta p(L, Q, D)$$

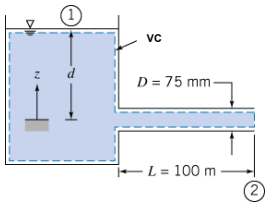
4. Δp, L e Q conhecidos, D desconhecido

- **Objetivo**: Determinar o diâmetro mínimo (mais barato) de tubo, capaz de suprir a vazão desejada.

  Como D é desconhecido, nem Re nem e/D podem se calculados diretamente, sendo necessário um processo iterativo.

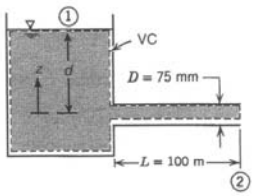
Exemplo 1: L, Q e D conhecidos, Δp desconhecido

- *Um tubo liso horizontal, de 100m de comprimento, está conectado a um grande reservatório. Que profundidade, d, deve ser mantida no resevatório para produzir uma vazão volumétrica de água de 0,0084m³/s? O diâmetro interno do tubo liso é 75mm. A entrada é de borda viva e a água descarrega para a atmosfera.*



DADOS: Escoamento de água a 0,0084 m³/s através de um tubo com 75 mm de diâmetro, com $L = 100$ m, ligado a um reservatório de nível constante. Entrada de quinas vivas.

DETERMINAR: A profundidade do reservatório, d, para manter o fluxo.



SOLUÇÃO:
Equação de cálculo:

$$\left(\frac{p_1}{\rho}+\alpha_1\frac{\overline{V}_1^2}{2}+gz_1\right)-\left(\frac{p_2}{\rho}+\alpha_2\frac{\overline{V}_2^2}{2}+gz_2\right)=h_{l_T}=h_l+h_{l_m} \qquad (8.28)$$

onde $h_l = f\frac{L}{D}\frac{\overline{V}^2}{2}$ e $h_{l_m} = K\frac{\overline{V}^2}{2}$

Para o problema dado, $p_1 = p_2 = p_{atm}$, $\overline{V}_1 \simeq 0$, $\overline{V}_2 = \overline{V}$, e $\alpha 2 \simeq 1{,}0$. Admitindo $z_2 = 0$, segue-se que $z_1 = d$. Simplificando a Eq. 8.28, vem

$$gd-\frac{\overline{V}^2}{2}=f\frac{L}{D}\frac{\overline{V}^2}{2}+K\frac{\overline{V}^2}{2}$$

Então,

$$d=\frac{1}{g}\left[f\frac{L}{D}\frac{\overline{V}^2}{2}+K\frac{\overline{V}^2}{2}+\frac{\overline{V}^2}{2}\right]=\frac{\overline{V}^2}{2g}\left[f\frac{L}{D}+K+1\right]$$

Como $\overline{V}=\frac{Q}{A}=\frac{4Q}{\pi D^2}$, segue-se que

$$d=\frac{8Q^2}{\pi^2D^4g}\left[f\frac{L}{D}+K+1\right]$$

Admitindo a água a 20 C, $\rho = 999$ kg/m³ e $\mu = 1{,}0 \times 10^{-3}$ kg/m · s. Portanto,

$$Re=\frac{\rho\overline{V}D}{\mu}=\frac{4\rho Q}{\pi\mu D}$$

$$Re=\frac{4}{\pi}\times 999\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\times 0{,}0084\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}}\times\frac{\text{m}\cdot\text{s}}{1{,}0\times10^{-3}\,\text{kg}}\times\frac{1}{0{,}075\,\text{m}}=1{,}42\times10^5$$

Para tubo liso, da Fig. 8.14, $f = 0{,}0170$. Do Quadro 8.1, $K = 0{,}5$. Então,

$$d=\frac{8Q^2}{\pi^2D^4g}\left[f\frac{L}{D}+K+1\right]$$

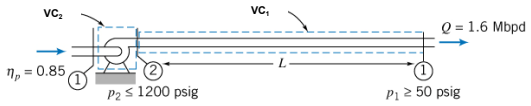
$$=\frac{8}{\pi^2}\times(0{,}0084)^2\,\frac{\text{m}^6}{\text{s}^2}\times\frac{1}{(0{,}075)^4\,\text{m}^4}\times\frac{\text{s}^2}{9{,}81\,\text{m}}\left[(0{,}0170)\frac{100\,\text{m}}{0{,}075\,\text{m}}+0{,}5+1\right]$$

$d = 4{,}45$ m ← d

[Este problema ilustra o método de cálculo da perda de carga total.]

Exemplo 2: Δp, Q e D conhecidos, L desconhecido

- *Petróleo cru escoa através de um trecho horizontal de um oleoduto a uma taxa de 1,6 milhões de barris por dia (1 barril = 42 galões). O diâmetro interno do tubo é 48in; a rugosidade do tubo é equivalente à do ferro galvanizado. A pressão máxima admissível é 1200psi; a pressão mínima requerida para manter os gases dissolvidos em solução no petróleo é 50psi. O petróleo cru tem SG=0,93; sua viscosidade à temperatura de bombeamento de 140ºF é 3,5x10⁴lbf.s/ft². Para estas condições, determine o espaçamento máximo possível entre estações de bombeamento. Se a eficiência da bomba é de 85%, determine a potência que deve ser fornecida a cada estação de bombeamento.*



DETERMINAR: (a) Espaçamento máximo, L.
(b) Potência necessária em cada estação de bombeamento.

SOLUÇÃO:
Apliquemos a equação da energia para escoamento permanente, incompressível.

Equações de cálculo:

$$\left(\frac{p_2}{\rho}+\alpha_2\frac{\overline{V}_2^2}{2}+gz_2\right)-\left(\frac{p_1}{\rho}+\alpha_1\frac{\overline{V}_1^2}{2}+gz_1\right)=h_{l_T}$$

$$h_{l_T}=h_l+h_{l_m}=f\frac{L}{D}\frac{\overline{V}^2}{2}+\underbrace{K\frac{\overline{V}^2}{2}}_{=0(3)}$$

Hipóteses: (1) $\alpha_1\overline{V}_1^2=\alpha_2\overline{V}_2^2$
(2) Tubo horizontal, $z_1=z_2$
(3) Desprezar as perdas localizadas
(4) Viscosidade constante

Então, usando o VC_1

$$\Delta p=p_2-p_1=f\frac{L}{D}\rho\frac{\overline{V}^2}{2} \quad \text{ou} \quad L=\frac{2D}{f}\frac{\Delta p}{\rho\overline{V}^2} \quad \text{onde} \quad f=f(Re,e/D)$$

$$\overline{V}=\frac{Q}{A}=1{,}6\times10^6\frac{\text{barril}}{\text{dia}}\times\frac{4}{\pi(4)^2\,\text{ft}^2}\times42\frac{\text{gal}}{\text{barril}}\times\frac{\text{ft}^3}{7{,}48\,\text{gal}}\times\frac{\text{dia}}{24\,\text{h}}\times\frac{\text{h}}{3.600\,\text{s}}$$

$$\overline{V}=8{,}27\,\text{ft/s}$$

$$Re=\frac{\rho\overline{V}D}{\mu}=(0{,}93)1{,}94\frac{\text{slug}}{\text{ft}^3}\times8{,}27\frac{\text{ft}}{\text{s}}\times4\,\text{ft}\times\frac{\text{ft}^2}{3{,}5\times10^{-4}\,\text{lbf}\cdot\text{s}}\times\frac{\text{lbf}\cdot\text{s}^2}{\text{slug}\cdot\text{ft}}$$

$$Re=1{,}71\times10^5$$

Da Fig. 8.15, $e/D=0{,}00012$, e da Fig. 8.14, $f\simeq0{,}017$. Então,

$$L=\frac{2}{0{,}017}\times4\,\text{ft}\times(1.200-50)\frac{\text{lbf}}{\text{in.}^2}\times\frac{\text{ft}^3}{(0{,}93)1{,}94\,\text{slug}}\times\frac{\text{s}^2}{(8{,}27)^2\,\text{ft}^2}$$

$$\times144\frac{\text{in.}^2}{\text{ft}^2}\times\frac{\text{slug}\cdot\text{ft}}{\text{lbf}\cdot\text{s}^2}=6{,}32\times10^5\,\text{ft}$$

DETERMINAR: (a) Espaçamento máximo, L.
(b) Potência necessária em cada estação de bombeamento.

Para determinar a potência de bombeamento, apliquemos a primeira lei da termodinâmica ao VC_2, através da bomba, entre as seções ① e ②.

Equação básica:

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \cancel{\frac{\partial}{\partial t}}\int_{VC} e\rho\, d\forall + \int_{SC}\left(u + \cancel{\frac{V^2}{2}} + \cancel{gz} + \frac{p}{\rho}\right)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

($= 0$ (1); $= 0$ (2); $= 0$ (3))

Hipóteses: (1) Escoamento permanente
(2) $\overline{V}_2 = \overline{V}_1$
(3) $z_2 = z_1$
(4) Escoamento uniforme em cada seção

Portanto,

$$\dot{W}_{ab} = -\dot{W}_s = \left(u_2 + \frac{p_2}{\rho}\right)\{\dot{m}\} + \left(u_1 + \frac{p_1}{\rho}\right)\{-\dot{m}\} - \dot{Q}$$

As perdas são determinadas em termos da eficiência da bomba,

$$\text{Perdas} = \left(\frac{1}{\eta} - \eta\right)\dot{W}_{ab}$$

Portanto,

$$\dot{W}_{ab} = \frac{1}{\eta}\frac{(p_2 - p_1)}{\rho}\dot{m} = \frac{1}{\eta}(p_2 - p_1)\overline{V}A = \frac{\overline{V}A\,\Delta p}{\eta}$$

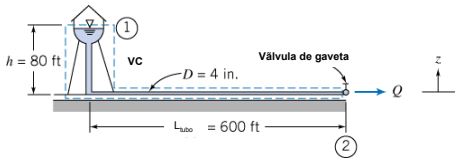
$$= \frac{1}{0{,}85} \times 8{,}27\,\frac{\text{ft}}{\text{s}} \times \frac{\pi}{4}(4)^2\,\text{ft}^2 \times 1.150\,\frac{\text{lbf}}{\text{in.}^2} \times 144\,\frac{\text{in.}^2}{\text{ft}^2} \times \frac{\text{hp}\cdot\text{s}}{550\,\text{ft}\cdot\text{lbf}}$$

$$\dot{W}_{ab} = 36.800\,\text{hp (potência fornecida)} \longleftarrow \dot{W}_{\text{necessária}}$$

Este problema ilustra o método de resolução para um comprimento desconhecido da tubulação. Note que a potência teórica de bombeamento, obtida da aplicação da primeira lei através da bomba, reduz-se a $\dot{W} = Q\,\Delta p$. A potência real necessária pode ser determinada da definição de eficiência, $\eta = \dot{W}_{\text{teórica}}/\dot{W}_{\text{real}}$](*)

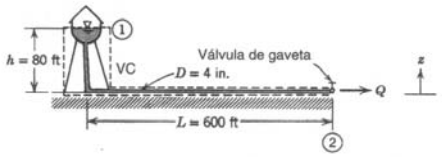
Exemplo 3: Δp, L e D conhecidos, Q desconhecido

- *Um sistema de proteção contra incêndio é suprido por um tubo vertical de 80 ft de altura, a partir de uma torre de água. O tubo mais longo no sistema tem 600 ft, é feito de ferro fundido e tem cerca de 20 anos de idade. O tubo contem uma válvula de gaveta; outras perdas menores podem ser desprezadas. O diâmetro do tubo é de 4 in. Determine a vazão máxima (em gpm) de água através desse tubo.*



DADOS: Um sistema de proteção contra incêndio, conforme mostrado.

DETERMINAR: Q em gpm.



SOLUÇÃO:

Equações de cálculo:

$$\left(\frac{p_1}{\rho}+\alpha_1\frac{\overline{V}_1^2}{2}+gz_1\right)-\left(\frac{p_2}{\rho}+\alpha_2\frac{\overline{V}_2^2}{2}+gz_2\right)=h_{l_T} \qquad (8.28)$$

$$h_{l_T}=f\frac{L}{D}\frac{\overline{V}_2^2}{2}+h_{l_e}=f\frac{L}{D}\frac{\overline{V}_2^2}{2}+f\frac{L_e}{D}\frac{\overline{V}_2^2}{2}$$

Hipóteses: (1) $p_1=p_2=p_{atm}$

(2) $\overline{V}_1\simeq 0$, $\alpha_2\simeq 1{,}0$

Portanto, a Eq. 8.28 pode ser escrita como

$$g(z_1-z_2)-\frac{\overline{V}_2^2}{2}=h_{l_T}=f\left(\frac{L}{D}+\frac{L_e}{D}\right)\frac{\overline{V}_2^2}{2}$$

Para uma válvula de gaveta inteiramente aberta, do Quadro 8.3, $L_e/D = 8$. Portanto,

$$g(z_1-z_2)=\frac{\overline{V}_2^2}{2}\left[f\left(\frac{L}{D}+8\right)+1\right]$$

Resolvendo para $\bar{V}_2$, obtemos

$$\bar{V}_2 = \left[\frac{2g(z_1 - z_2)}{f(L/D + 8) + 1}\right]^{1/2}$$

Por conservadorismo, admitamos que o tubo vertical tem o mesmo diâmetro do horizontal. Então,

$$\frac{L}{D} = \frac{600\,\text{ft} + 80\,\text{ft}}{4\,\text{in.}} \times 12\,\frac{\text{in.}}{\text{ft}} = 2.040$$

Também,

$$z_1 - z_2 = h = 80\,\text{ft}$$

Como $\bar{V}_2$ não é conhecido, não podemos calcular Re. Porém, podemos admitir um fator de atrito da região de escoamento totalmente rugoso. Da Fig. 8.15, $\varepsilon/D = 0{,}0025$ para tubo de ferro fundido. Como o tubo é bastante velho, escolhamos $\varepsilon/D = 0{,}005$. Então, da Fig. 8.14, suponhamos $f = 0{,}03$. Deste modo, uma primeira aproximação para $\bar{V}_2$ é

$$\bar{V}_2 = \left[2 \times 32{,}2\,\frac{\text{ft}}{\text{s}^2} \times 80\,\text{ft} \times \frac{1}{0{,}03(2.040 + 8) + 1}\right]^{1/2} = 9{,}08\,\text{ft/s}$$

Verifiquemos agora o valor de f admitido.

$$Re = \frac{\rho \bar{V} D}{\mu} = \frac{\bar{V} D}{\nu} = 9{,}08\,\frac{\text{ft}}{\text{s}} \times \frac{\text{ft}}{3} \times \frac{\text{s}}{1{,}2 \times 10^{-5}\,\text{ft}^2} = 2{,}52 \times 10^5$$

Para $\varepsilon/D = 0{,}005$, $f = 0{,}031$, da Fig. 8.14. Obtemos, então,

$$\bar{V}_2 = \left[2 \times 32{,}2\,\frac{\text{ft}}{\text{s}^2} \times 80\,\text{ft}\,\frac{1}{0{,}031(2.040 + 8) + 1}\right]^{1/2} = 8{,}94\,\text{ft/s}$$

A convergência é portanto satisfatória. A vazão em volume é

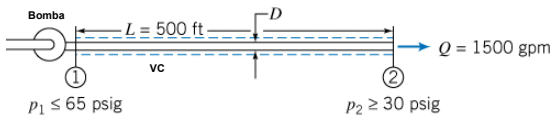
$$Q = \bar{V}_2 A = \bar{V}_2 \frac{\pi D^2}{4} = 8{,}94\,\frac{\text{ft}}{\text{s}} \times \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^2 \text{ft}^2 \times 7{,}48\,\frac{\text{gal}}{\text{ft}^3} \times 60\,\frac{\text{s}}{\text{min}}$$

$$Q = 350\,\text{gpm}$$

Este problema ilustra o procedimento para resolver problemas de escoamento em que a vazão é desconhecida. Note que a velocidade, e em conseqüência a vazão em volume, é essencialmente proporcional a $1/\sqrt{f}$. A duplicação de ε/D para levar em conta a vazão reduzida pela idade reduziu a vazão em cerca de 10 por cento.

Exemplo 4: Δp, L e Q conhecidos, D desconhecido

- *Cabeças borrifadoras (sprinklers) de um sistema de irrigação devem ser supridas com água proveniente de uma bomba acionada por motor de combustão interna, através de 500ft de tubos de alumínio trefilado. Na sua faixa de operação de maior eficiência, a descarga da bomba é de 1500gpm a uma pressão não superior a 65 psig. Para operação satisfatória, os borrifadores devem operar a 30psig ou mais. Perdas menores e variações de elevação podem ser desprezadas. Determine o menor diâmetro de tubo padrão que pode ser empregado.*



DETERMINAR: O menor diâmetro-padrão, D.

SOLUÇÃO:

Δp, L e Q são conhecidos. D é desconhecido, de modo que faz-se necessária a iteração para determinar o menor diâmetro padrão que satisfaça à queda de pressão exigida para a dada vazão. A maior queda de pressão permissível no comprimento L é,

$$\Delta p_{máx} = p_{1\,máx} - p_{2\,mín} = (65 - 30)\ \text{psi} = 35\ \text{psi}$$

Equações de cálculo:

$$\left(\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{\overline{V}_1^2}{2} + gz_1\right) - \left(\frac{p_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{\overline{V}_2^2}{2} + gz_2\right) = h_{l_T} \qquad (8.28)$$

$$h_{l_T} = h_l + h_{l_m} = f\frac{L}{D}\frac{\overline{V}_2^2}{2}$$

($h_{l_m} = 0$ (3))

Hipóteses:
(1) Escoamento permanente
(2) Escoamento incompressível
(3) $h_{l_T} = h_l$, i.e., $h_{l_m} = 0$
(4) $z_1 = z_2$
(5) $\overline{V}_1 = \overline{V}_2 = \overline{V}$; $\alpha_1 \simeq \alpha_2$

Portanto,

$$\Delta p = p_1 - p_2 = f\frac{L}{D}\frac{\rho\overline{V}^2}{2}$$

Como deveremos admitir diâmetros por tentativa, é conveniente introduzir $\overline{V} = Q/A = 4Q/\pi D^2$ de modo que

$$\Delta p = f\frac{L}{D}\frac{\rho}{2}\left(\frac{4Q}{\pi D^2}\right)^2 = \frac{8 f L \rho Q^2}{\pi^2 D^5} \qquad (1)$$

O número de Reynolds é necessário para determinar f. Em termos de Q,

$$Re = \frac{\rho\overline{V}D}{\mu} = \frac{\overline{V}D}{\nu} = \frac{4Q}{\pi D^2}\frac{D}{\nu} = \frac{4Q}{\pi \nu D}$$

Finalmente, Q deve ser convertido para pés cúbicos por segundo.

$$Q = 1.500\ \frac{\text{gal}}{\text{min}} \times \frac{\text{min}}{60\,\text{s}} \times \frac{\text{ft}^3}{7,48\,\text{gal}} = 3,34\,\text{ft}^3/\text{s}$$

Para uma estimativa inicial, admita um diâmetro nominal de 4 in (d.i. de 4,026 in.):

$$\text{Re} = \frac{4Q}{\pi \nu D} = \frac{4}{\pi} \times 3,34\,\frac{\text{ft}^3}{\text{s}} \times \frac{\text{s}}{1,2\times10^{-5}\,\text{ft}^2} \times \frac{1}{4,026\,\text{in.}} \times 12\,\frac{\text{in.}}{\text{ft}} = 1,06\times10^6$$

Para tubos estirados, $e/D = 0,000016$ (Fig. 8.15), de modo que $f \simeq 0,012$ (Fig. 8.14), e

$$\Delta p = \frac{8 f L \rho Q^2}{\pi^2 D^5} = \frac{8}{\pi^2} \times 0,012 \times 500\,\text{ft} \times 1,94\,\frac{\text{slug}}{\text{ft}^3} \times (3,34)^2\,\frac{\text{ft}^6}{\text{s}^2} \times \frac{1}{(4,026)^5\,\text{in.}^5} \times 1.728\,\frac{\text{in.}^3}{\text{ft}^3} \times \frac{\text{lbf}\cdot\text{s}^2}{\text{slug}\cdot\text{ft}}$$

$$\Delta p = 172\,\text{lbf/in.}^2 > \Delta p_{máx}$$

Como esta queda de pressão é grande demais, admitamos $D = 6$ in (na verdade, d.i. = 6,065 in):

$$Re = \frac{4}{\pi} \times 3,34\,\frac{\text{ft}^3}{\text{s}} \times \frac{\text{s}}{1,2\times10^{-5}\,\text{ft}^2} \times \frac{1}{6,065\,\text{in.}} \times 12\,\frac{\text{in.}}{\text{ft}} = 7,01\times10^5$$

Para tubos estirados, $e/D = 0{,}000010$ (Fig. 8.15), de modo que $f \simeq 0{,}013$ (Fig. 8.14), e

$$\Delta p = \frac{8}{\pi^2} \times 0{,}013 \times 500\,\text{ft} \times 1{,}94\,\frac{\text{slug}}{\text{ft}^3} \times (3{,}34)^2\,\frac{\text{ft}^6}{\text{s}^2} \times \frac{1}{(6{,}065)^5\,\text{in.}^5} \times (12)^3\,\frac{\text{in.}^3}{\text{ft}^3} \times \frac{\text{lbf}\cdot\text{s}^2}{\text{slug}\cdot\text{ft}}$$

$$\Delta p = 24{,}0\ \text{lbf/in.}^2 < \Delta p_{\text{máx}}$$

Como este valor é menor do que a queda de pressão permitida, devemos verificar para um tubo com 5 in de diâmetro nominal. Com um diâmetro interno real de 5,047 in,

$$Re = \frac{4}{\pi} \times 3{,}34\,\frac{\text{ft}^3}{\text{s}} \times \frac{\text{s}}{1{,}2\times10^{-5}\,\text{ft}^2} \times \frac{1}{5{,}047\,\text{in.}} \times 12\,\frac{\text{in.}}{\text{ft}} = 8{,}43\times10^5$$

Para tubos estirados, $e/D = 0{,}000012$ (Fig. 8.15), de modo que $f \simeq 0{,}012$ (Fig. 8.14), e

$$\Delta p = \frac{8}{\pi^2} \times 0{,}012 \times 500\,\text{ft} \times 1{,}94\,\frac{\text{slug}}{\text{ft}^3} \times (3{,}34)^2\,\frac{\text{ft}^6}{\text{s}^2} \times \frac{1}{(5{,}047)^5\,\text{in.}^5} \times (12)^3\,\frac{\text{in.}^3}{\text{ft}^3} \times \frac{\text{lbf}\cdot\text{s}^2}{\text{slug}\cdot\text{ft}}$$

$$\Delta p = 55{,}5\ \text{lbf/in.}^2 > \Delta p_{\text{máx}}$$

Deste modo, o critério para a queda de pressão é satisfeito para um diâmetro nominal mínimo de 6 in. D

Este problema ilustra o procedimento para resolver problemas de escoamentos em tubos quando o diâmetro é desconhecido. Note da Eq. 1 que a queda de pressão no escoamento turbulento é proporcional a f/D^5. A variação de f é pequena, de modo que Δp é aproximadamente proporcional a $1/D^5$, para vazão constante.

2- Dinâmica dos Fluidos

2.5 Análise Dimensional e Semelhança

Objetivo: Obter uma função envolvendo parâmetros adimensionais que apresente correlação com uma função envolvendo parâmetros dimensionais, de forma a reduzir o trabalho de levantamento experimental e fornecer funções-padrão que se apliquem a problemas físicos de natureza equivalente.

Procedimento: Aplicação do Teorema Pi de Buckingham

Passos:

1- Listar todos os **n** parâmetros dimensionais envolvidos no problema

2- Selecionar um conjunto **r** de dimensões fundamentais (primárias)

3- Listar as dimensões de todos os parâmetros em termos de dimensões primárias

4- Selecionar da lista de parâmetros dimensionais um conjunto de **m** (onde **m ≤ r**) parâmetros que contemple todas as **r** dimensões primárias

5- Formar equações dimensionais, combinando o conjunto selecionado no passo anterior com cada um dos **n-m** parâmetros remanescentes, a fim de formar grupos adimensionais (parâmetros **π**), resultando em **n-m** equações

6- Certificar-se de que cada grupo π obtido é adimensional, através do emprego de outro sistema de dimensões fundamentais

Obs: A relação entre os parâmetros adimensionais obtidos deve ser determinada experimentalmente

Exemplo: Força de arrasto sobre uma esfera lisa

- *Considerando que a força de arrasto F sobre uma esfera lisa depende da velocidade relativa V, do diâmetro da esfera D, da massa específica do fluido, ρ, e da viscosidade do fluido, μ, obter um conjunto de grupos adimensionais que possam ser usados para correlacionar dados experimentais.*

DADOS: $F = f(\rho, V, D, \mu)$ para uma esfera lisa.

DETERMINAR: Um conjunto apropriado de grupos adimensionais.

SOLUÇÃO:
(Os números dentro de círculos referem-se aos passos do procedimento de determinação dos parâmetros Π adimensionais.)

① $F \quad V \quad D \quad \rho \quad \mu \qquad n = 5$ parâmetros

② Selecione as dimensões primárias M, L e t

③ $F \quad V \quad D \quad \rho \quad \mu$

$\frac{ML}{t^2} \quad \frac{L}{t} \quad L \quad \frac{M}{L^3} \quad \frac{M}{Lt} \qquad r = 3$ dimensões primárias

que formem um conjunto que contemple todas as dimensões primárias

④ Selecione os parâmetros ~~que se repetem~~ ρ, V, D

⑤ Então, $n - m = 2$ grupos adimensionais resultarão. Estabelecendo equações dimensionais, obtemos

$$\Pi_1 = \rho^a V^b D^c F = \left(\frac{M}{L^3}\right)^a \left(\frac{L}{t}\right)^b (L)^c \left(\frac{ML}{t^2}\right) = M^0 L^0 t^0$$

Igualando os expoentes de M, L, e t resulta em

$$\Pi_1 = \rho^a V^b D^c F = \left(\frac{M}{L^3}\right)^a \left(\frac{L}{t}\right)^b (L)^c \left(\frac{ML}{t^2}\right) = M^0 L^0 t^0$$

$$\left.\begin{array}{ll} M: & a + 1 = 0 \quad a = -1 \\ L: & -3a + b + c + 1 = 0 \quad c = -2 \\ t: & -b - 2 = 0 \quad b = -2 \end{array}\right\} \quad \text{Portanto, } \Pi_1 = \frac{F}{\rho V^2 D^2}$$

De modo análogo,

$$\Pi_2 = \rho^d V^e D^f \mu = \left(\frac{M}{L^3}\right)^d \left(\frac{L}{t}\right)^e (L)^f \left(\frac{M}{Lt}\right) = M^0 L^0 t^0$$

$$\left.\begin{array}{ll} M: & d + 1 = 0 \quad d = -1 \\ L: & -3d + e + f - 1 = 0 \quad f = -1 \\ t: & -e - 1 = 0 \quad e = -1 \end{array}\right\} \quad \text{Portanto, } \Pi_2 = \frac{\mu}{\rho VD}$$

⑥ Verifique usando as dimensões F, L e t

$$\Pi_1 = \frac{F}{\rho V^2 D^2} : F \frac{L^4}{Ft^2} \left(\frac{t}{L}\right)^2 \frac{1}{L^2} = [1]$$

onde [ ] significa "tem as dimensões de", e

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho VD} : \frac{Ft}{L^2} \frac{L^4}{Ft^2} \frac{t}{L} \frac{1}{L} = [1]$$

A relação funcional é $\Pi_1 = f(\Pi_2)$, ou

$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = f\left(\frac{\mu}{\rho VD}\right)$$

como observado anteriormente. A forma da função, f, deve ser determinada experimentalmente.