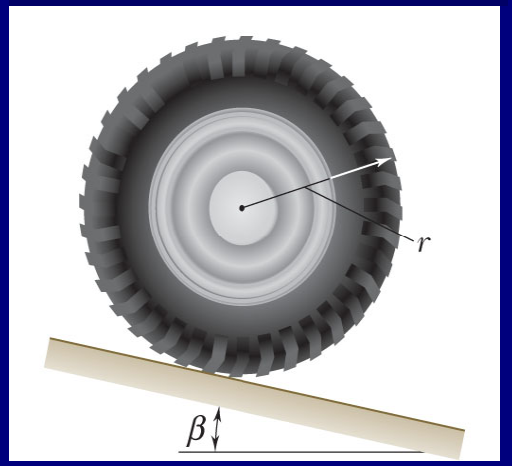


VI – Cinética Plana de Corpos Rígidos

Conteúdo

Introdução

Equações de movimento para um corpo rígido

Quantidade de movimento angular de um corpo rígido em movimento

Movimento plano de um corpo rígido: Princípio de d'Alembert

Movimento plano restrito: Rotação fora de centro e Rolamento

Introdução

- Neste e nos próximos dois capítulos, estaremos interessados na cinética dos corpos rígidos, isto é, nas relações das forças que atuam sobre um corpo rígido com sua forma e sua massa e o consequente movimento gerado.

- Os resultados encontrados neste capítulo serão limitados às seguintes situações:

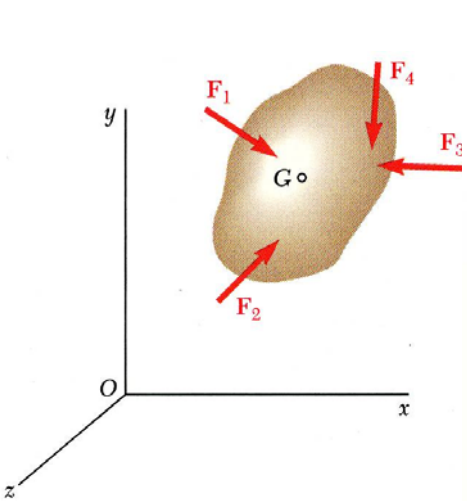
- Movimento de corpos rígidos no plano;
- Corpos rigidos consistindo em placas planas ou corpos simetricos em relação a um plano de referência

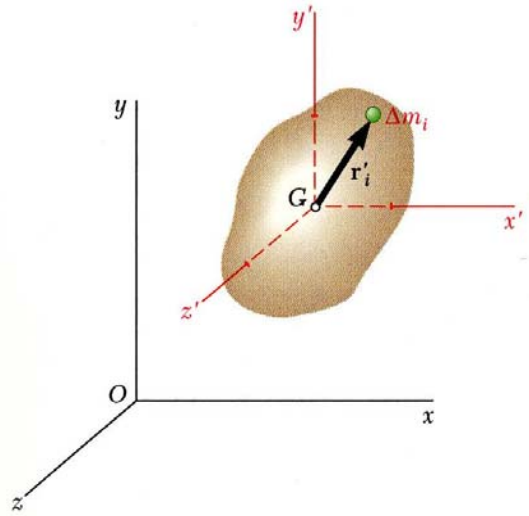
- A aproximação utilizada consistirá em considerar que os corpos rígidos são feitos de um número muito grande de particulas e com isso utilizar os resultados encontrados no capítulo 4.

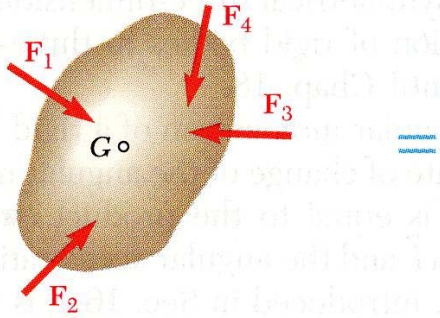
$$\sum \vec{F} = m\vec{\bar{a}} \qquad \text{e} \qquad \sum \vec{M}_G = \dot{\vec{H}}_G$$

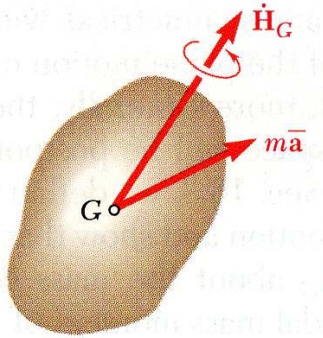
- O princípio de D'Alembert será aplicado para provar que as forças externas que atuam em um corpo rígido são equivalentes ao vetor $m\vec{\bar{a}}$ relacionado com seu centro de massa e ao binário de valor $\bar{I}\alpha$.

Equações de movimento para um corpo rígido









- Considere um corpo rígido agindo por ação de várias forças externas.
- Considere o corpo constituído de um número muito grande de partículas.
- Para o movimento do centro de massa G do corpo , utilizando o sistema Newtoniano xyz:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

- Para o movimento do corpo em relação ao sistema baricêntrico x'y'z' ,

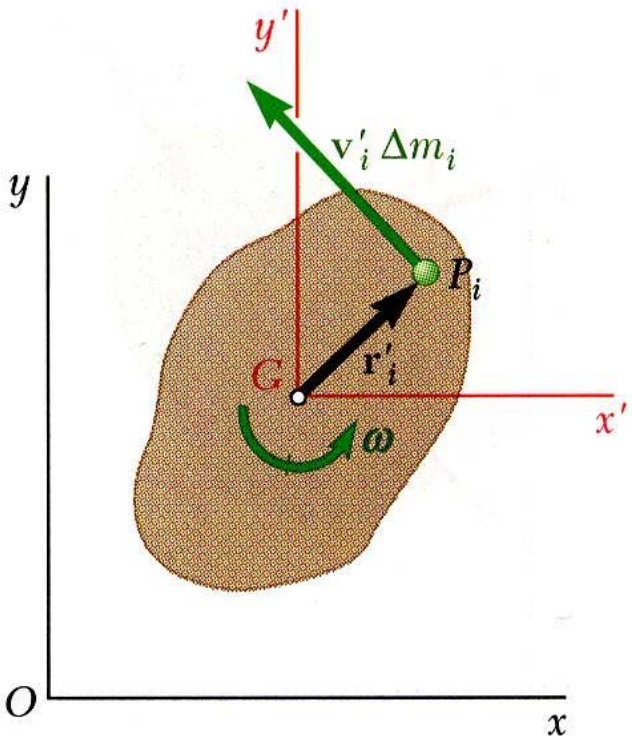
$$\sum \vec{M}_G = \dot{\vec{H}}_G$$

O sistema de forças externas é equivalente ao sistema constituído por

$$m\vec{a} \text{ e } \dot{\vec{H}}_G .$$

Quantidade de movimento angular de um corpo rígido

- Considere uma placa rigida movimentando-se no plano:



- A quantidade de movimento angular do corpo pode ser calculada por:

$$\vec{H}_G = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i' \times \vec{v}_i' \, \Delta m_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i') \, \Delta m_i]$$
$$= \vec{\omega} \sum (r_i'^2 \, \Delta m_i)$$
$$= \bar{I}\vec{\omega}$$

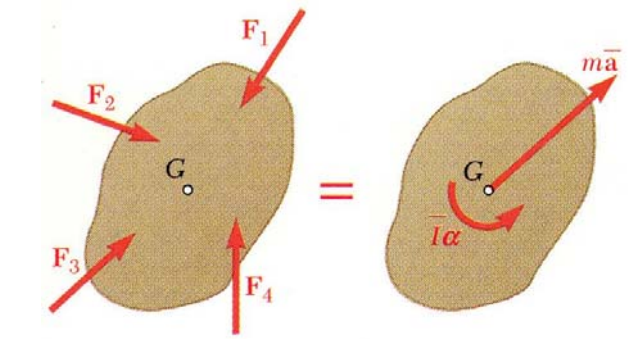
- Após diferenciação em relação ao tempo,

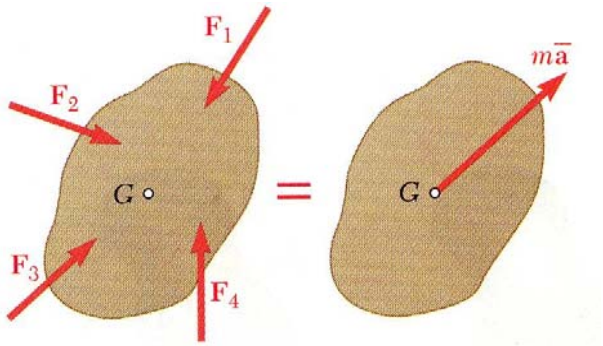
$$\dot{\vec{H}}_G = \bar{I}\dot{\vec{\omega}} = \bar{I}\vec{\alpha}$$

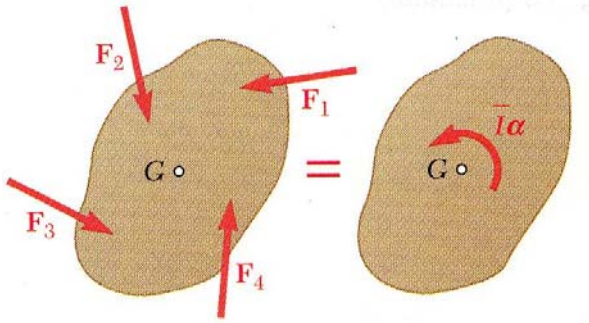
- Resultados também são válidos para o movimento plano de corpos que são simétricos em relação a um plano de referência

- Resultados não serão validos para corpos não simétricos ou em movimento tridimensional.

Princípio de D'Alembert







- O movimento plano de um corpo rígido é definido pela força resultante e pela quantidade de movimento angular resultante em torno de G

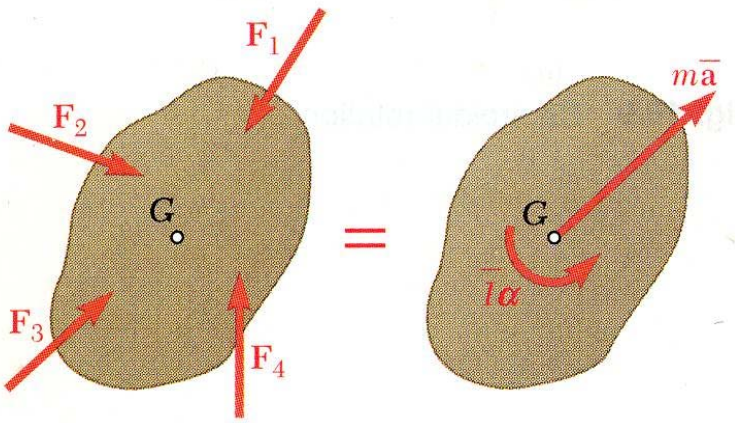
$$\sum F_x = m\bar{a}_x \quad \sum F_y = m\bar{a}_y \quad \sum M_G = \bar{I}\alpha$$

- As forças externas e as forças coletivas efetivas de um corpo são equipolentes (se reduzem a uma resultante e a uma quantidade de movimento resultante) e equivalentes (exercem o mesmo efeito sobre o corpo)

- Princípio de d'Alembert: As forças externas atuando sobre um corpo rígido são equivalentes às forças efetivas das diversas partículas que formam o corpo

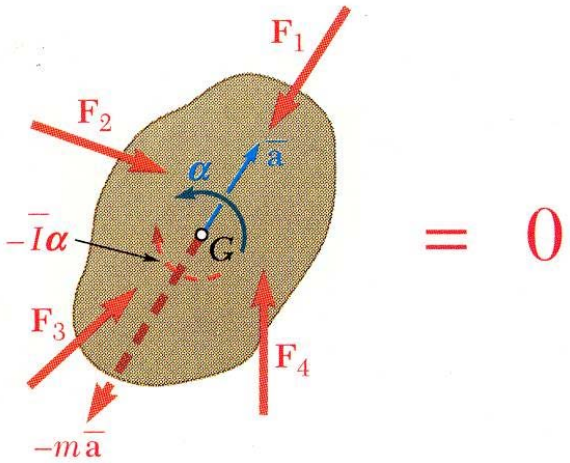
- A equação geral de um corpo rígido simétrico a um plano de referência pode ser substituida pela soma de uma translação e uma rotação centroidal.

Problemas envolvendo movimentos de um corpo rígido



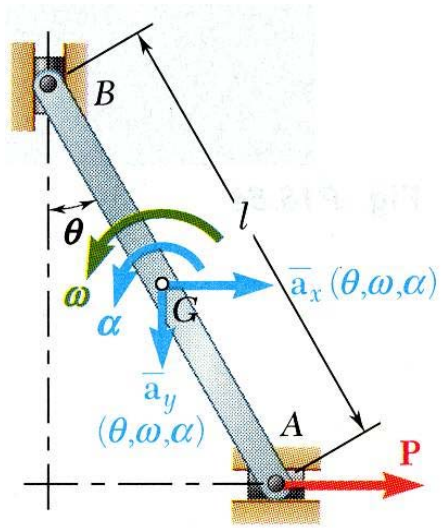
- A relação fundamental entre as forças que atuam sobre um corpo rígido em movimento plano e a aceleração do seu centro de massa e a aceleração angular do corpo é ilustrado em uma equação do diagrama de corpo livre

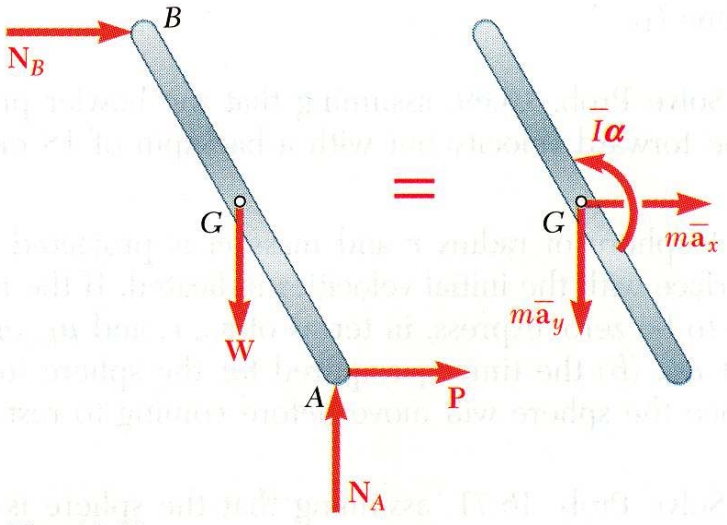
- As técnicas para resolver problemas de equilíbrio estático podem ser aplicadas para resolver problemas de movimento plano, utilizando
  - Princípio de d'Alembert, ou
  - Princípio do equilibrio dinâmico



- Estas técnicas podem também ser aplicadas a problemas envolvendo o movimento plano de sistemas de corpos rígidos ao se fazer uma equação diagrama de corpo livre para cada corpo

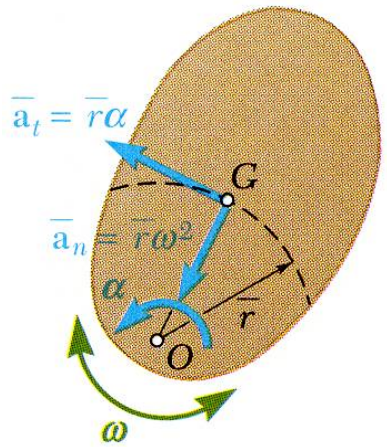
Movimento plano com restrição

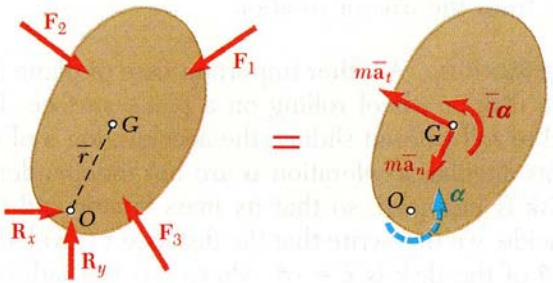


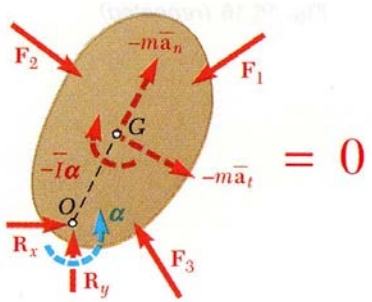


- A maioria das aplicações de engenharia envolvem corpos rígidos que se movem sob restrições dadas, por exemplo, manivelas, bielas e as rodas .
- Movimento plano restrito: movimentos com determinadas relações entre os componentes da aceleração do centro de massa e da aceleração angular do corpo.
- Solução de um problema envolvendo movimento plano limitado começa com uma análise cinemática..
- Ou seja, dado θ, ω, e α, encontrar P, N_A, e N_B.
  - análise cinemática nos leva a $\bar{a}_x$ e $\bar{a}_y$.
  - a aplicação do princípio de d'Alembert leva a P, N_A, and N_B.

Rotação fora de centro







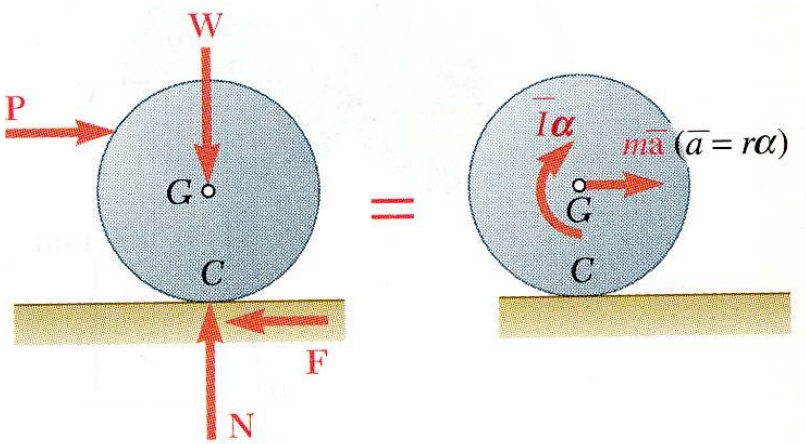
- Rotação fora de centro: movimento de um corpo que é forçado a girar sobre um eixo fixo que não passa pelo seu centro de massa

- Relação cinemática entre o movimento do centro de massa G e o movimento do corpo em relação a G.

$$\bar{a}_t = \bar{r}\alpha \qquad \bar{a}_n = \bar{r}\omega^2$$

- As relações cinemáticas são usadas para eliminar $\bar{a}_t$ e $\bar{a}_n$ das equações derivadas do princípio de d'Alembert ou do método do equilibrio dinâmico

Rolamento



- Para um disco uniforme limitado a rolar sem deslizar,

$$\bar{x} = r\theta \quad \Rightarrow \quad \bar{a} = r\alpha$$

- rolar sem deslizar:

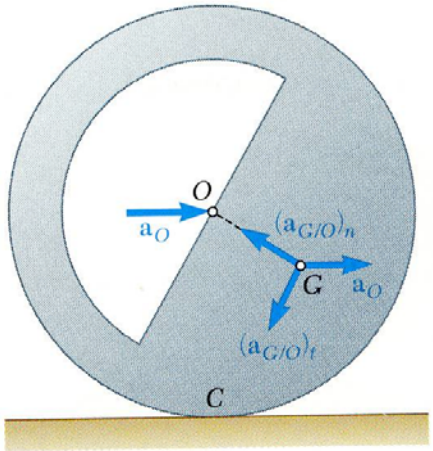
$$F \le \mu_s N \qquad \bar{a} = r\alpha$$

Rolando , deslizamento iminente

$$F = \mu_s N \qquad \bar{a} = r\alpha$$

Rolando e deslizando independente

$$F = \mu_k N \qquad \bar{a}, r\alpha$$



- Para o centro geométrico de um disco não uniforme:

$$a_O = r\alpha$$

A aceleração do centro de massa,

$$\vec{\bar{a}}_G = \vec{a}_O + \vec{a}_{G/O}$$
$$= \vec{a}_O + (\vec{a}_{G/O})_t + (\vec{a}_{G/O})_n$$