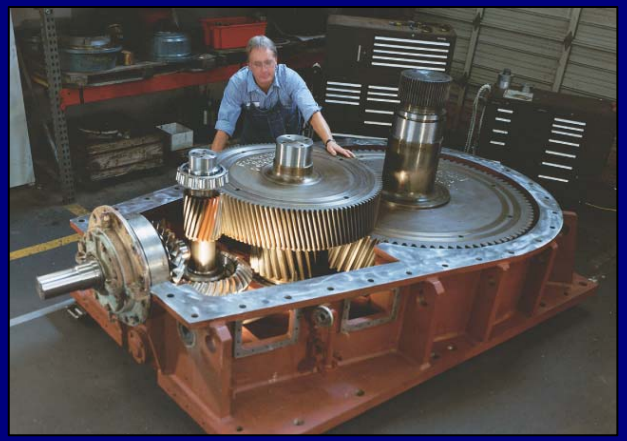


V – Cinemática Plana de Corpos Rígidos

Conteúdo

Introdução

Translação

Rotação em torno de um Eixo Fixo

Rotação em torno de um Eixo Fixo: Velocidade e Aceleração

Rotação em torno de um Eixo Fixo: Placas Representativas

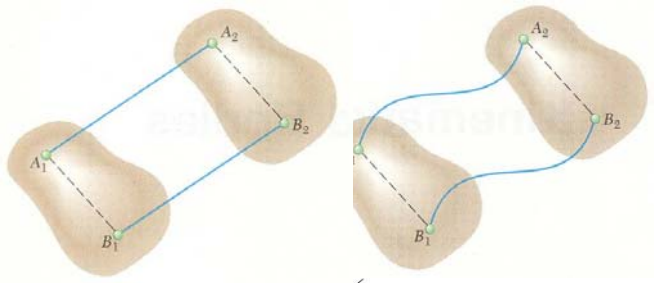
Rotação de um Corpo Rígido em torno de um Eixo Fixo: Equações Descritivas

Movimento Plano Geral

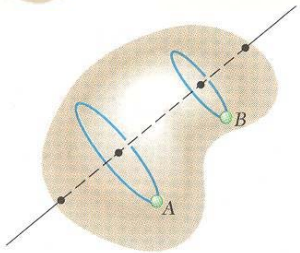
Velocidade Absoluta e Relativa no Movimento Plano

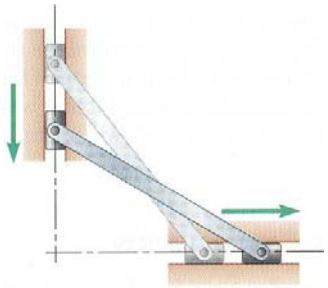
Aceleração Absoluta e Relativa no Movimento Plano

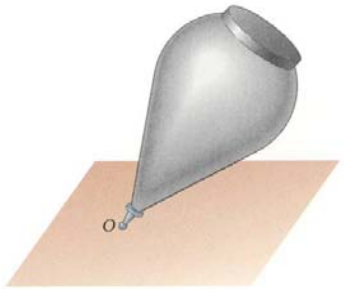
Introdução



- **Cinemática de corpos rígidos**: determinação das relações temporais descritivas da posição, velocidade, e aceleração **lineares** das partículas (pontos) que constituem um corpo rígido, em função da velocidade e aceleração **angulares** inerentes ao movimento deste.

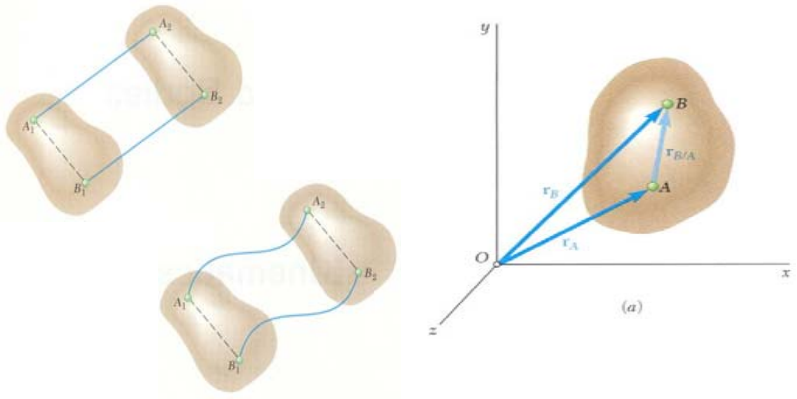


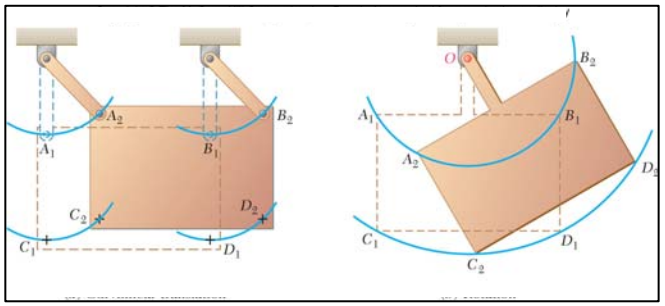


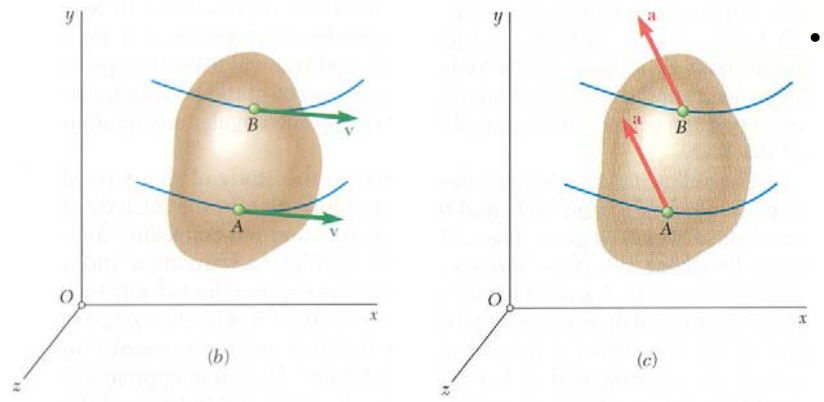


- Classificação dos movimentos de corpo rígido:
  - translação:
    - retilínea
    - curvilínea
  - rotação sobre um eixo fixo (movimento plano simples)
  - movimento plano geral (restrito em um plano)
  - movimento sobre um ponto fixo (movimento particular em 3D)
  - movimento geral no espaço tridimensional

Translação







- Considere um corpo rígido em translação:

- a direção de qualquer linha reta dentro do corpo é constante

- todas as partículas que formam o corpo se movem em linhas paralelas.

- Para quaisquer duas partículas no corpo,

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}$$

- Derivando em relação ao tempo,

$$\dot{\vec{r}}_B = \dot{\vec{r}}_A + \dot{\vec{r}}_{B/A} = \dot{\vec{r}}_A$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A$$

Ou seja, todas as partículas têm a mesma velocidade.

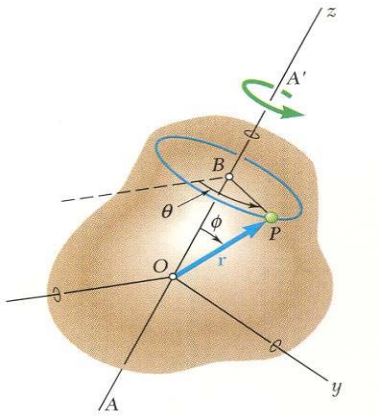
- Derivando em relação ao tempo novamente,

$$\ddot{\vec{r}}_B = \ddot{\vec{r}}_A + \ddot{\vec{r}}_{B/A} = \ddot{\vec{r}}_A$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A$$

Ou seja, todas as partículas têm a mesma aceleração.

Rotação sobre um Eixo Fixo: Velocidade

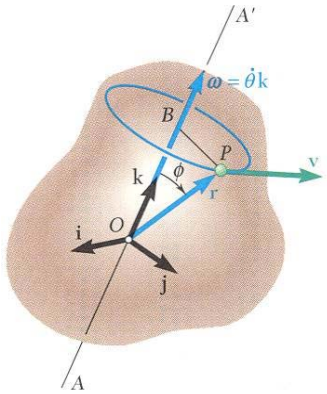


- Considere a rotação de um corpo rígido sobre um eixo fixo AA', coincidente com o eixo z
- O vetor de velocidade $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ da partícula P é tangente à trajetória de P com módulo $v = ds/dt$.

$$\Delta s = (BP)\Delta\theta = (r\,\mathrm{sen}\,\phi)\Delta\theta$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}(r\,\mathrm{sen}\,\phi)\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = r\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\phi$$

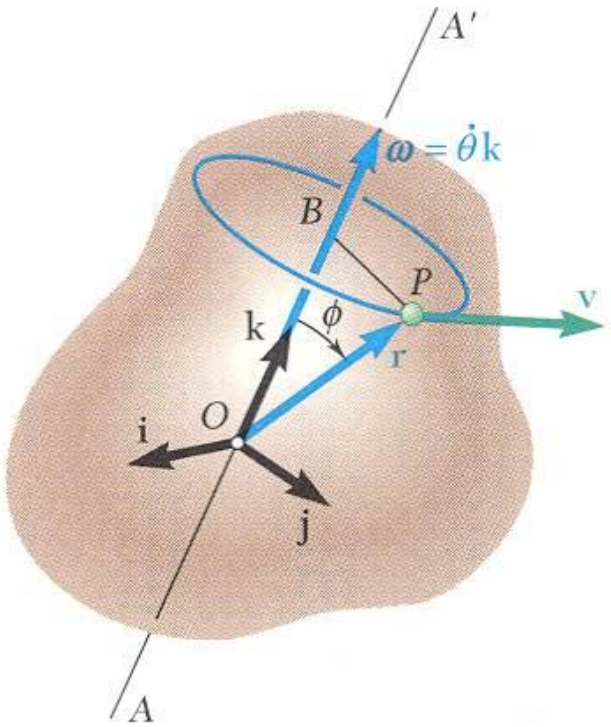
- O mesmo resultado é obtido a partir de,



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k} = \dot{\theta}\,\vec{k} = \text{velocidade angular}$$

Rotação sobre um Eixo Fixo: Aceleração



- Derivando para determinar a aceleração,

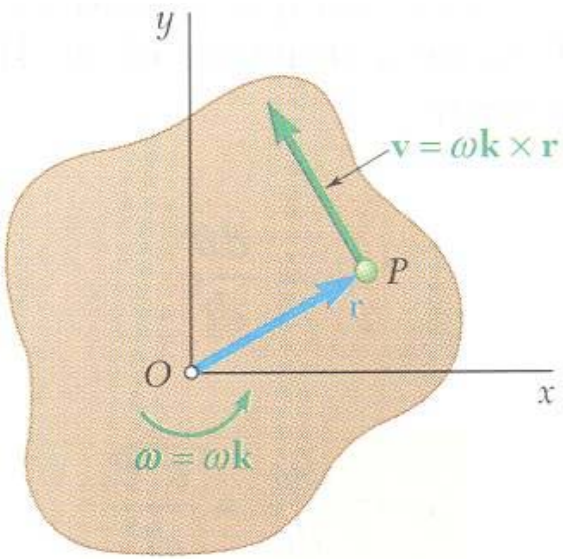
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r})$$
$$= \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$$
$$= \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{v}$$

- $\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha} = \text{aceleração angular}$
$$= \alpha\vec{k} = \dot{\omega}\vec{k} = \ddot{\theta}\vec{k}$$

- A aceleração de P é uma combinação de dois vetores,

$$\vec{a} = \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}$$
$$\vec{\alpha}\times\vec{r} = \text{componente de aceleração tangencial}$$
$$\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r} = \text{componente de aceleração radial}$$

Rotação sobre um Eixo Fixo: Placas Representativas



- Considere o movimento de uma placa representativa em um plano perpendicular ao eixo de rotação.

- A velocidade de qualquer ponto P da placa,

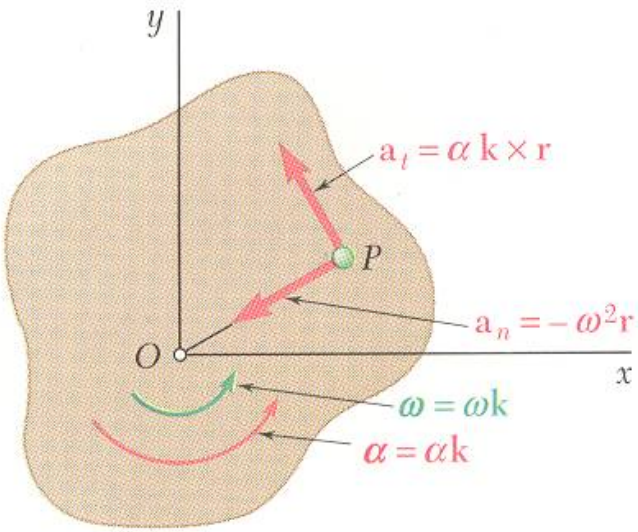
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \vec{k} \times \vec{r}$$

$$v = r\omega$$

- A aceleração de qualquer ponto P da placa,

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$= \alpha \vec{k} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r}$$

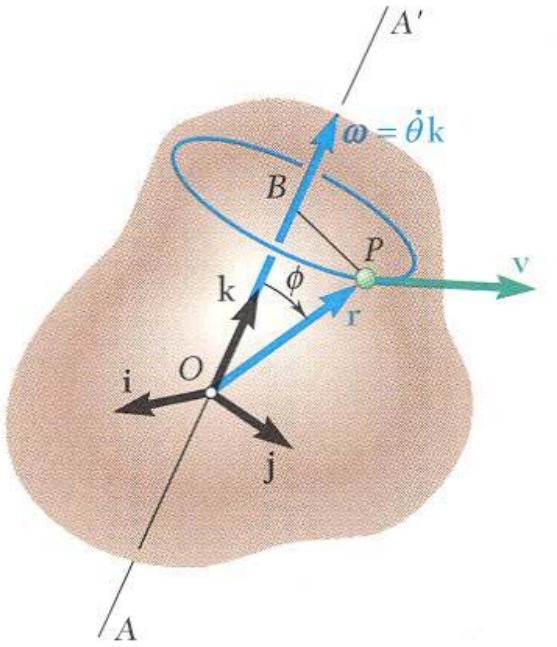


- Resolvendo a aceleração em componentes tangencial e normal,

$$\vec{a}_t = \alpha \vec{k} \times \vec{r} \qquad a_t = r\alpha$$

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r} \qquad a_n = r\omega^2$$

Rotação de um Corpo Rígido em torno de um Eixo Fixo: Equações Descritivas



- O movimento de um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo é frequentemente especificado pelo tipo de aceleração angular, podendo esta ser dada como função do tempo, da posição angular (ângulo) ou da velocidade angular.

- Sendo:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{ou} \qquad dt = \frac{d\theta}{\omega}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

- Rotação uniforme, α = 0:

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

- Rotação uniformemente acelerada, α = constante:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

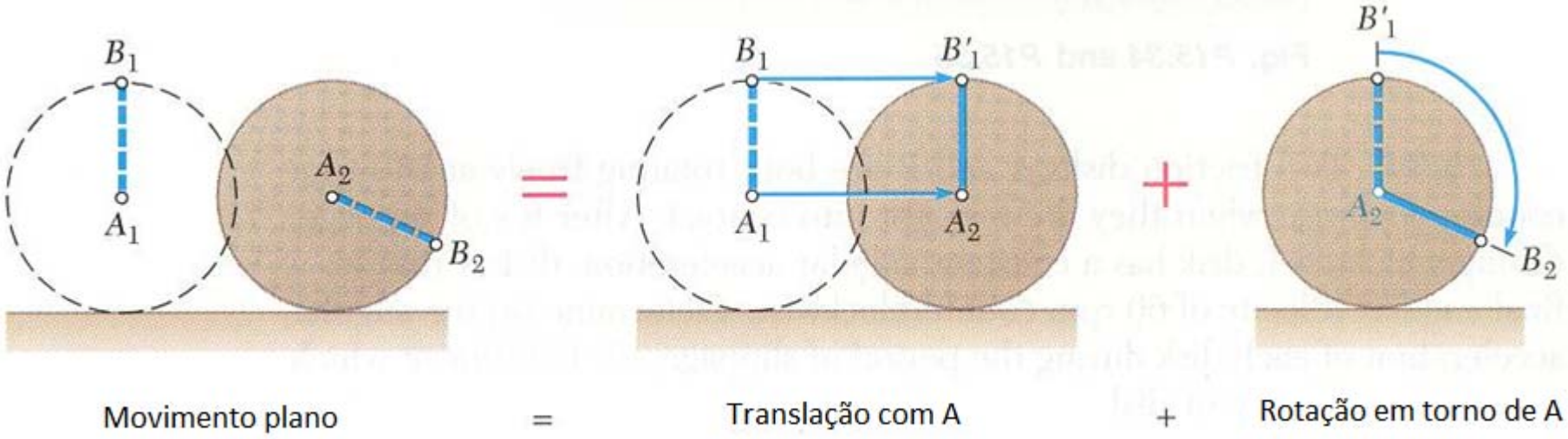
Exemplos de Aplicação





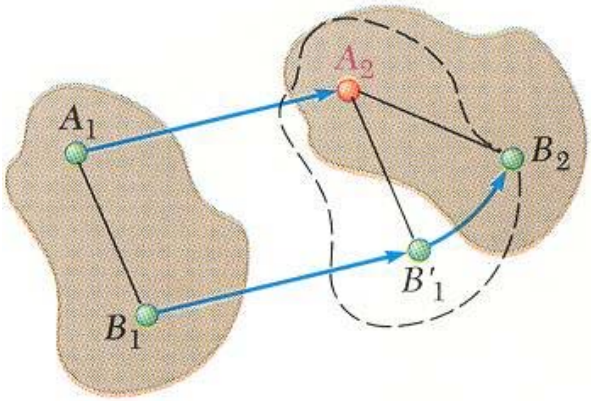


Movimento Plano Geral



- O Movimento Plano Geral não é nem uma translação, nem uma rotação.

- Pode ser considerado como a soma de uma translação e rotação.

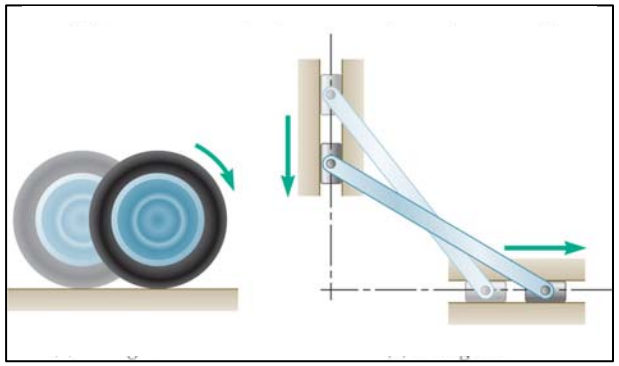


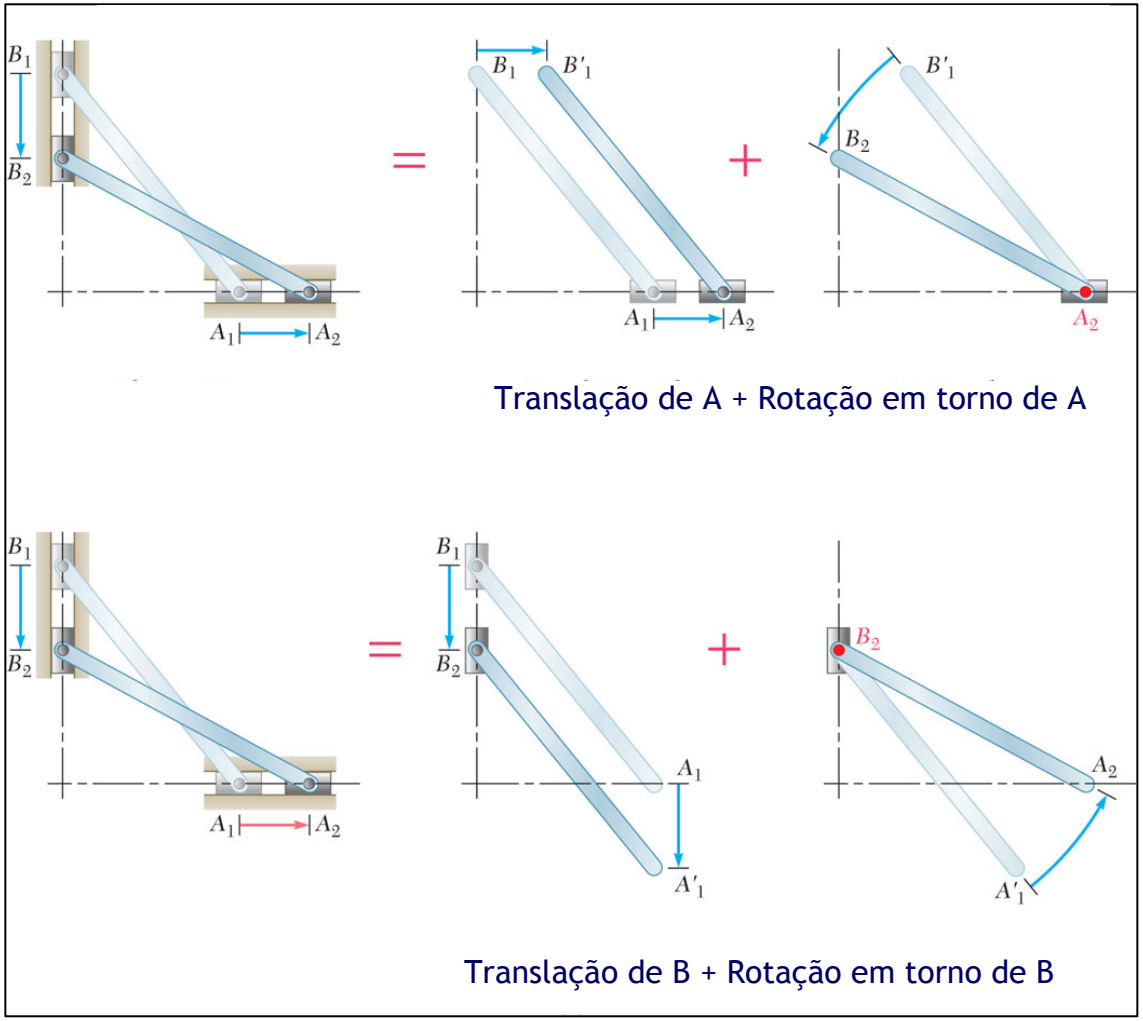
- O deslocamento dos pontos A_1 e B_1 para A_2 e B_2 pode ser dividido em duas etapas:

- translação de A_1 para A_2 e B_1 para B_1'

- rotação em relação a A_2 de B_1' para B_2

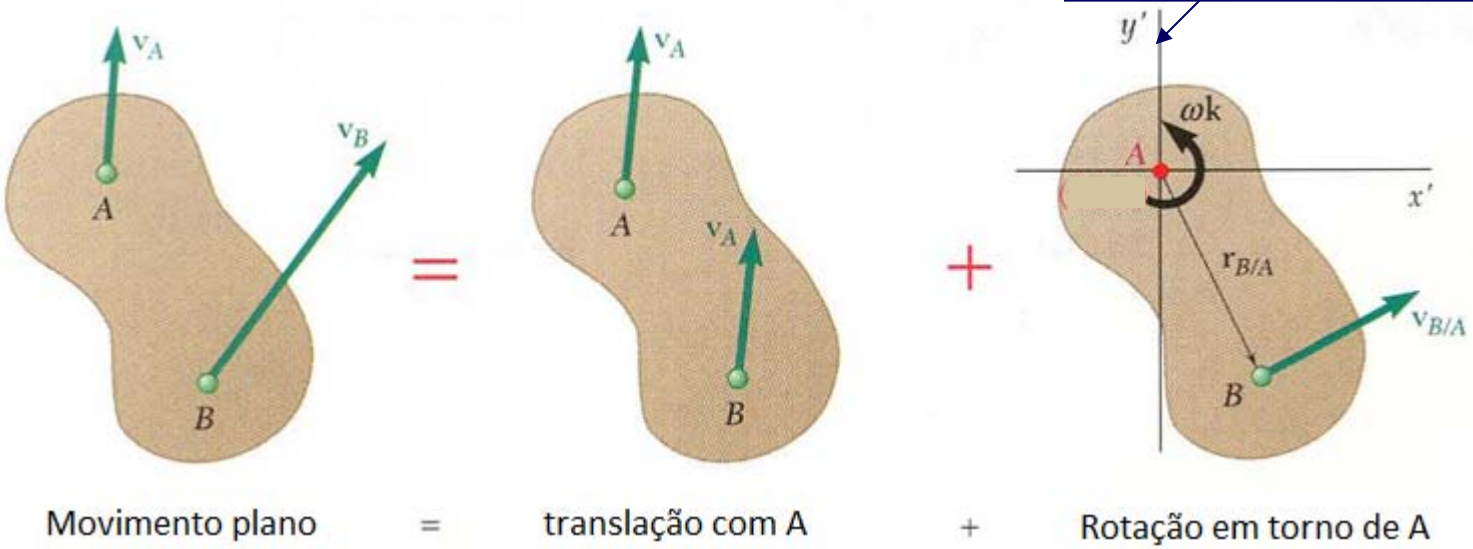
Exemplos

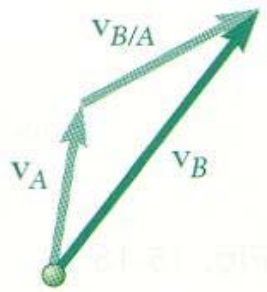



B1
B2
A1
A2
B'1
A'1
A'2
Translação de A + Rotação em torno de A
Translação de B + Rotação em torno de B

Velocidade Absoluta e Relativa no Movimento Plano

Sistema de coordenadas (referencial) fixo em A, transladando com este ponto.





$$v_B = v_A + v_{B/A}$$

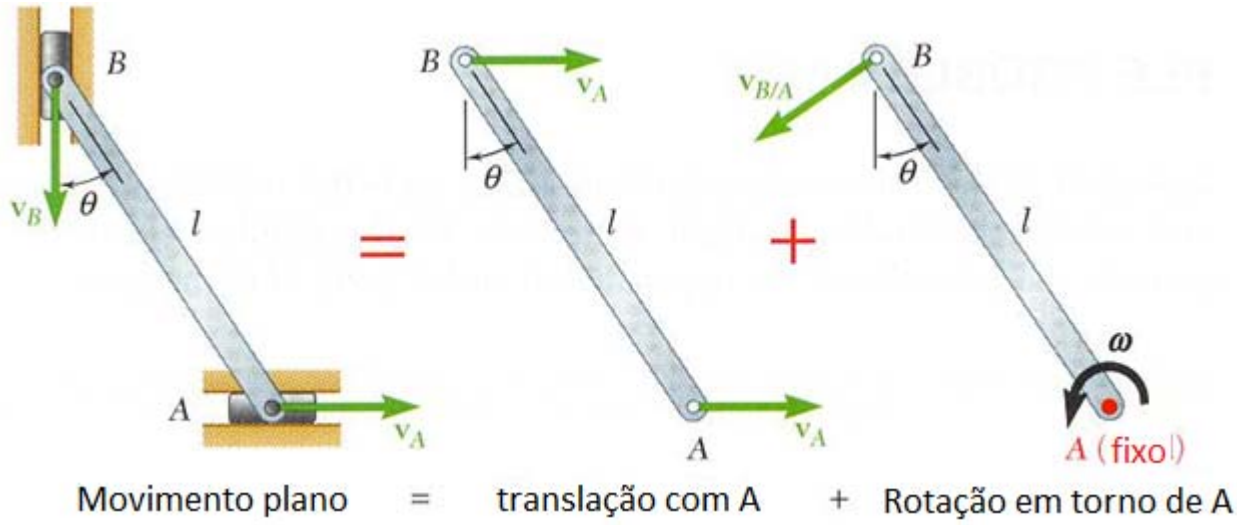
- Qualquer movimento plano pode ser substituído por uma translação de um ponto de referência arbitrário A e uma rotação simultânea em torno de A.

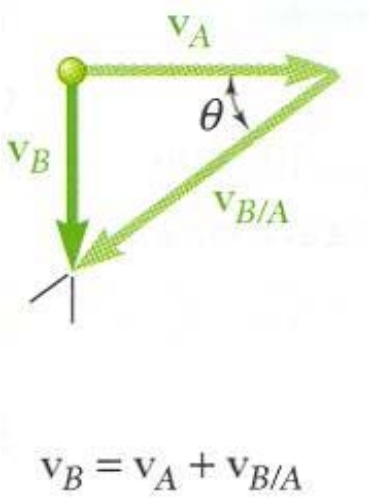
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

$$\vec{v}_{B/A} = \omega\vec{k} \times \vec{r}_{B/A} \qquad v_{B/A} = r\omega$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \omega\vec{k} \times \vec{r}_{B/A}$$

Velocidade Absoluta e Relativa no Movimento Plano





- Assumindo que a velocidade v_A da extremidade A é conhecida, deseja-se determinar a velocidade v_B da extremidade B e a velocidade angular ω em termos de v_A, l, e θ.

- A direção de v_B e $v_{B/A}$ são conhecidas. Assim, a partir do diagrama de velocidades:

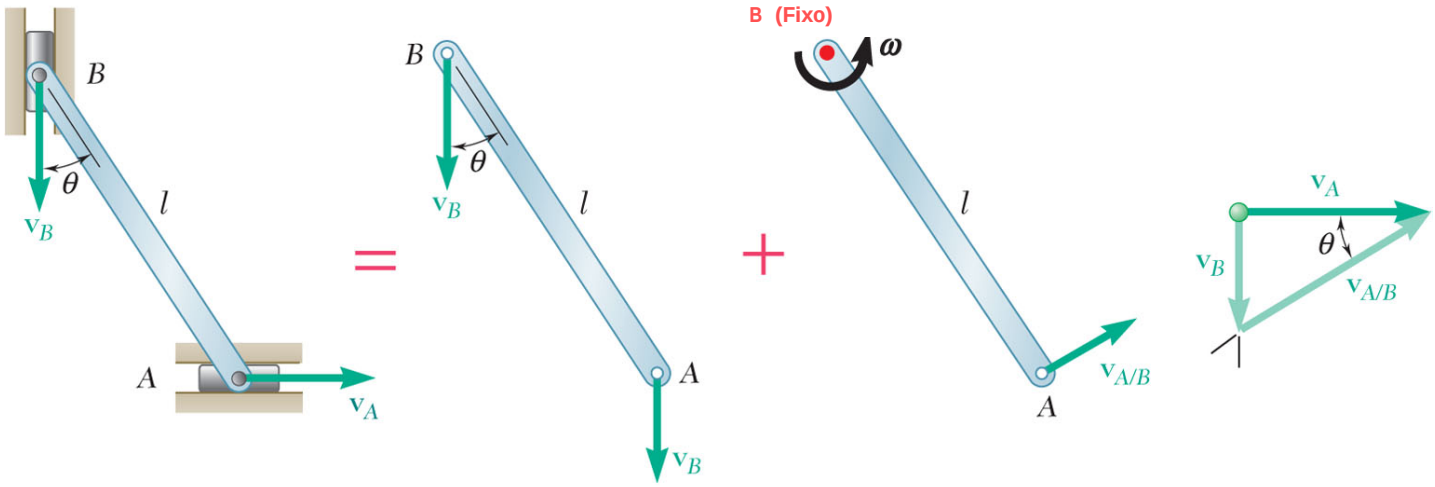
$$\frac{v_B}{v_A} = \tan\theta$$

$$v_B = v_A \tan\theta$$

$$\frac{v_A}{v_{B/A}} = \frac{v_A}{l\omega} = \cos\theta$$

$$\omega = \frac{v_A}{l\cos\theta}$$

Velocidade Absoluta e Relativa no Movimento Plano



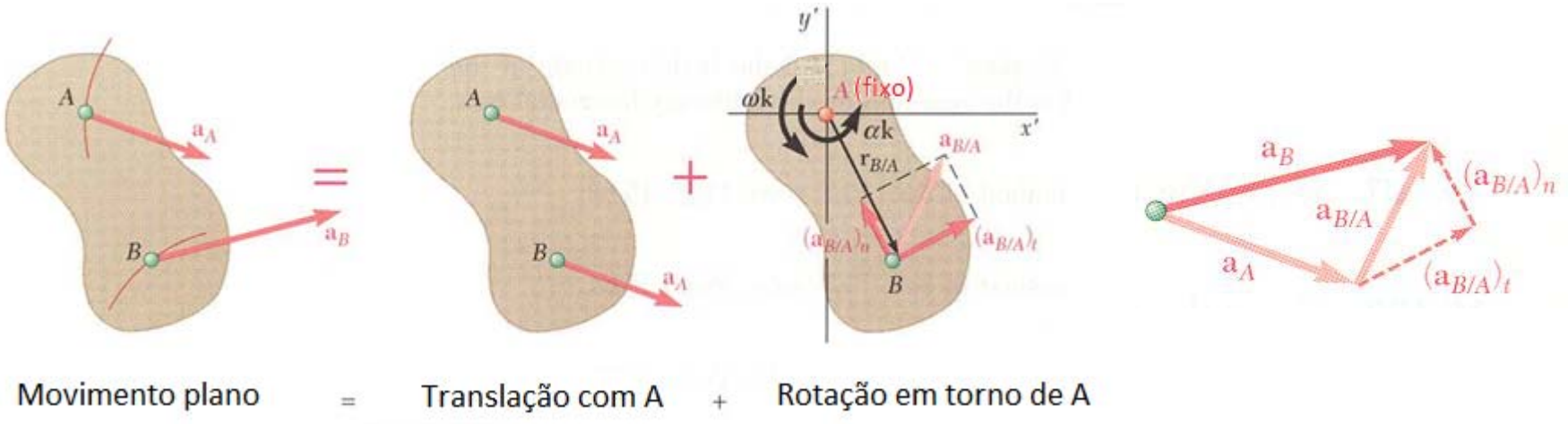
Movimento Plano = Translação com B + Rotação em torno de B $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$

- Selecionando o ponto B como ponto de referência e resolvendo para a velocidade v_A da extremidade A e a velocidade angular ω , tem-se um triângulo de velocidades equivalente.

- $v_{A/B}$ tem o mesmo módulo que $v_{B/A}$, mas sentido oposto a ele. O sentido da velocidade relativa é dependente da escolha do ponto de referência.

- A velocidade angular ω da barra em sua rotação em torno de B é a mesma que a sua rotação em torno de A. Ou seja, **a velocidade angular de um corpo em movimento plano não é dependente da escolha do ponto de referência**.

Aceleração Absoluta e Relativa no Movimento Plano



- Aceleração absoluta de uma partícula da placa,

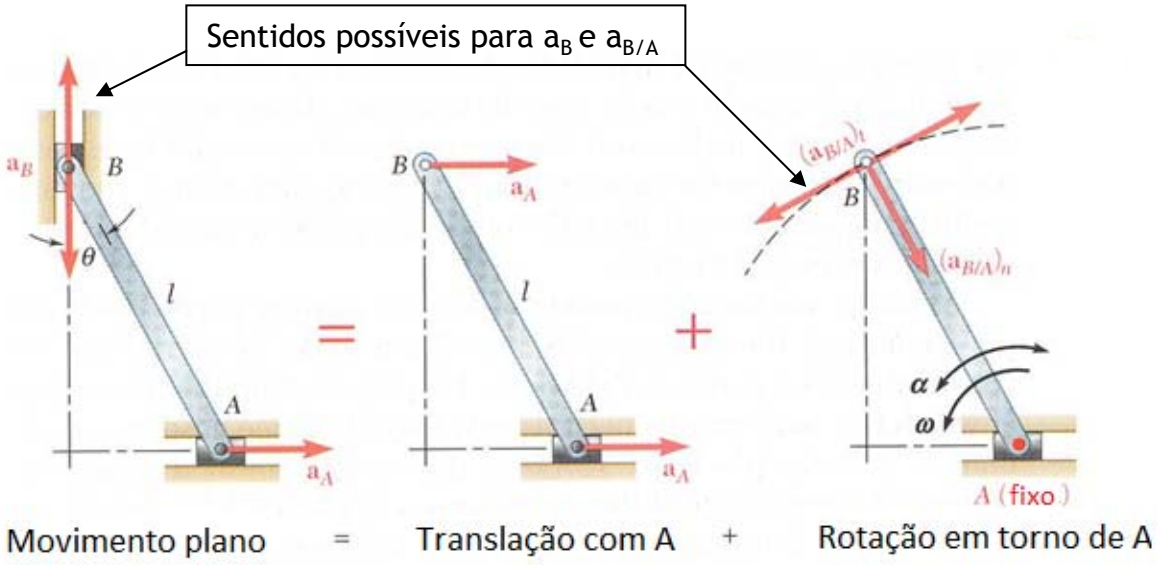
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \omega\vec{k} \times \vec{r}_{B/A} \qquad \vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt} \qquad \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} \qquad \vec{a}_B = \vec{a}_A + \alpha\vec{k} \times \vec{r}_{B/A} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$$

- Aceleração relativa $\vec{a}_{B/A}$ associada à rotação em torno de A inclui componentes tangenciais e normais,

$$(\vec{a}_{B/A})_t = \alpha\vec{k} \times \vec{r}_{B/A} \qquad (a_{B/A})_t = r\alpha$$

$$(\vec{a}_{B/A})_n = -\omega^2 \vec{r}_{B/A} \qquad (a_{B/A})_n = r\omega^2$$

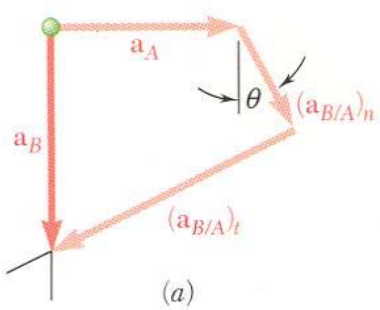
Aceleração Absoluta e Relativa no Movimento Plano

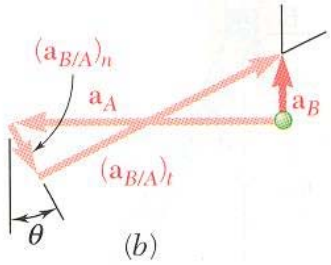


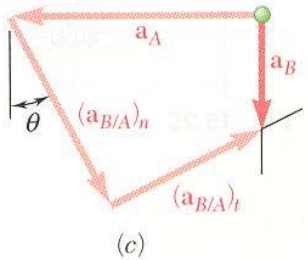
Dados $\vec{a}_A$ e $\vec{v}_A$, determine $\vec{a}_B$ e $\vec{\alpha}$.

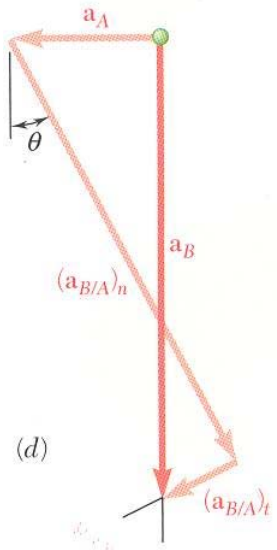
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$
$$= \vec{a}_A + (\vec{a}_{B/A})_n + (\vec{a}_{B/A})_t$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \alpha\vec{k} \times \vec{r}_{B/A} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$$



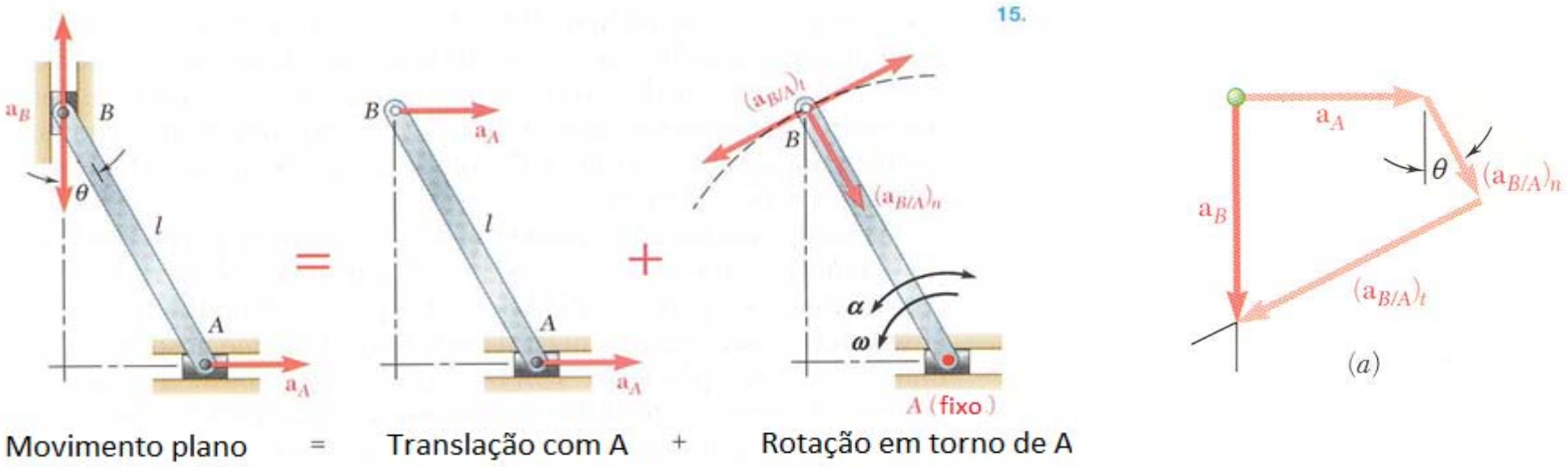






- O resultado do vetor depende do sentido de $\vec{a}_A$ e dos módulos relativos de a_A e $(a_{B/A})_n$
- É necessário que a velocidade angular ω seja conhecida.

Aceleração Absoluta e Relativa no Movimento Plano



- Escreva $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$ em termos das duas equações componentes,

$+\rightarrow$ Componentes x: $0 = a_A + l\omega^2 \sin\theta - l\alpha\cos\theta$

$+\uparrow$ Componentes y: $-a_B = -l\omega^2\cos\theta - l\alpha\sin\theta$

- Resolva para a_B e α.