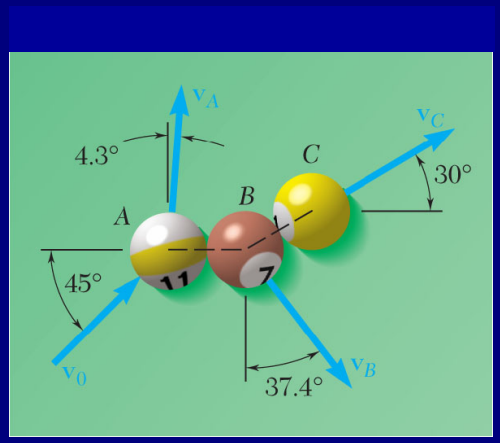


IV – Sistemas de Partículas

Conteúdo

- Introdução
- Aplicação das Leis de Newton: Forças Efetivas
- Quantidade de Movimento Linear e Angular
- Movimento do Centro de Massa do Sistema de Partículas
- Quantidade de Movimento Angular em relação ao Centro de Massa
- Conservação de Quantidade de Movimento

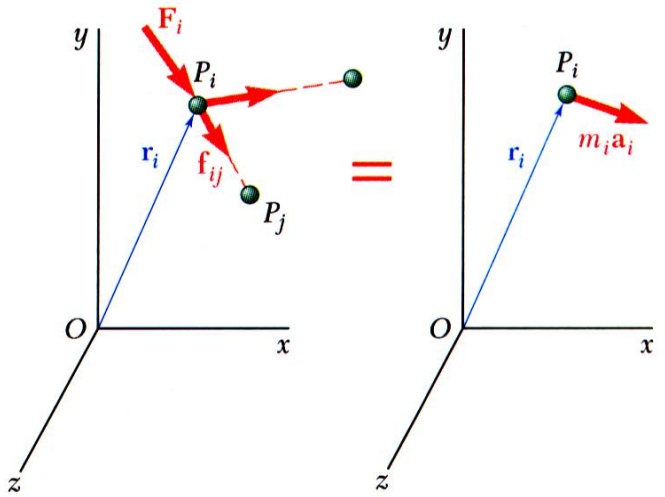
Introdução

No capítulo atual, estudaremos a quantidade de movimento de sistemas de partículas.

A força efetiva de uma partícula é definida como o produto da sua massa pela aceleração. Será mostrado que o sistema de forças externas agindo em um sistema de partículas é equivalente ao sistema de forças efetivas do sistema.

O centro de massa de um sistema de partículas será definido e a quantidade de movimento do sistema em relação a este ponto será descrita.

Aplicação das Leis de Newton: Forças Efetivas



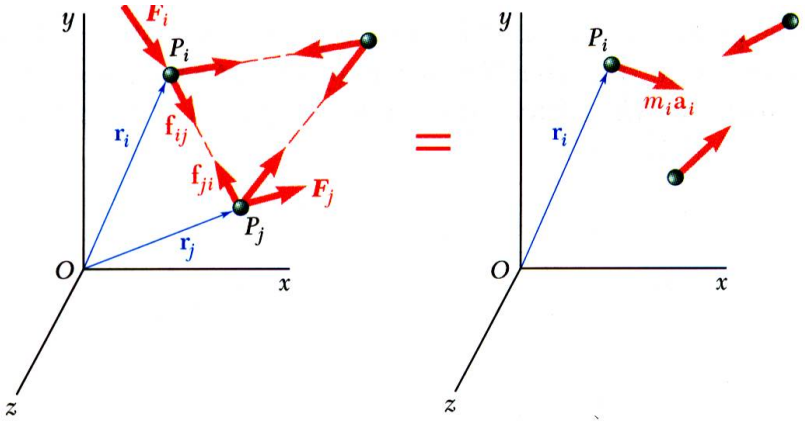
Segunda lei de Newton aplicada a cada partícula P_i em um sistema de n partículas,

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \vec{f}_{ij} = m_i \vec{a}_i$$

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \left(\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} \right) = \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i$$

$\vec{F}_i$ = força externa $\quad \vec{f}_{ij}$ = força interna

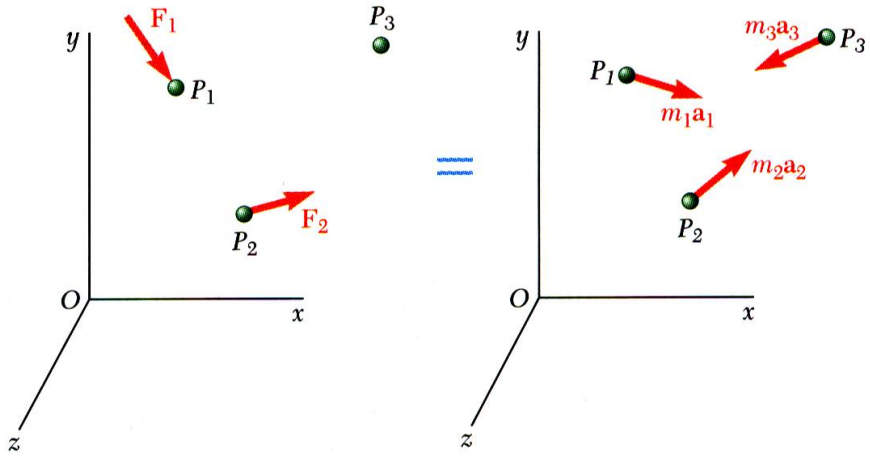
$m_i \vec{a}_i$ = força efetiva



O sistema de forças externas e internas sobre uma partícula é equivalente à força efetiva da partícula.

O sistema de forças internas e externas agindo em todo o sistema de partículas é equivalente ao sistema de forças efetivas.

Aplicação das Leis de Newton: Forças Efetivas



Somando sobre todos os elementos,

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\vec{f}_{ij}=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{a}_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\vec{r}_i\times\vec{F}_i)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\vec{r}_i\times\vec{f}_{ij})=\sum_{i=1}^{n}(\vec{r}_i\times m_i\vec{a}_i)$$

Uma vez que as forças internas ocorrem em pares de módulos iguais e sentidos opostos, a força resultante devido às forças internas é zero,

$$\sum\vec{F}_i=\sum m_i\vec{a}_i$$

$$\sum(\vec{r}_i\times\vec{F}_i)=\sum(\vec{r}_i\times m_i\vec{a}_i)$$

Quantidade de Movimento Linear e Angular

Quantidade de movimento linear do sistema de partículas,

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$$

$$\dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{v}}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i$$

Quantidade de movimento angular em relação ao ponto fixo O do sistema de partículas,

$$\vec{H}_O = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)$$

$$\dot{\vec{H}}_O = \sum_{i=1}^{n} (\dot{\vec{r}}_i \times m_i \vec{v}_i) + \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{v}}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i)$$

A resultante das forças externas é igual a taxa de variação do quantidade de movimento linear do sistema de partículas,

$$\sum \vec{F} = \dot{\vec{L}}$$

O momento resultante das forças externas em relação ao ponto fixo O é igual à taxa de variação do quantidade de movimento angular do sistema de partículas,

$$\sum \vec{M}_O = \dot{\vec{H}}_O$$

Quantidade de movimento do Centro de Massa do Sistema de Partículas

O Centro de Massa G do sistema de partículas é definido pelo vetor $\vec{r}_G$ que satisfaz

$$m\vec{r}_G = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} mx_G &= \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \\ my_G &= \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \\ my_G &= \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \end{aligned}$$

Diferenciando duas vezes,

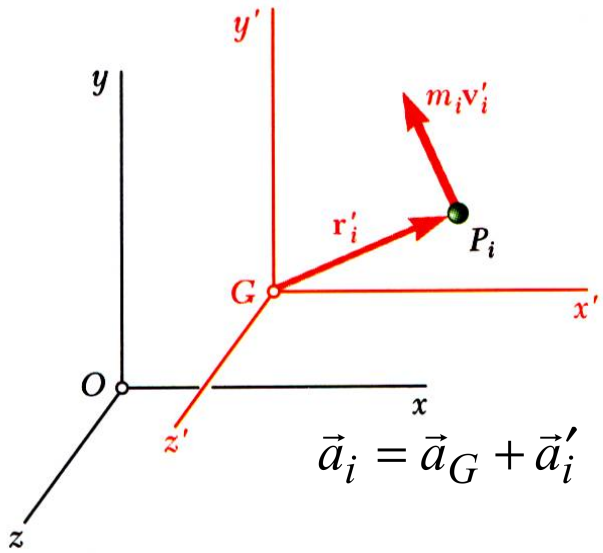
$$m\dot{\vec{r}}_G = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i$$

$$m\vec{v}_G = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \vec{L}$$

$$m\vec{a}_G = \dot{\vec{L}} = \sum \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\vec{a}_G = \sum \vec{F}}$$

O sistema de partículas se move como se toda a massa e todas as forças externas estivessem concentradas no centro de massa G.

Quantidade de Movimento Angular em Relação ao Centro de Massa



Considere o sistema de referência x'y'z ', fixo em G, mas transladando em relação ao sistema de referência newtoniano xyz.

Portanto, o referencial móvel não é newtoniano.

A quantidade de movimento angular do sistema de partículas em relação ao centro de massa G é dada por

$$\vec{H}'_G = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i')$$

$$\dot{\vec{H}}'_G = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i' \times m_i \vec{a}_i') = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i' \times m_i (\vec{a}_i - \vec{a}_G))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i' \times m_i \vec{a}_i) - \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}' \right) \times \vec{a}_G$$

$$m\vec{r}_G = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

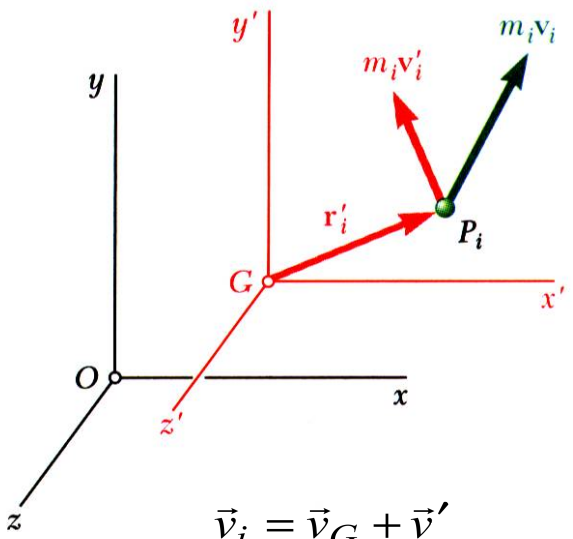
$$= \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i' \times m_i \vec{a}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i' \times \vec{F}_i)$$

$$= \sum \vec{M}_G$$

$\vec{r}_G = \vec{r}' = 0$ *em relação ao sistema x'y'z' fixo em G*

O momento resultante das forças externas em relação a G é igual à taxa de variação da quantidade de movimento angular do sistema de partículas em relação a G.

Quantidade de Movimento Angular em relação ao Centro de Massa



$$\vec{v}_i = \vec{v}_G + \vec{v}'_i$$

Quantidade de movimento angular das partículas em relação ao sistema móvel de referência x'y'z',

Quantidade de movimento angular das partículas em relação a G a partir das velocidades absolutas, ou seja, tomadas em relação ao referencial newtoniano xyz:

$$\vec{H}'_G = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i')$$

$$\vec{H}_G = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i' \times m_i (\vec{v}_G + \vec{v}_i'))$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i' \times \vec{v}_G + \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i') \right)$$

$$\vec{H}_G = \vec{H}'_G$$

$$\dot{\vec{H}}_G = \dot{\vec{H}}'_G = \sum \dot{\vec{M}}_G$$

A Quantidade de Movimento Angular do sistema de partículas em relação a G pode ser calculada em relação ao referencial inercial ou ao móvel fixo em G.

Conservação da Quantidade de Movimento Angular

Se nenhuma força externa agir sobre as partículas do sistema, então a quantidade de movimento linear e a quantidade de movimento angular sobre o ponto fixo O são conservados.

$$\dot{\vec{L}} = \sum \vec{F} = 0 \qquad \dot{\vec{H}}_O = \sum \vec{M}_O = 0$$
$$\vec{L} = \text{constante} \qquad \vec{H}_O = \text{constante}$$

Como o conceito de conservação do quantidade de movimento também se aplica à análise do movimento do centro de massa, temos que,

$$\dot{\vec{L}} = \sum \vec{F} = 0 \qquad \dot{\vec{H}}_G = \sum \vec{M}_G = 0$$
$$\vec{L} = m\vec{v}_G = \text{constante}$$
$$\vec{v}_G = \text{constante} \qquad \vec{H}_G = \text{constante}$$