

II – Cinética de Partículas

Conteúdo

- Introdução
- A Segunda Lei de Newton do Movimento
- Quantidade de Movimento Linear de uma Partícula
- Sistemas de Unidades
- Equações de Movimento
- Equilíbrio Dinâmico
- Quantidade de Movimento Angular de uma Partícula
- Equações de Movimento em Termos de Componentes Radial e Transversal
- Conservação da Quantidade de Movimento Angular
- Lei da Gravitação de Newton
- Trajetória de uma Partícula sob uma Força Central
- Aplicação em Mecânica Espacial
- Leis de Kepler sobra o Movimento Planetário

Introdução

- A Primeira e a Terceira Leis de Newton são suficientes para o estudo de corpos em repouso (estática) ou de corpos em movimento retilíneo sem aceleração.

- Quando um corpo acelera (muda a amplitude ou a direção da velocidade), a Segunda Lei de Newton é necessária para relacionar o movimento do corpo com as forças que agem sobre ele.

- Segunda Lei de Newton:

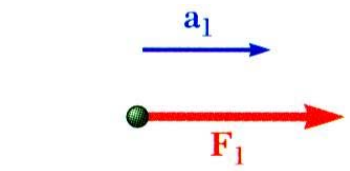
  - Uma partícula terá uma aceleração proporcional à amplitude da força resultante agindo sobre ela, e sua direção será a da força.

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$$

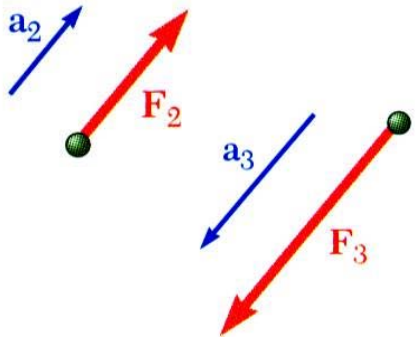
  - A resultante das forças que age sobre uma partícula é igual à taxa de variação da quantidade de movimento linear da partícula..

  - A soma dos momentos em relação ao ponto O das forças que agem sobre uma partícula é igual à variação na unidade de tempo da quantidade de movimento angular da partícula relação ao ponto O.

A Segunda Lei de Newton para o Movimento



- Segunda Lei de Newton: Se a força resultante agindo em uma partícula não é nula, esta terá uma aceleração proporcional à amplitude da resultante e na direção desta.

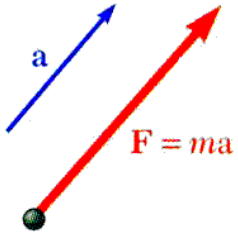


- Considere uma partícula sujeita a forças constantes,

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_3}{a_3} = \cdots = \text{constante} = \text{massa}, m$$

- Quando uma partícula de massa m sofre a ação de uma força F, a aceleração da partícula deve satisfazer:

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$$

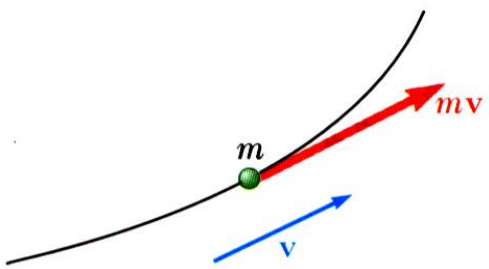


- A aceleração deve ser avaliada com relação a um referencial newtoniano (absoluto), isto é, um referencial que não está acelerando e nem em rotação.

- Se a força que age sobre a partícula é zero, esta não irá acelerar, isto é, permanecerá estacionária ou em linha reta com velocidade constante.

Quantidade de Movimento Linear de uma Partícula

- Substituindo a aceleração pela derivada da velocidade leva a:



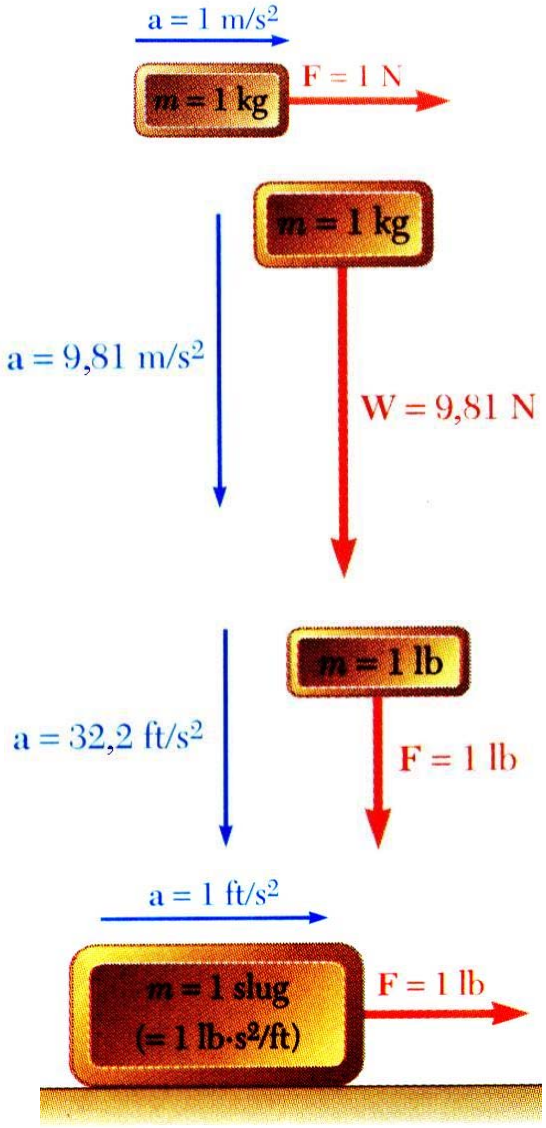
$$\sum \mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}(m\,\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

$$\mathbf{L} = \text{momento linear da partícula}$$

- **Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento Linear**: *Se a força resultante em uma partícula é zero, o Momento (Quantidade de Movimento) Linear da partícula permanece constante tanto na amplitude como no sentido.*

Sistemas de Unidades



- Das unidades para as quatro grandezas primárias (força, massa, comprimento e tempo), três podem ser escolhidas arbitrariamente. A quarta deve ser compatível com a Segunda Lei de Newton.

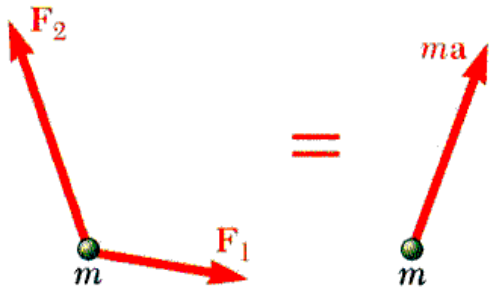
- Sistema de unidades internacional (unidades SI): as unidades básicas são as unidades de comprimento (m), de massa (kg) e de tempo (segundo). A unidade de força é derivada,

$$1\,\mathrm{N} = (1\,\mathrm{kg})\left(1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = 1\,\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

- Unidades Inglêsas.: as unidades básicas são as unidades de força (lb), comprimento (m) e tempo (segundo). A unidade de massa é derivada,

$$1\,\mathrm{lbm} = \frac{1\,\mathrm{lb}}{32{,}2\,\mathrm{ft/s}^2} \qquad 1\,\mathrm{slug} = \frac{1\,\mathrm{lb}}{1\,\mathrm{ft/s}^2} = 1\,\frac{\mathrm{lb}\cdot\mathrm{s}^2}{\mathrm{ft}}$$

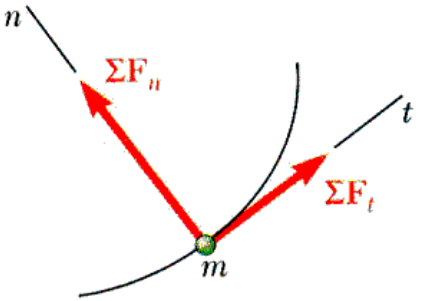
Equações de Movimento



- A Segunda Lei de Newton fornece

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

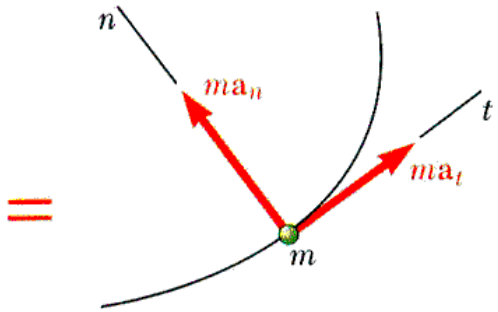
- A solução para o movimento da partícula é facilitada resolvendo a equação vetorial em equações de componentes escalares, por exemplo, para componentes retangulares,



$$\sum \left(F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}\right) = m\left(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}\right)$$

$$\sum F_x = ma_x \quad \sum F_y = ma_y \quad \sum F_z = ma_z$$

$$\sum F_x = m\ddot{x} \quad \sum F_y = m\ddot{y} \quad \sum F_z = m\ddot{z}$$



- Para componentes tangenciais e normais,

$$\sum F_t = ma_t \quad \sum F_n = ma_n$$

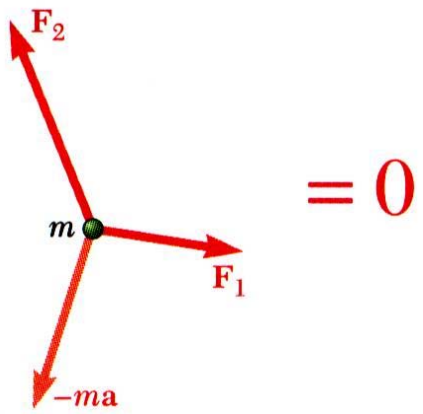
$$\sum F_t = m\frac{dv}{dt} \quad \sum F_n = m\frac{v^2}{\rho}$$

Equilíbrio Dinâmico

- Expressão alternativa para a Segunda Lei de Newton,

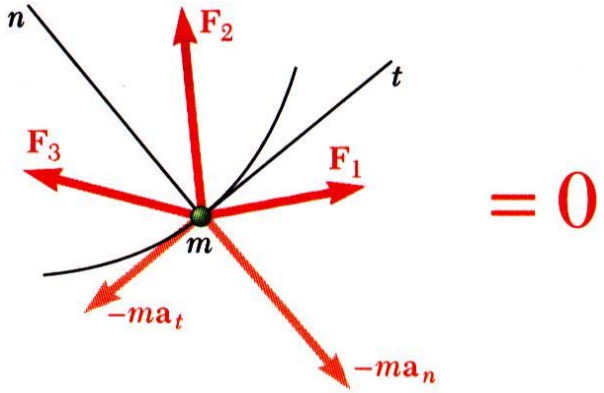
$$\sum \mathbf{F} - m\mathbf{a} = 0$$

$$-m\mathbf{a} \equiv \textit{vetor inercial}$$



- Com a inclusão do vetor inercial, o sistema de forças agindo na partícula é equivalente a zero. A partícula está em equilíbrio dinâmico.

- Métodos desenvolvidos para partículas em equilíbrio estático podem ser aplicados, por exemplo: forças co-planares podem ser representadas por um polígono vetorial fechado.

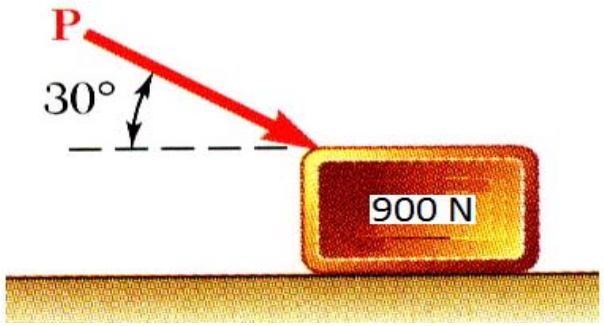


- Vetores de inércia são geralmente chamados de forças inerciais já que medem a resistência que as partículas oferecem a mudanças no movimento, isto é, mudanças na velocidade ou na direção.

- Forças inerciais podem ser conceitualmente úteis, mas não são forças de fato, como as de contato e as gravitacionais, encontradas na estática.

Exemplo 12.1

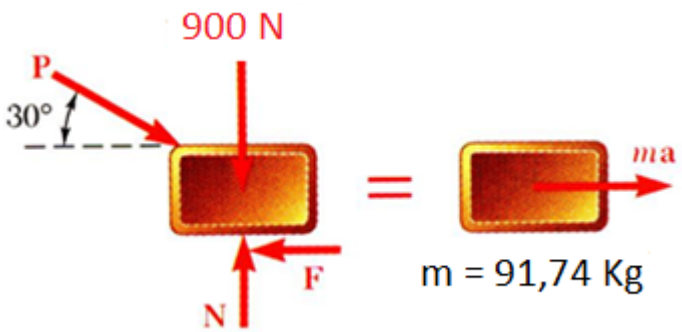
Um bloco de 900 N repousa sobre um plano horizontal. Encontre o módulo da força P necessária para dar ao bloco uma aceleração de 3m/s² para a direita. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano é μ = 0,25.



SOLUÇÃO:

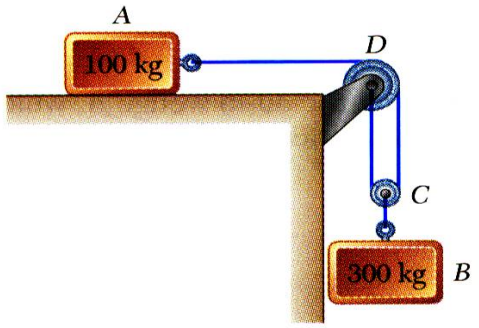
- Deve-se separar a equação de movimento do bloco em duas equações componentes ortogonais.

- As incógnitas consistem da força aplicada P e a reação normal do plano N. As duas equações podem ser resolvidas para essas incógnitas.


900 N
P
30°
F
N
=
ma
m = 91,74 Kg

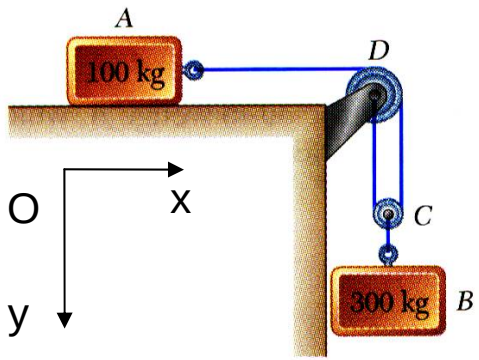
Exemplo 12.3

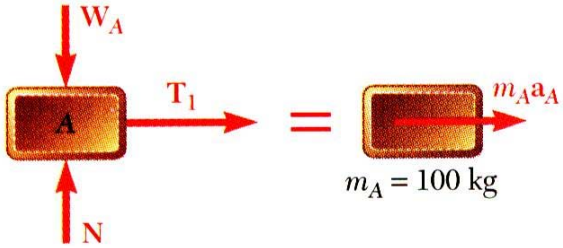
Os dois blocos mostrados partem do repouso. Não há atrito entre o plano horizontal e a polia e presume-se que a polia tenha massa desprezível. Determine a aceleração de cada bloco e a tensão em cada corda.

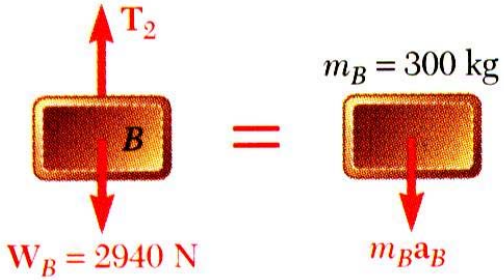


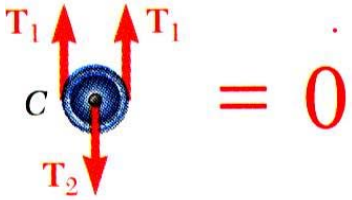
SOLUÇÃO:

- Escreva as relações cinemáticas para os movimentos dependentes e acelerações dos blocos
- Escreva as equações de movimento para os blocos e a polia.
- Combine as relações cinemáticas com as equações de movimento para encontrar as acelerações de cada bloco e a tensão em cada corda.


A
100 kg
D
O
x
y
C
300 kg
B

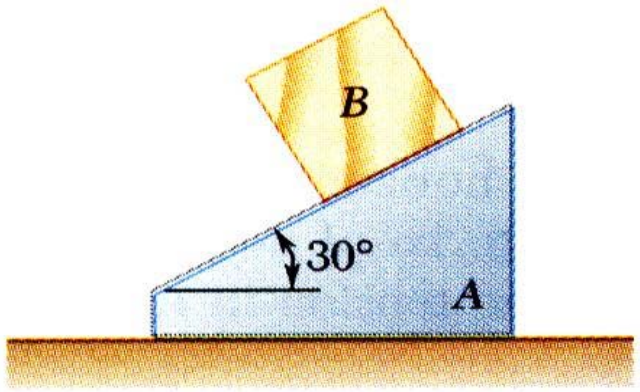

W_A
A
T_1
N
$m_A = 100$ kg
$m_A a_A$


T_2
B
$W_B = 2940$ N
$m_B = 300$ kg
$m_B a_B$


T_1
T_1
C
T_2
= 0

Exemplo 12.4

O bloco 54 N parte do repouso e desliza sobre a cunha A de massa 135 N, que é apoiada por uma superfície horizontal.
Desprezando o atrito, determine (a) a aceleração da cunha, e (b) a aceleração do bloco em relação à cunha.



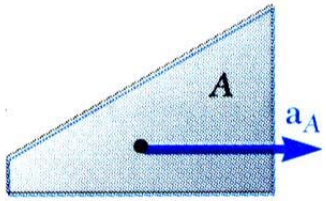
SOLUÇÃO:

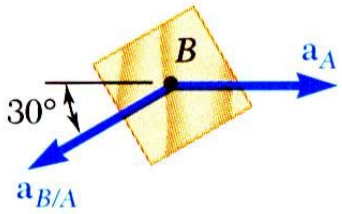
- O bloco é restrito a escorregar da cunha. Portanto, o movimento do bloco e o da cunha são dependentes entre si. Deve-se expressar a aceleração do bloco como a aceleração da cunha mais a aceleração do bloco em relação à cunha.

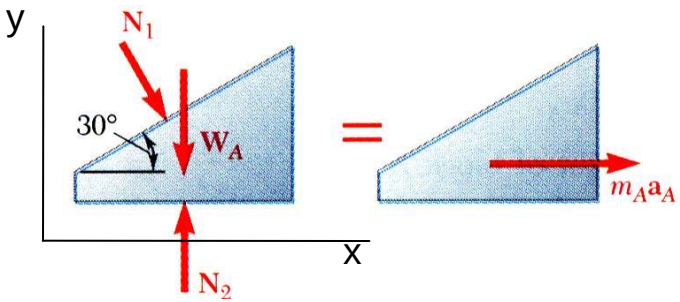
- Escrever as equações de movimento para o cunha e bloco.

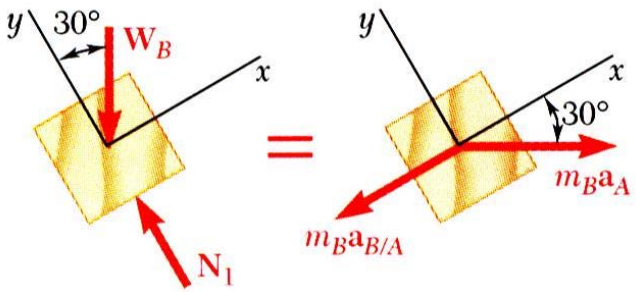
- Encontrar as acelerações.

Exemplo 12.4



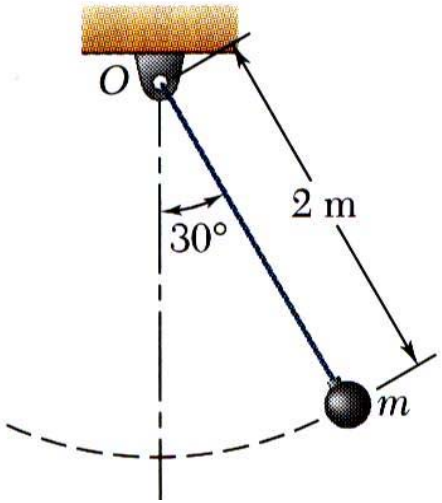






Exemplo 12.5

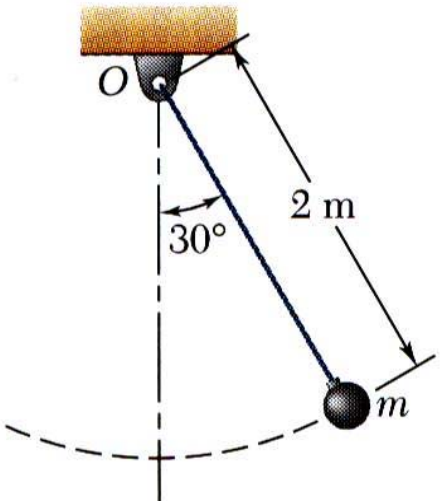
O pêndulo de 2 m descreve um arco de um círculo em um plano vertical. Se a tensão no cabo é de 2,5 vezes o peso do pêndulo para a posição mostrada, encontrar a velocidade e a aceleração do pêndulo nessa posição.

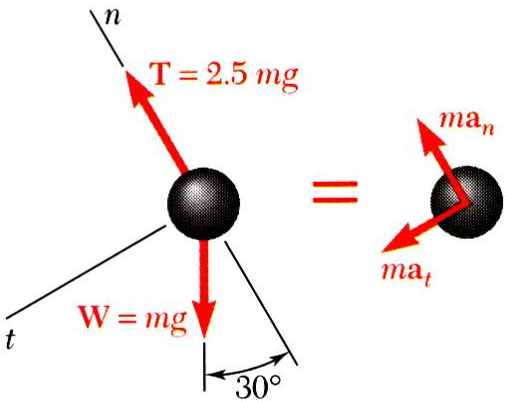


SOLUÇÃO:

- Resolver a equação de movimento para o pêndulo em componentes transversal e normal.
- Resolver as equações de componentes para as acelerações normal e transversal.
- Resolva para a velocidade em termos de aceleração normal.

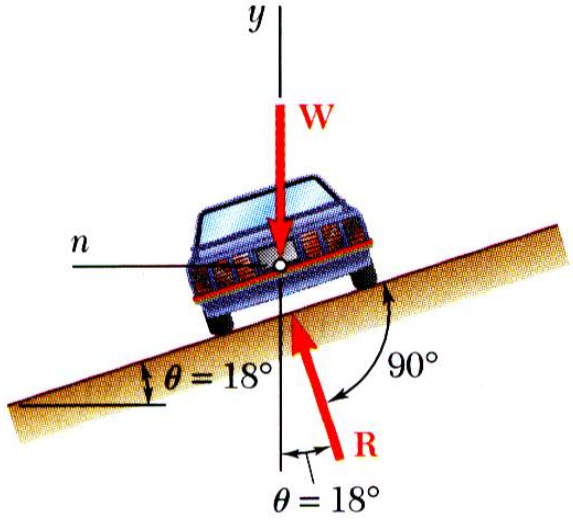
Exemplo 12.5





Exemplo 12.6

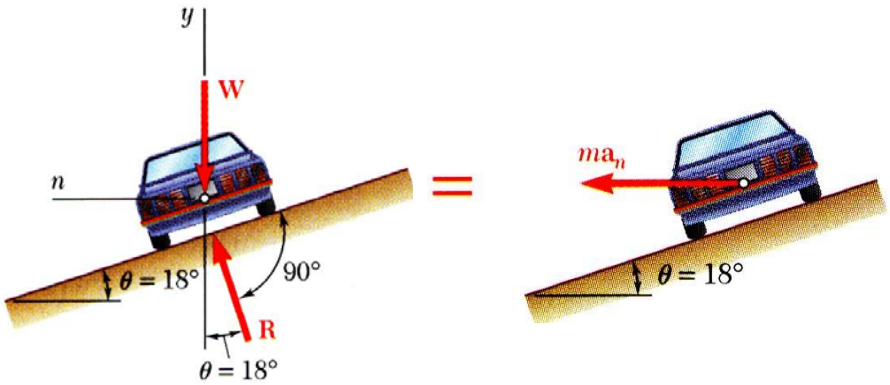
Determinar a velocidade de segurança de uma curva inclinada de estrada de raio r = 120 m com inclinação lateral cujo angulo é q= 18 graus. A velocidade de segurança de uma curva de estrada com inclinação lateral é a velocidade com que um carro pode trafegar sem que nenhuma força de atrito lateral seja exercida em suas rodas.



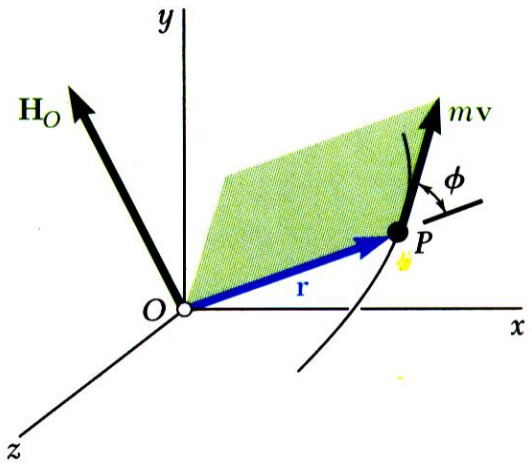
SOLUÇÃO:

- O carro percorre em um caminho horizontal circular com uma componente normal da aceleração dirigida para o centro da trajetória. As forças agindo sobre o carro são seu peso e uma reação normal da superfície da estrada.
- Decomponha a equação de movimento do carro nas componentes normal e vertical.
- Resolva para a velocidade do veículo.

Exemplo 12.6



Quantidade de Movimento Angular de uma Partícula



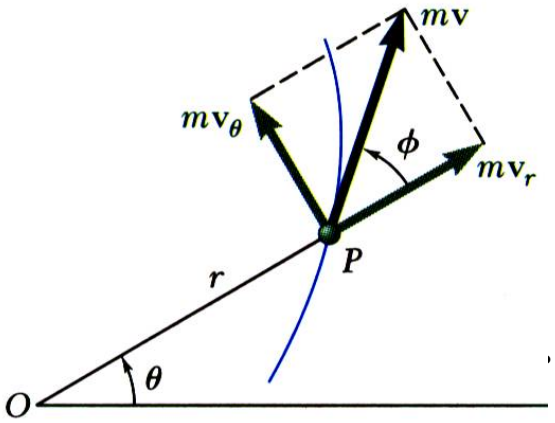
- $\vec{H}_O = \vec{r} \times m\vec{V} =$ momento da quantidade de movimento linear ou a quantidade de movimento angular das partículas em torno de O.

- $\vec{H}_O$ é perpendicular ao plano que contém $\vec{r}$ e $m\vec{V}$

$$H_O = rmV\sin\phi = rm\,v_\theta = mr^2\dot{\theta}$$

$$\vec{H}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix}$$

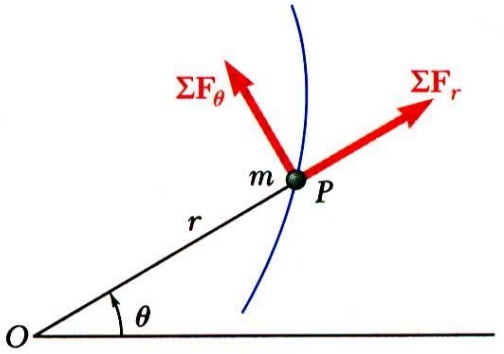
- Derivada da quantidade de movimento angular em relação ao tempo:



$$\dot{\vec{H}}_O = \dot{\vec{r}} \times m\vec{V} + \vec{r} \times m\dot{\vec{V}} = \vec{V} \times m\vec{V} + \vec{r} \times m\vec{a}$$
$$= r \times \sum \vec{F}$$
$$= \sum \vec{M}_O$$

Decorre a segunda lei de Newton que a soma dos momentos em relação a O das forças que agem sobre a partícula é igual à taxa de variação da quantidade de movimento angular da partícula em torno de O.

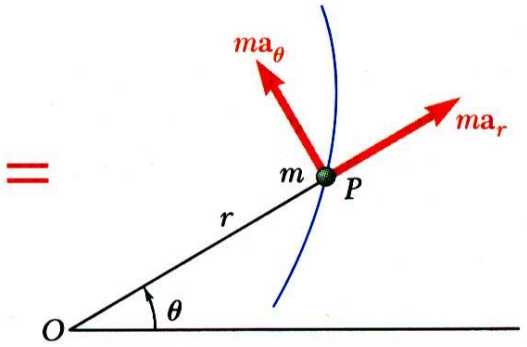
Equações de Movimento em Componentes Radial e Transversal



- Considere as partículas em r e q, em coordenadas polares,

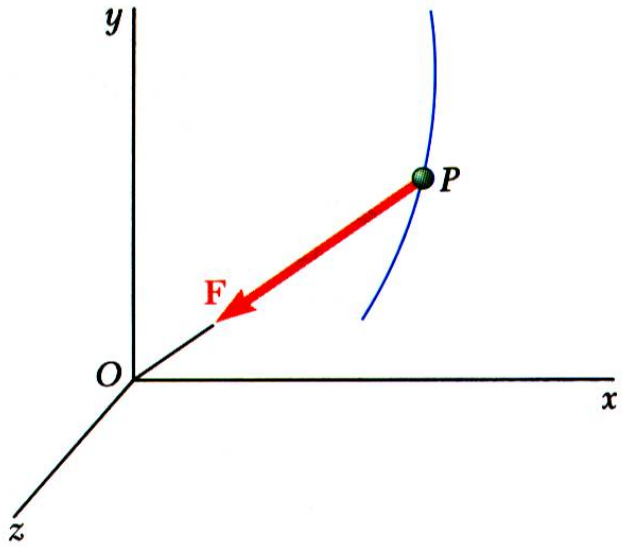
$$\sum F_r = ma_r = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)$$
$$\sum F_\theta = ma_\theta = m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)$$

- Este resultado também pode ser derivado da conservação da quantidade de movimento angular:



$$H_O = mr^2\dot{\theta}$$
$$r\sum F_\theta = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right)$$
$$= m\left(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}\right)$$
$$\sum F_\theta = m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)$$

Conservação da Quantidade de Movimento Angular



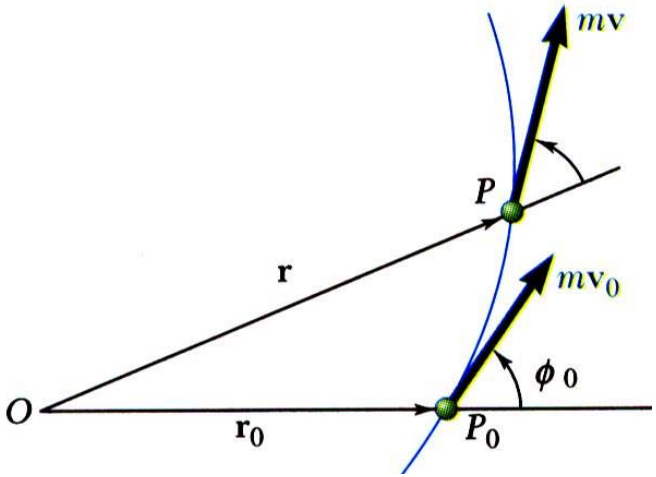
- Quando apenas a força que atua sobre a partícula é dirigida em direção ou para longe de um ponto fixo O, a partícula é dita estar se movendo sob uma força central.

- Como a linha de ação da força central passa por O:

$$\sum \vec{M}_O = \dot{\vec{H}}_O = 0 \quad \text{e}$$

$$\vec{r} \times m\vec{V} = \vec{H}_O = \text{constante}$$

- Tanto o vetor posição quanto o movimento das partículas estão em um plano perpendicular à $\vec{H}_O$.



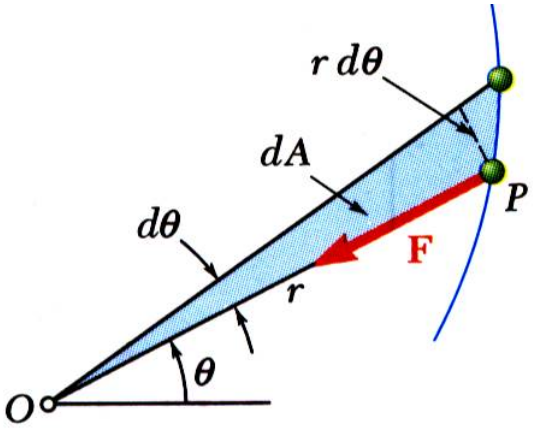
- Módulo da quantidade de movimento angular,

$$H_O = rmV\sin\phi = \text{constante}$$
$$= r_0 m V_0 \sin\phi_0$$

$$H_O = mr^2\dot{\theta} = \text{constante} \qquad \text{ou}$$

$$\frac{H_O}{m} = r^2\dot{\theta} = h = \frac{\text{quantidade de movimento angular}}{\text{massa unitária}}$$

Conservação da Quantidade de Movimento Angular



- Considere o vetor radial OP que varre a área infinitesimal:

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

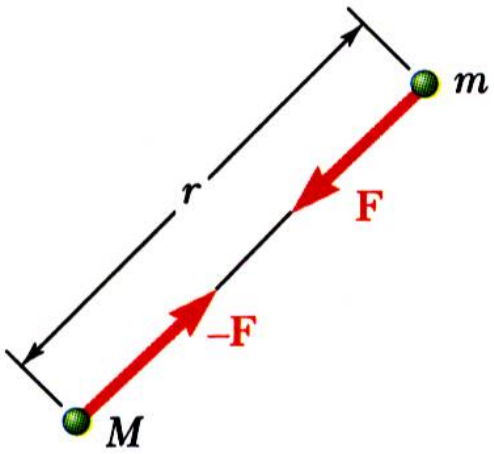
- Define-se $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} =$ Velocidade real

- Lembre-se que, para um corpo em movimento sob uma força central,

$$h = r^2 \dot{\theta} = \text{constante}$$

- Quando uma partícula se move sob uma força central, sua velocidade radial é constante.

Lei da Gravitação de Newton



- A força gravitacional exercida pelo Sol sobre um planeta ou pela Terra em um satélite são exemplos importantes da força gravitacional.

- Lei de Newton da gravitação universal: duas partículas de massa M e m se atraem com uma força igual e oposta dirigida ao longo da linha que liga as partículas,

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$G = \text{constante gravitacional}$$

$$= 66.73\times10^{-12}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\times\text{s}^2}$$

- Para partículas de massa m na superfície da Terra,

$$W = m\frac{MG}{R^2} = mg \qquad g = 9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

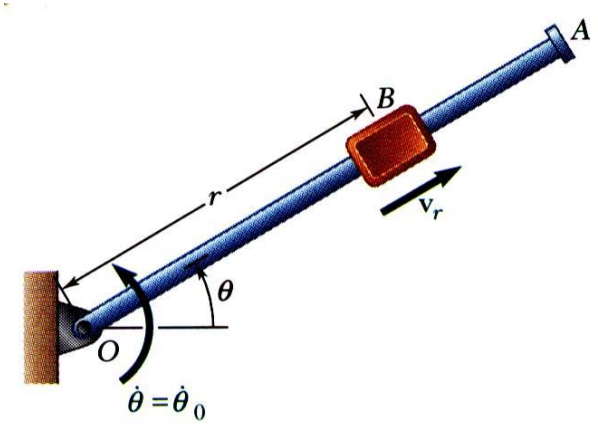
Exemplo 12.7

Um bloco B de massa m pode deslizar livremente sobre um braço OA sem atrito que gira em um plano horizontal a uma taxa constante $\dot{\theta}_0$.

Sabendo que B é lançado a uma distância r_0 de O, expressar como função de r:

a) a componente vr da velocidade de B ao longo OA e,

b) o módulo da força horizontal exercida sobre B pelo braço OA.



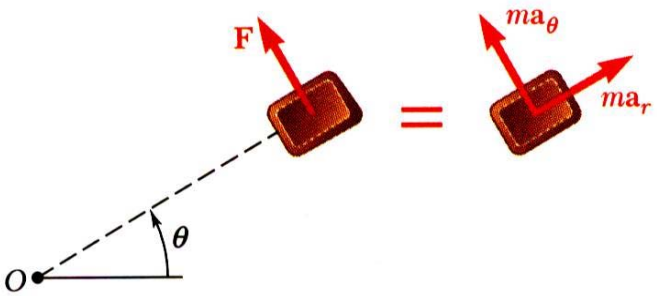
SOLUÇÃO:

- Escreva as equações radial e transversal de movimento para o bloco.

- Integre a equação radial para encontrar uma expressão para a velocidade radial.

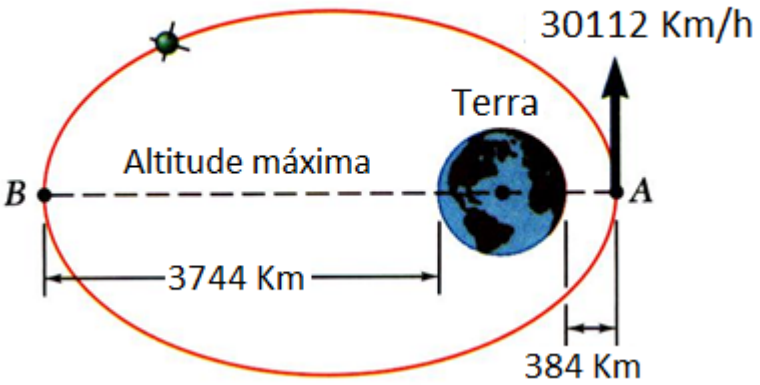
- Substitua as informações conhecidas na equação transversal para encontrar uma expressão para a força sobre o bloco.

Exemplo 12.7



Exemplo 12.8

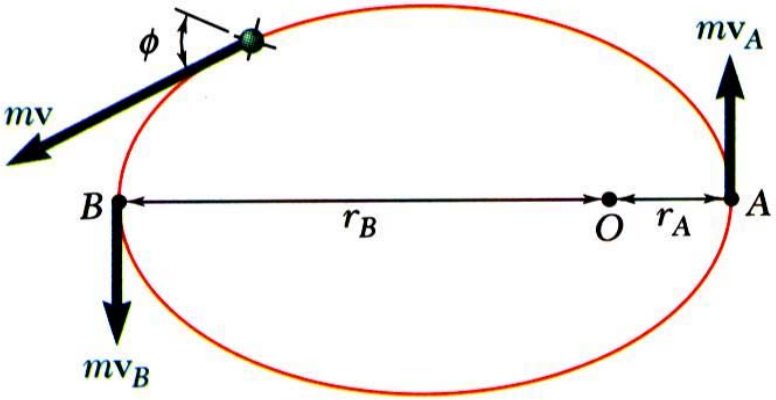
Um satélite é lançado em uma direção paralela à superfície da Terra com uma velocidade de 30112 km / h de uma altura de 384 km. Determinar a velocidade do satélite, uma vez que alcança altitude máxima de 3744 km. O raio da Terra é 6370 km.



SOLUÇÃO:

- Uma vez que o satélite está se movendo sob uma força central, a quantidade de movimento angular é constante. Equacionar a quantidade de movimento angular em A e B e resolver para a velocidade em B.

Exemplo 12.8



Trajetória de uma partícula sob uma Força Centrípeta

- Para a partícula se movendo sob força central apontada para o centro de forças:

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = \sum F_r = -F \qquad m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = \sum F_\theta = 0$$

A segunda expressão é equivalente $r^2\dot{\theta} = h = \text{constante}$, da qual,

$$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2} \quad e \quad \ddot{r} = -\frac{h^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

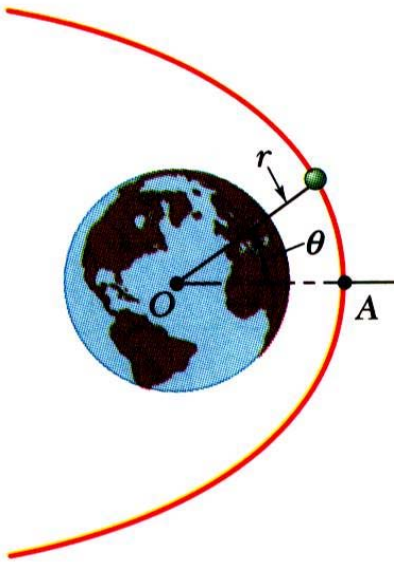
- Após substituir na equação de movimento radial e simplificar:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{mh^2u^2} \quad \text{onde} \quad u = \frac{1}{r}$$

- Se F é uma função conhecida de r ou u, então a trajetória da partícula pode ser encontrada através da integração de u = f (q), com constantes de integração determinadas a partir das condições iniciais.

Aplicação de Mecânica Espacial

- Considere os satélites Terra sujeitos apenas à atração gravitacional da Terra:



$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{F}{mh^2u^2} \quad \text{onde} \quad u=\frac{1}{r} \qquad F=\frac{GMm}{r^2}=GMmu^2$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{GM}{h^2}=\text{constante}$$

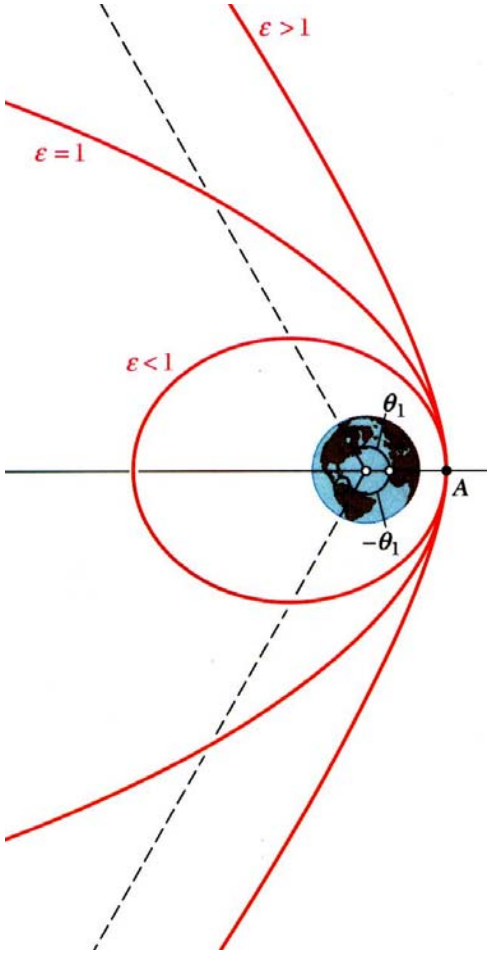
- A solução é a equação da seção cônica:

$$u=\frac{1}{r}=\frac{GM}{h^2}\,(1+\varepsilon\cos\theta) \quad \text{å}=\frac{C\,h^2}{GM}=ecentricidade$$

- A origem, localizada no centro da Terra, é um foco da seção cônica.

- A trajetória pode ser elíptica, parabólica ou hipérbólica dependendo do valor de excentricidade.

Aplicação de Mecânica Espacial



- A trajetória do satélite da Terra é definida por:

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2}(1 + \varepsilon \cos\theta) \qquad \varepsilon = \frac{Ch^2}{GM} = \text{ecentricidade}$$

- Para a hipérbole, ε> 1 ou C> GM/h2. O vetor raio se torna infinito para

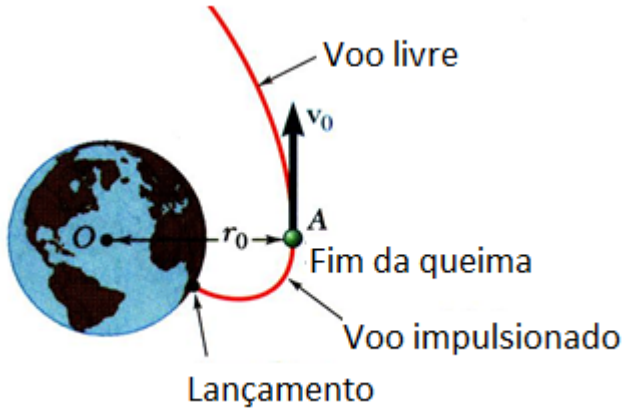
$$1 + \varepsilon \cos\theta_1 = 0 \quad \theta_1 = \pm\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) = \pm\cos^{-1}\left(-\frac{GM}{Ch^2}\right)$$

- Para a parábola, ε = 1 or C = GM/h^2. O vetor raio se torna infinito para

$$1 + \cos\theta_2 = 0 \quad \theta_2 = 180°$$

- Para a elipse, ε < 1 or C < GM/h^2. O vetor raio é finito para θ e é constante, isto é, um círculo, para ε < 0.

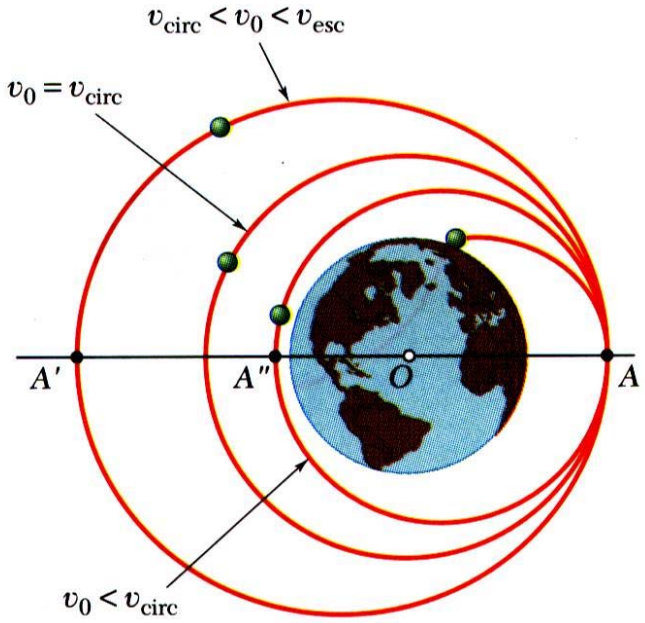
Aplicação de Mecânica Espacial



- A constante de integração C é determinada pelas condições no início do vôo livre, θ =0, r = r_0 :

$$\frac{1}{r_0} = \frac{GM}{h^2}\left(1 + \frac{Ch^2}{GM}\cos 0°\right)$$

$$C = \frac{1}{r_0} - \frac{GM}{h^2} = \frac{1}{r_0} - \frac{GM}{(r_0 v_0)^2}$$



- O satélite escapa órbita da Terra quando:

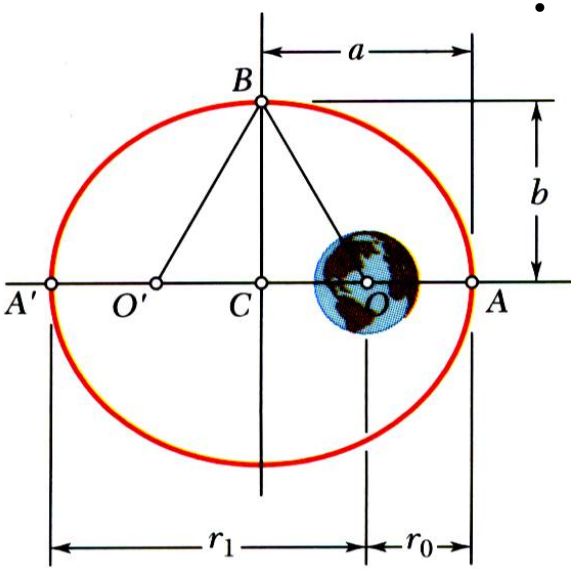
$$\varepsilon \geq 1 \text{ or } C \geq GM/h^2 = GM/(r_0 v_0)^2$$

$$v_{esc} = v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$$

- A trajetória é elíptica para v0 <vesc e se torna circular para ε = 0 or C = 0,

$$v_{circ} = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$$

Aplicação de Mecânica Espacial



- Lembre-se que para uma partícula se movendo sob uma força central, a velocidade radial é constante, isto é.,

$$\frac{dA}{dt} = \tfrac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \tfrac{1}{2} h = \text{constante}$$

- Tempo periódico ou tempo necessário para que um satélite conclua uma órbita é igual a área dentro da órbita dividida pela velocidade radial,

$$\tau = \frac{\pi ab}{h/2} = \frac{2\pi ab}{h}$$

onde $a = \frac{1}{2}(r_0 + r_1)$

$b = \sqrt{r_0 r_1}$

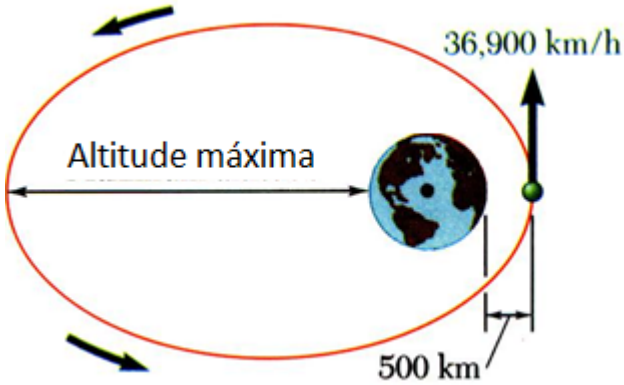
Exemplo 12.9

Um satélite é lançado em uma direção paralela à superfície da Terra com uma velocidade de 36.900 quilômetros por a hora a uma altitude de 500 km.

Determine:

- altitude máxima atingida pelo satélite

- o período do satélite.



SOLUÇÃO:

- A trajetória do satélite é descrita por:

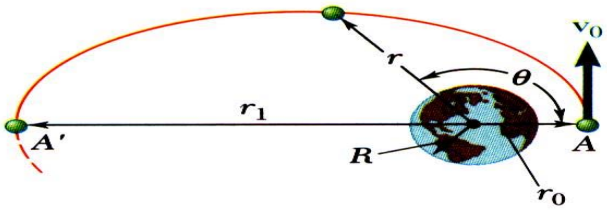
$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2} + C\cos\theta$$

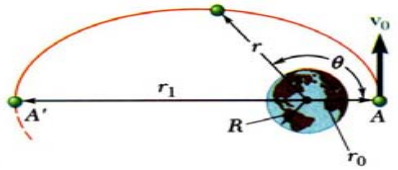
Avaliar C usando as condições iniciais em θ = 0.

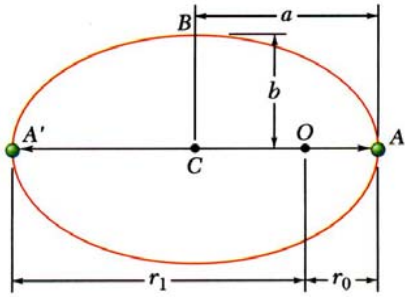
- Determine a altitude máxima, encontrando r em θ = 180 °.

- Com as altitudes no perigeu e apogeu conhecidas, o período pode ser avaliado.

Exemplo 12.9







Leis de Kepler do movimento planetário

- Resultados obtidos para as trajetórias de satélites em torno da Terra também podem ser aplicados a trajetórias dos planetas em torno do sol.

- As propriedades das órbitas planetárias em torno do sol foram determinadas através de observações astronômicas por Johann Kepler (1571-1630) antes de Newton desenvolver sua teoria fundamental.

1- Cada planeta descreve uma elipse, com o sol localizado em um dos seus focos

2- O vetor raio desenhado do sol até um planeta varre áreas iguais em tempos iguais.

3- Os quadrados dos períodos dos planetas são proporcionais aos cubos dos semi-eixos de suas órbitas.