

I - Cinemática da Partícula

Conteúdo

- Introdução
- Movimento Retilíneo: Posição, Velocidade e Aceleração
- Determinação do Movimento de uma Partícula
- Movimento Retilíneo Uniforme
- Movimento Retilíneo Uniformemente Acelerado
- Movimento de Várias Partículas: Movimento Relativo
- Solução Gráfica de Problemas de Movimento Retilíneo
- Outros Métodos Gráficos
- Movimento Curvilíneo: Posição, Velocidade e Aceleração
- Derivadas de Funções Vetoriais
- Componentes Retangulares de Velocidade e Aceleração
- Movimento Relativo a um Sistema de Referência em Translação
- Componentes Tangenciais e Normais
- Componentes Radial e Transversal

Introdução

- O estudo da dinâmica se divide em:

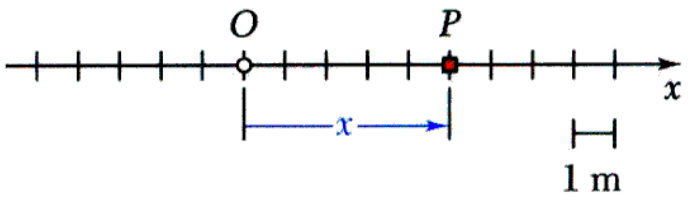
- **Cinemática**: estudo da geometria do movimento. A cinemática é usada para relacionar deslocamento, velocidade, aceleração e tempo, sem referência à causa do movimento.

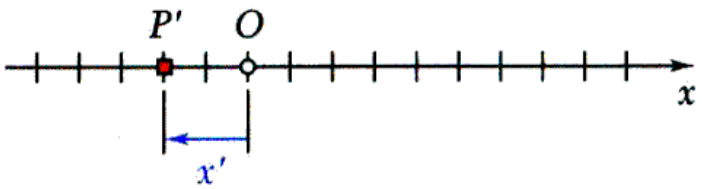
- **Cinética**: estudo das relações existentes entre as forças agindo num corpo, sua massa e seu movimento. A cinética é usada para predizer o movimento causado por forças dadas ou para determinar as forças necessárias para produzir um dado movimento.

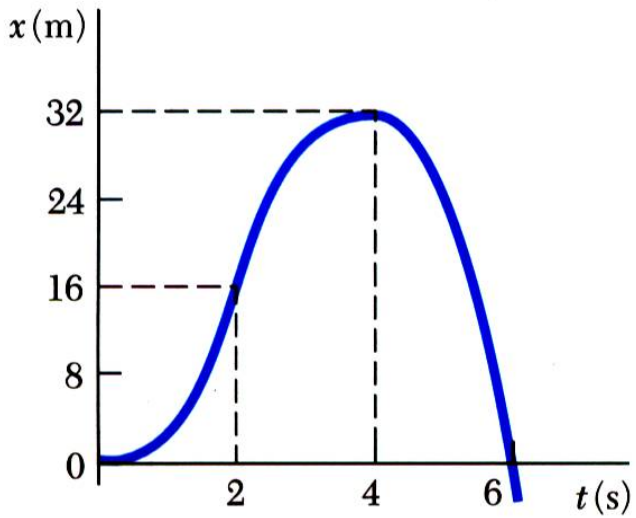
- **Movimento retilíneo**: posição, velocidade e aceleração de uma partícula que se move ao longo de uma linha reta – tratamento escalar.

- **Movimento curvilíneo**: posição, velocidade e aceleração de uma partícula que se move ao longo de uma linha curva em duas ou três dimensões – tratamento vetorial.

Movimento Retilíneo: Posição





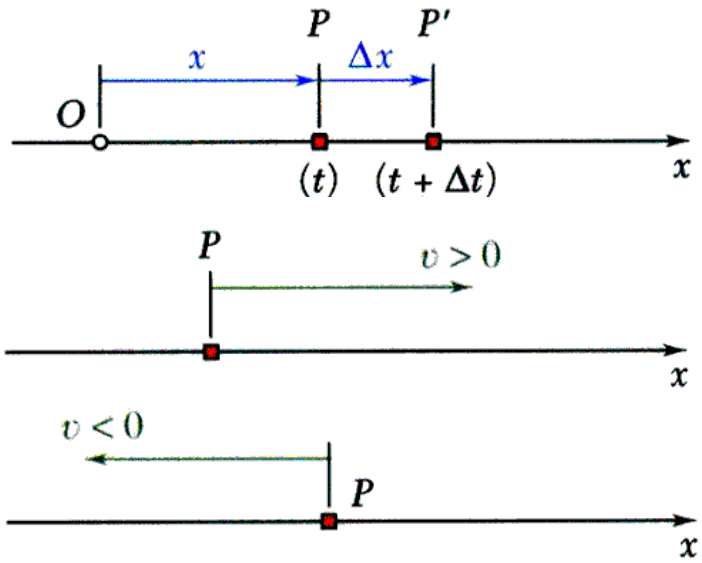


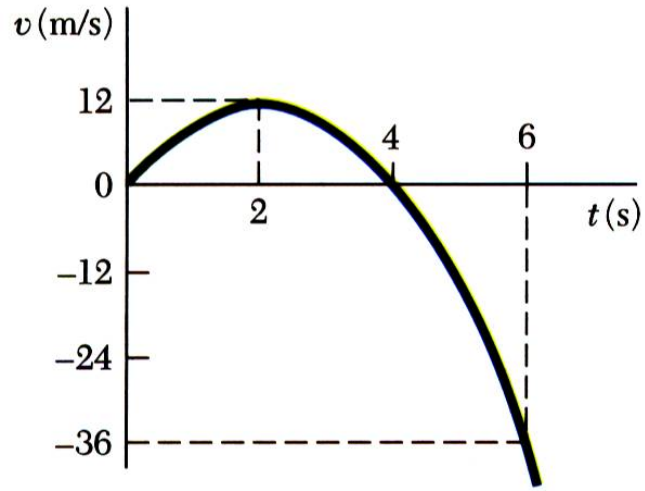
- Uma partícula se movendo ao longo de uma linha reta é dita estar em movimento retilíneo.
- A coordenada da posição de uma partícula é definida pela distância positiva ou negativa da partícula a uma origem fixa na linha.
- O movimento de uma partícula é conhecido se a coordenada da posição para a partícula é conhecida para todo valor de tempo t. O movimento da partícula pode ser expresso na forma de uma função, por exemplo,

$$x = 6t^2 - t^3$$

ou na forma de um gráfico posição x tempo.

Movimento Retilíneo: Velocidade





- Considere uma partícula que ocupa a posição P no tempo t e P' em t +Δt,

$$\text{velocidade média} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\text{velocidade instantânea} = v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

- A velocidade instantânea pode ser positiva ou negativa. A amplitude da velocidade é conhecida como a velocidade da partícula.

- A partir da definição de uma derivada,

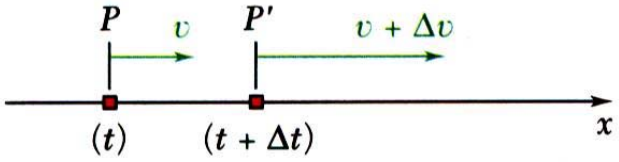
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

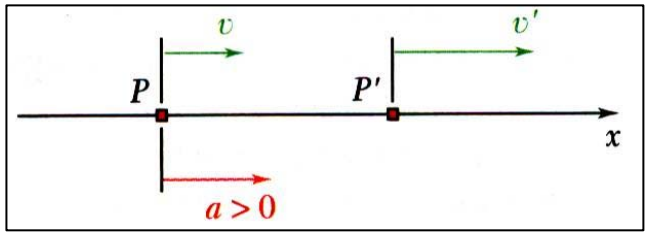
por exemplo,

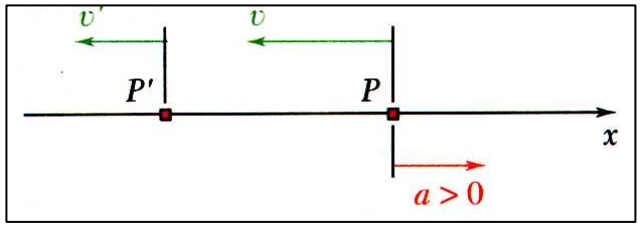
$$x = 6t^2 - t^3$$

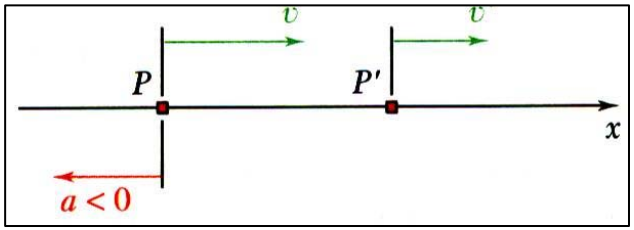
$$v = \frac{dx}{dt} = 12t - 3t^2$$

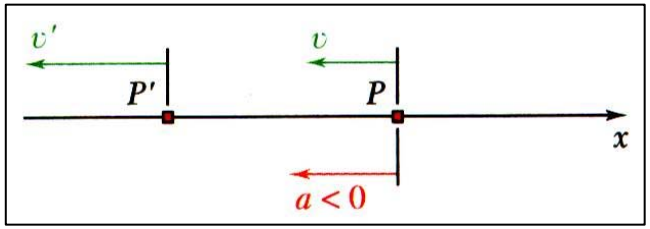
Movimento Retilíneo: Aceleração











- Considere uma partícula com velocidade v no tempo t e v' em t +Δt,

$$\text{aceleração instantânea} = a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

- A aceleração instantânea pode ser :

- positiva: aumentando a velocidade positiva

  ou diminindo a velocidade negativa.

- negativa: diminuindo a velocidade positiva

  ou amentando a velocidade negativa.

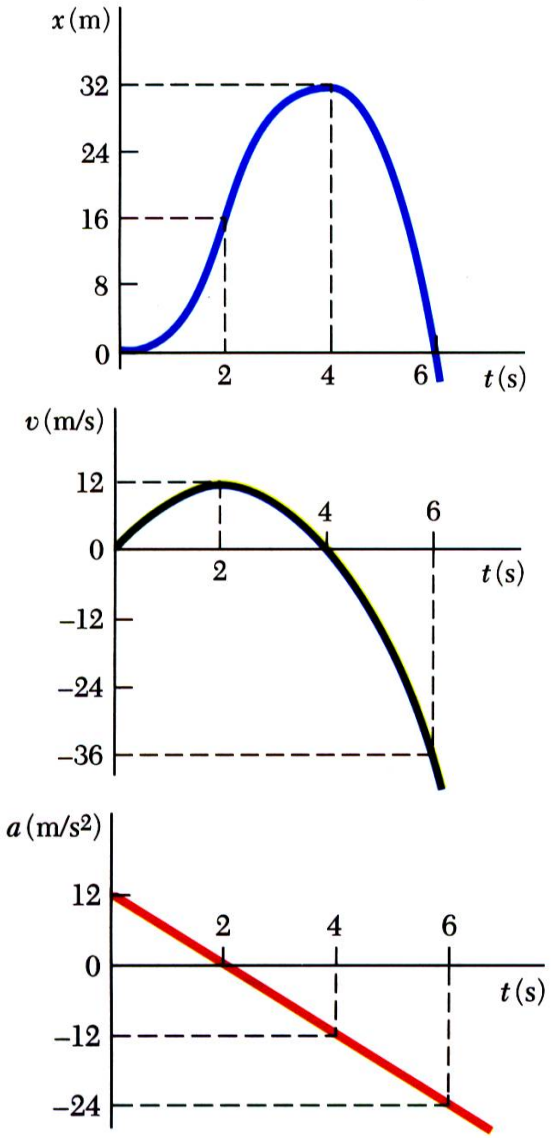
- A partir da definição de uma derivada,

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$v = 12t - 3t^2$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 12 - 6t$$

Movimento Retilíneo: Posição, Velocidade e Aceleração



- Considere uma partícula com movimento dado por

$$x = 6t^2 - t^3$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 12t - 3t^2$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 12 - 6t$$

- em t = 0, x = 0, v = 0, a = 12 m/s^2
- em t = 2 s, x = 16 m, v = v_{max} =12 m/s, a = 0
- em t = 4 s, x = x_{max} = 32 m, v = 0, a = -12 m/s^2
- em t = 6 s, x = 0, v = -36 m/s, a = -24 m/s^2

Determinação do Movimento de uma Partícula

- Lembre-se, o movimento de uma partícula é conhecido se a posição é conhecida para todo o tempo t.

- **Tipicamente, as condições de movimento são especificadas pelo tipo de aceleração experimentada pela partícula.**
- A determinação da velocidade e da posição requer duas integrais sucessivas.

- Três classes de movimento podem ser definidas para:

- aceleração dada em função do tempo, a = f (t)
- aceleração dada em função da posição, a = f (x)
- aceleração dada em função da velocidade, a = f (v)

Determinação do Movimento de uma Partícula

- Aceleração dada em função do tempo, a = f (t):

$$\frac{dv}{dt} = a = f(t) \qquad dv = f(t)\,dt \qquad \int_{v_0}^{v(t)} dv = \int_0^t f(t)\,dt \qquad \boxed{v(t) - v_0 = \int_0^t f(t)\,dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \qquad dx = v(t)\,dt \qquad \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t v(t)\,dt \qquad \boxed{x(t) - x_0 = \int_0^t v(t)\,dt}$$

- Aceleração dada em função da posição, a = f (x):

$$v = \frac{dx}{dt} \text{ ou } dt = \frac{dx}{v} \qquad a = \frac{dv}{dt} \text{ ou } a = v\frac{dv}{dx} = f(x)$$

$$v\,dv = f(x)\,dx \qquad \boxed{\int_{v_0}^{v(x)} v\,dv = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \Rightarrow \tfrac{1}{2}v(x)^2 - \tfrac{1}{2}v_0^2 = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx}$$

Determinação do Movimento de uma Partícula

- Aceleração dada em função da velocidade, a = f(v):

$$\frac{dv}{dt} = a = f(v) \qquad \frac{dv}{f(v)} = dt \qquad \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{f(v)} = \int_{0}^{t} dt$$

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{f(v)} = t$$

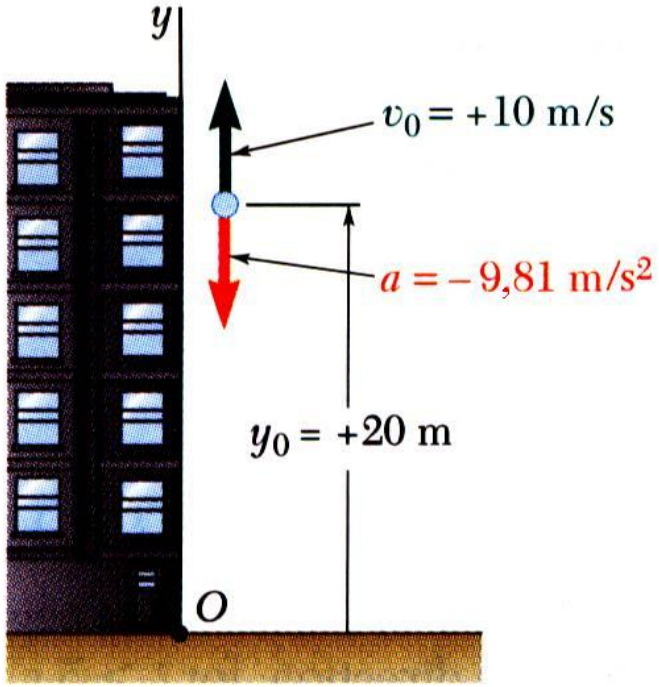
$$v\frac{dv}{dx} = a = f(v) \qquad dx = \frac{v\,dv}{f(v)} \qquad \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{v_0}^{v(t)} \frac{v\,dv}{f(v)}$$

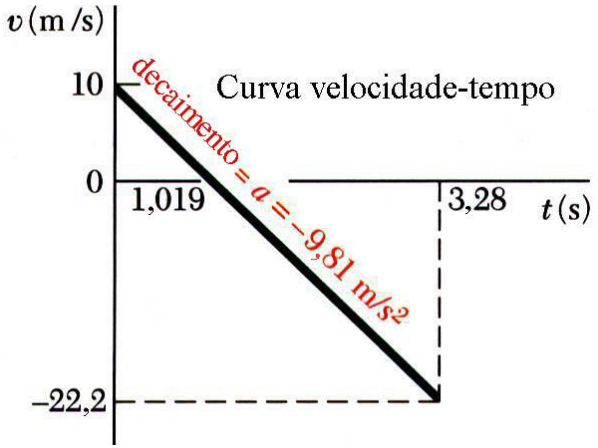
$$x(t) - x_0 = \int_{v_0}^{v(t)} \frac{v\,dv}{f(v)}$$

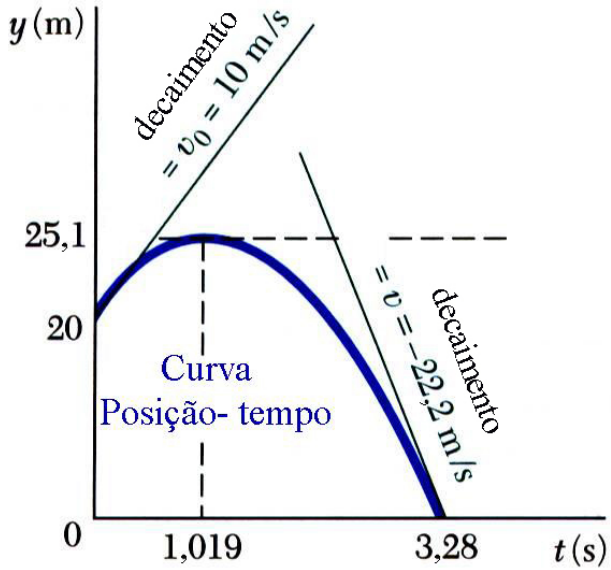
Exemplo 11.2 (Beer, Dinâmica, ed.9)

Uma esfera é lançada com velocidade vertical de 10 m/s de uma janela 20 m acima do chão.

Determine:
- a velocidade e a elevação acima do chão no tempo t,
- a maior elevação alcançada pela esfera e o tempo correspondente, e
- o tempo em que a esfera baterá no chão e a velocidade correspondente.



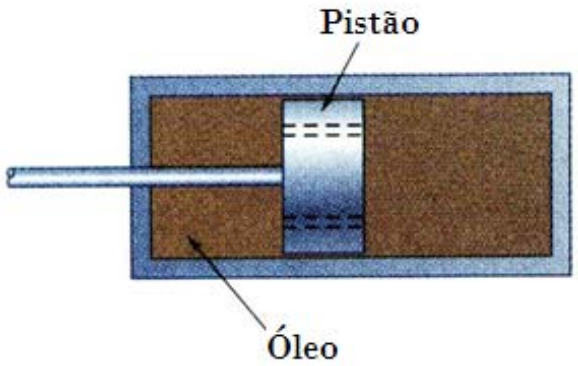

v (m/s)
10
0
–22,2
1,019
3,28
t (s)
Curva velocidade-tempo
decaimento = a = –9,81 m/s²


y (m)
25,1
20
0
1,019
3,28
t (s)
decaimento
= v0 = 10 m/s
decaimento
= v = –22,2 m/s
Curva
Posição- tempo

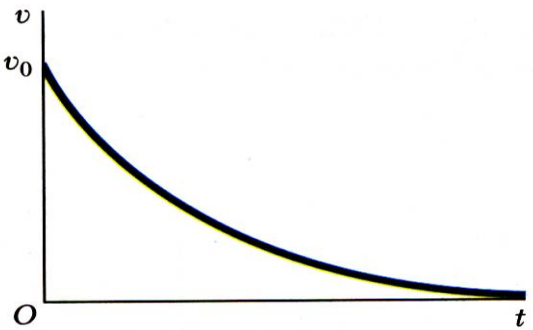
Exemplo 11.3

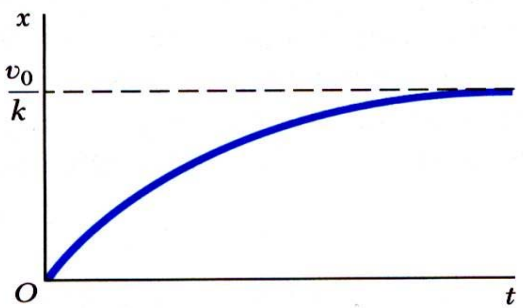
O mecanismo de freio usado para reduzir o recuo em certos tipos de arma consiste em um pistão preso ao cano e que se move em um cilindro fixo, cheio de óleo. Quando o cano recua com velocidade inicial v_0, o pistão se move e o óleo é forçado a passar através de orifícios em seu interior, causando uma desaceleração do pistão e do cano a uma taxa proporcional à velocidade de ambos.

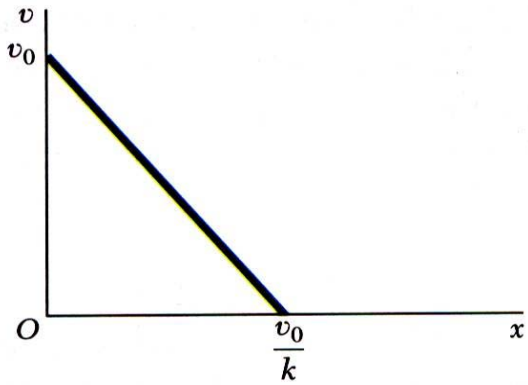
Determine v(t), x(t), e v(x).



$$a = -kv$$


v
v_0
O
t


x
$\frac{v_0}{k}$
O
t


v
v_0
O
$\frac{v_0}{k}$
x

Movimento Retilíneo Uniforme - MRU

Para a partícula em movimento retilíneo uniforme, a aceleração é zero e a velocidade é constante.

$$\frac{dx}{dt} = v = \text{constante}$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = v \int_{0}^{t} dt$$

$$x - x_0 = vt$$

$$x = x_0 + vt$$

Movimento Retilíneo Uniformemente Variado - MRUV

Para partícula em movimento retilíneo uniformemente variado, a aceleração da partícula é constante.

$$\frac{dv}{dt} = a = \text{constante} \qquad \int_{v_0}^{v} dv = a\int_{0}^{t} dt \qquad v - v_0 = at$$

$$v = v_0 + at$$

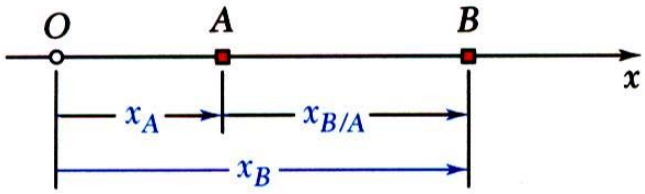
$$\frac{dx}{dt} = v_0 + at \qquad \int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} (v_0 + at)\,dt \qquad x - x_0 = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

$$v\frac{dv}{dx} = a = \text{constante} \qquad \int_{v_0}^{v} v\,dv = a\int_{x_0}^{x} dx \qquad \tfrac{1}{2}\left(v^2 - v_0^2\right) = a\left(x - x_0\right)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a\left(x - x_0\right)$$

Movimento Relativo de Diversas Partículas



- Para partículas se movendo ao longo da mesma linha, o tempo deve ser registrado a partir do mesmo instante inicial e os deslocamentos devem ser medidos a partir da mesma origem na mesma direção.

$$x_{B/A} = x_B - x_A = \text{posição relativa de } B \text{ com relação a } A$$

$$x_B = x_A + x_{B/A}$$



$$v_{B/A} = v_B - v_A = \text{velocidade relativa de } B \text{ com relação a } A$$

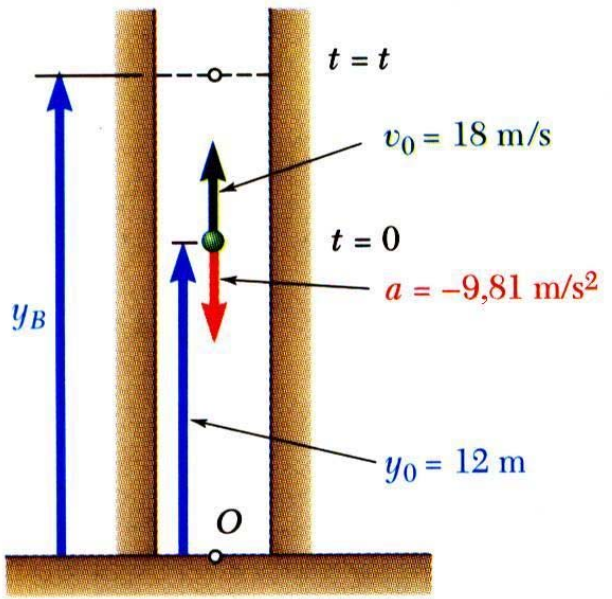
$$v_B = v_A + v_{B/A}$$

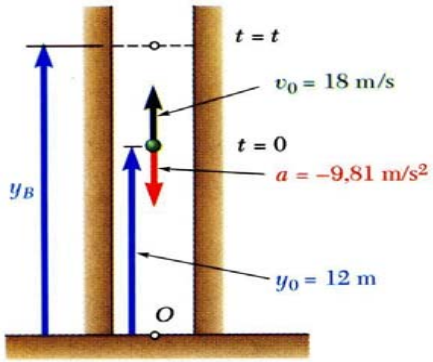
$$a_{B/A} = a_B - a_A = \text{aceleração relativa de } B \text{ com relação a } A$$

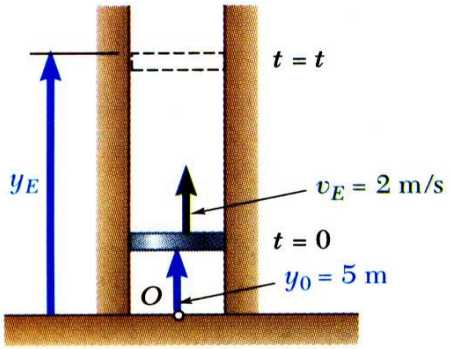
$$a_B = a_A + a_{B/A}$$

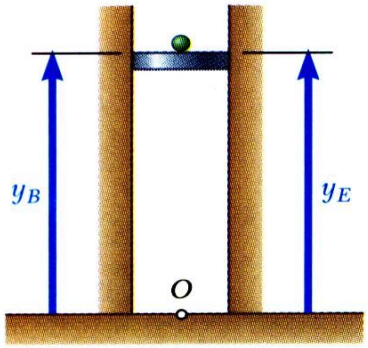
Exemplo 11.4

Uma esfera é jogada verticalmente a partir de 12 m de altura no vão do elevador com velocidade inicial de 18 m/s. No mesmo instante, a plataforma do elevador passa na altura de 5 m se movendo para cima a 2 m/s.
Determine (a) quando e onde a esfera bate no elevador e (b) a velocidade relativa da esfera e do elevador em contato.

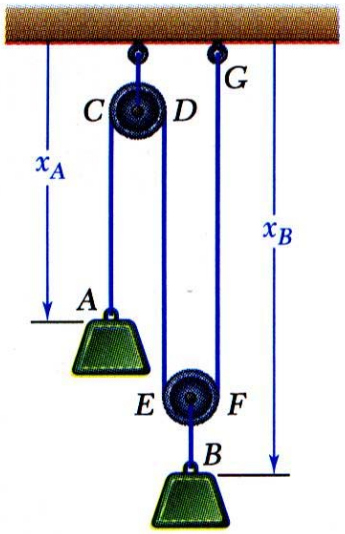



t = t
v0 = 18 m/s
t = 0
a = –9,81 m/s²
yB
y0 = 12 m
O


t = t
yE
vE = 2 m/s
t = 0
y0 = 5 m
O


yB
yE
O

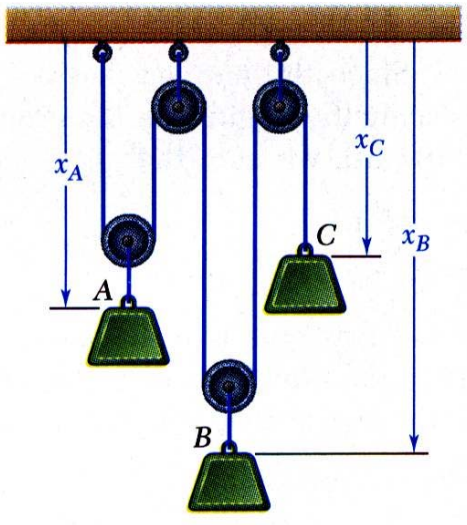
Movimento de Diversas Partículas: Movimento Dependente



- A posição de uma partícula pode depender da posição de outra partícula ou de várias outras partículas.

- Na figura ao lado, a posição do bloco B depende da posição do bloco A. Como a corda tem comprimento constante, tem-se que a soma dos comprimentos dos seus segmentos é constante.

$$x_A + 2x_B = \text{constante}$$ (um grau de liberdade)



- As posições dos três blocos ao lado são dependentes.

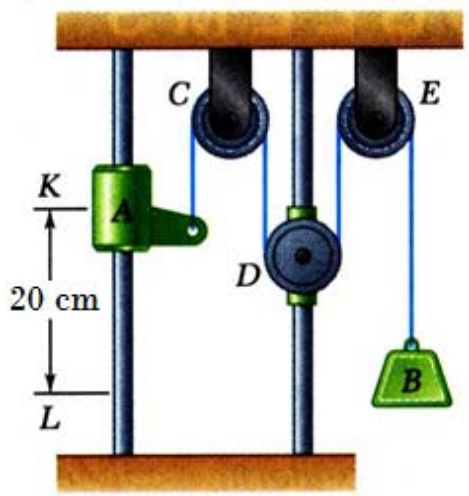
$$2x_A + 2x_B + x_C = \text{constante}$$ (dois graus de liberdade)

- Para partículas cujas posições estão relacionadas linearmente, uma relação semelhante é válida entre as velocidades e as acelerações das partículas.

$$2\frac{dx_A}{dt} + 2\frac{dx_B}{dt} + \frac{dx_C}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad 2v_A + 2v_B + v_C = 0$$

$$2\frac{dv_A}{dt} + 2\frac{dv_B}{dt} + \frac{dv_C}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad 2a_A + 2a_B + a_C = 0$$

Exemplo 11.5

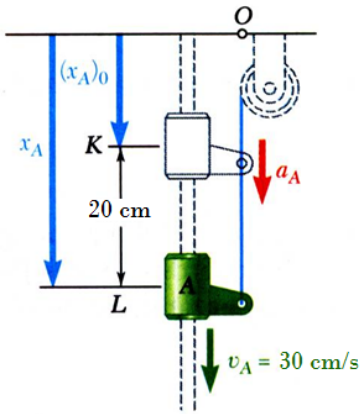


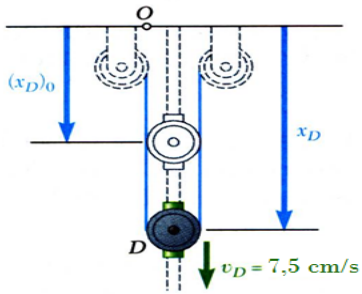
A polia D está presa a um cursor que que é puxado para baixo com velocidade de 7,5 cm/s. No instante t = 0, o cursor A começa a se mover para baixo a partir de K com aceleração constante e velocidade inicial nula.

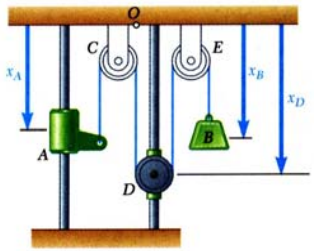
Sabendo que a velocidade do cursor A é de 30 cm/s ao passar pelo ponto L, determine a variação na elevação, a velocidade e a aceleração do bloco B quando o bloco A passar por L.

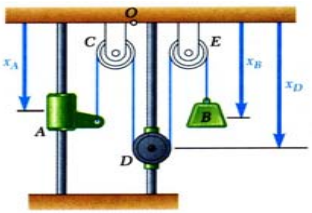
SOLUÇÃO:

- Colocamos a origem na superfície horizontal superior e escolhemos o sentido positivo para baixo.
- O cursor A tem movimento retilíneo uniformemente acelerado. Calculamos sua aceleração e o tempo t para que passe por L.
- A polia D tem movimento retilíneo uniforme. Calculamos a variação da posição no tempo t.
- O movimento do bloco B é dependente dos movimentos do cursor A e da polia D. Escrevemos relações entre os movimentos e as resolvemos para obter a variação na elevação do bloco B.
- Derivamos a relação de movimento duas vezes para obter equações para a velocidade e para a aceleração do bloco B.

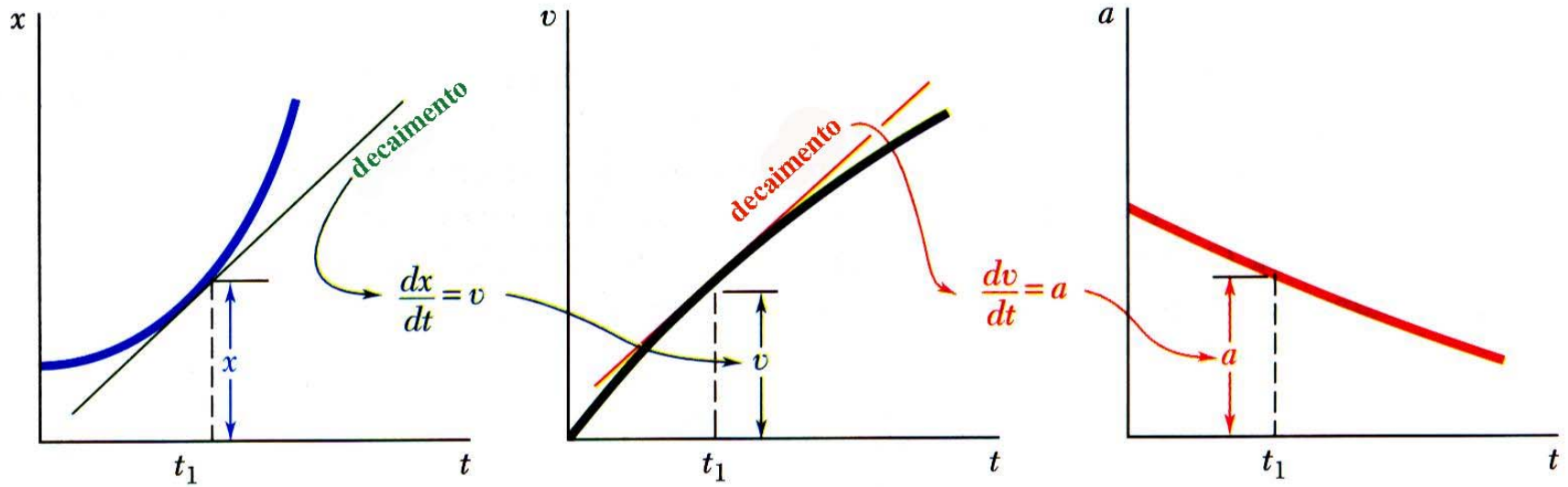

O
$(x_A)_0$
x_A
K
20 cm
L
A
a_A
v_A = 30 cm/s


O
$(x_D)_0$
x_D
D
v_D = 7,5 cm/s


O
C
E
x_A
x_B
x_D
A
B
D


O
C
E
x_A
x_B
x_D
A
B
D

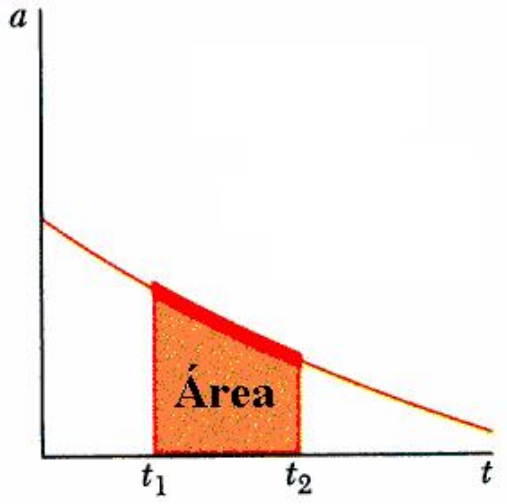
Solução Gráfica de Problemas com Movimento Retilíneo

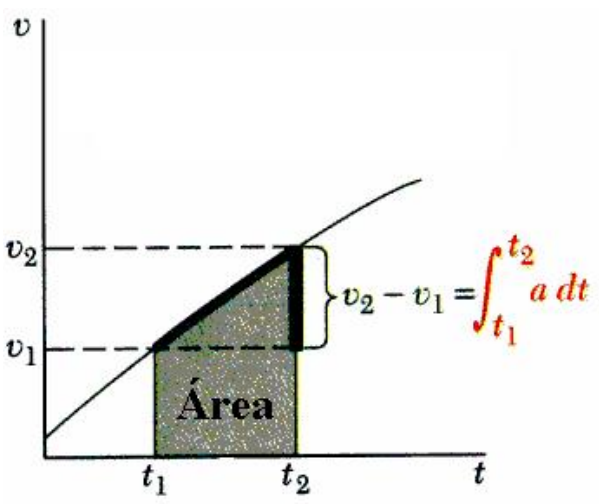


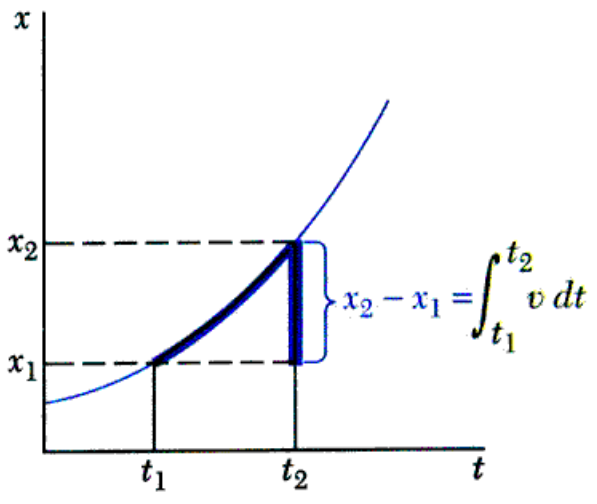
- Dada a curva x-t, a curva v-t é igual ao decaimento da curva x-t.

- Dada a curva v-t, a curva a-t é igual ao decaimento da curva v-t.

Solução Gráfica de Problemas com Movimento Retilíneo



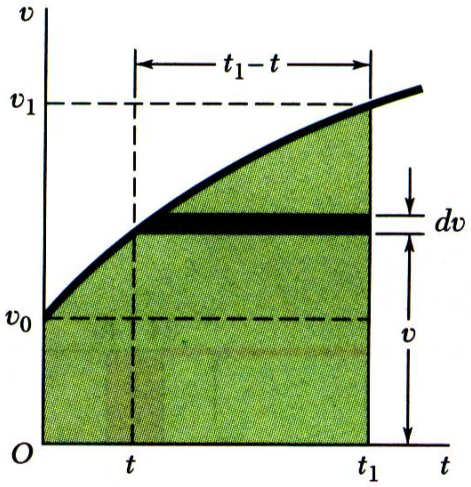




- Dada a curva a-t, a mudança em velocidade entre t_1 e t_2 é igual à área sob a curva a-t entre t_1 e t_2.

- Dada a curva v-t, a mudança em posição entre t_1 e t_2 é igual à área sob a curva v-t entre t_1 e t_2.

Outros Métodos Gráficos

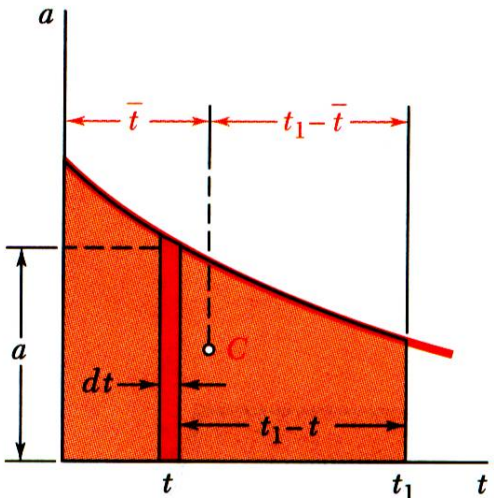


- O método do momento de área é usado para se determinar a posição de um partícula em um instante t diretamente a partir da curva a-t.

$$x_1 - x_0 = \text{área sob a curva } v - t$$

$$= v_0 t_1 + \int_{v_0}^{v_1} (t_1 - t)\,dv$$

utilizando dv = a dt ,



$$x_1 - x_0 = v_0 t_1 + \int_{v_0}^{v_1} (t_1 - t)\,a\,dt$$

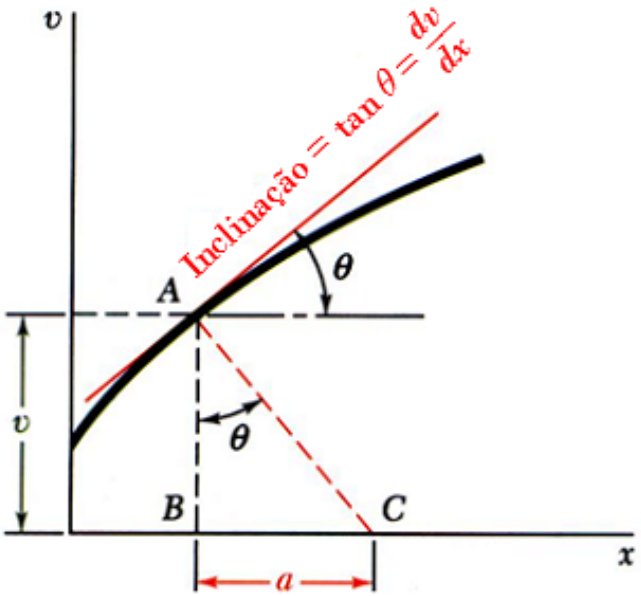
$$\int_{v_0}^{v_1} (t_1 - t)\,a\,dt = \text{primeiro momento da área sob a curva a-t em relação à linha t = } t_1.$$

$$\bar{t}A = \int_{t_0}^{t_1} t\,dA$$

$$x_1 = x_0 + v_0 t_1 + (\text{área sob a curva } a\text{-}t)(t_1 - \bar{t})$$

$$\bar{t} = \text{abscissa do centróide } C$$

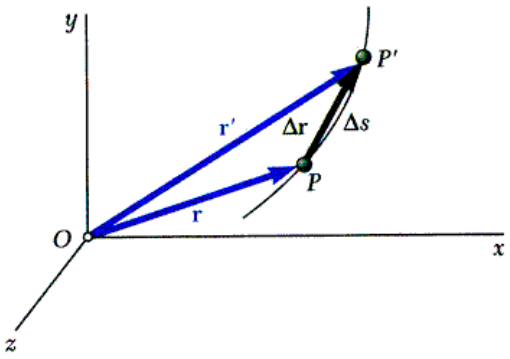
Outros Métodos Gráficos



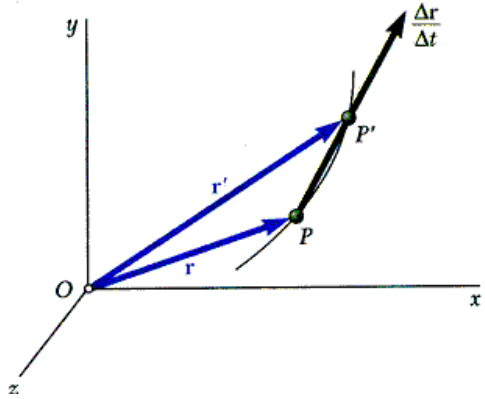
- Método para determinar a aceleração da partícula a partir da curva v-x:

$$a = v\frac{dv}{dx}$$
$$= AB\tan\theta$$
$$= BC = \text{subnormal à curva v-x}$$

Movimento Curvilíneo: Posição, Velocidade e Aceleração

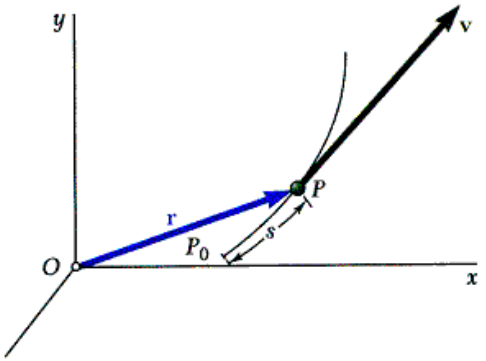


- Uma partícula se movendo ao longo de uma curva, e não de uma linha reta, está em movimento curvilíneo.



- O vetor posição de uma partícula no tempo t é definido por um vetor entre a origem O de um referencial fixo e a posição ocupada pela partícula.

- Considere a partícula que ocupa a posição P definida por r no tempo t e P' definido por r' em t + Δt,



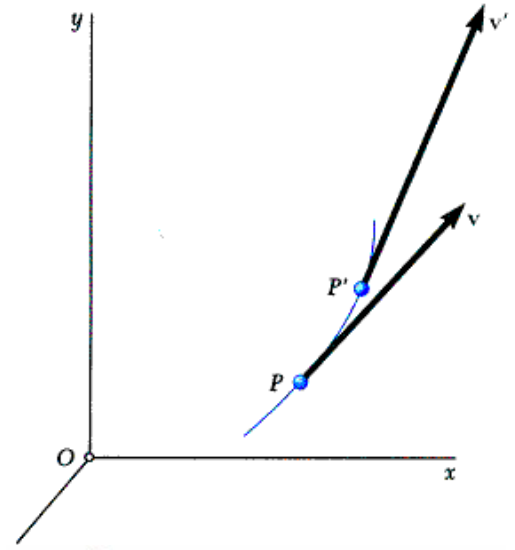
$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

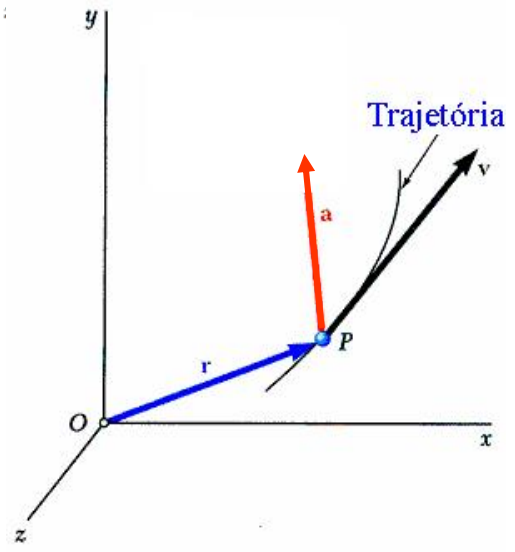
= velocidade instantânea (vetor)

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

= velocidade instantânea (escalar)

Movimento Curvilíneo: Posição, Velocidade e Aceleração





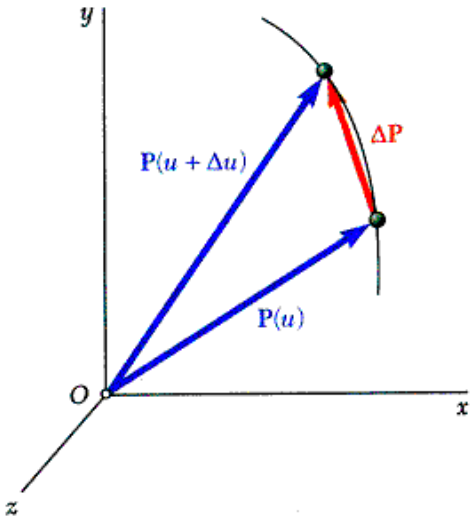
- Considere a velocidade v da partícula no tempo t e a velocidade v' em t + Δt,

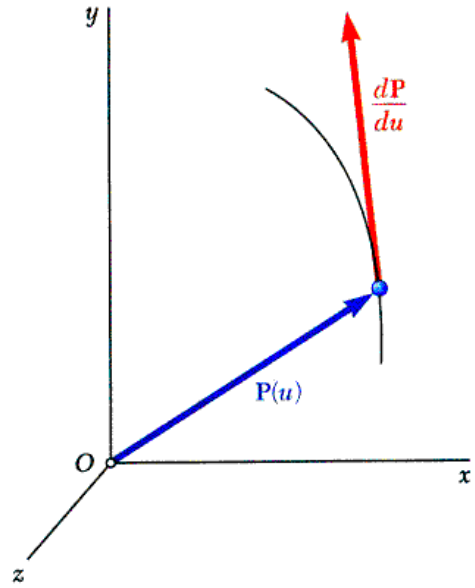
$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$=$ aceleração instantânea (vetor)

- Em geral, o vetor aceleração não é tangente à trajetória da partícula e nem ao vetor velocidade.

Derivadas de Funções Vetoriais





- Para uma função $\vec{P}(u)$ da variável escalar u, temos

$$\frac{d\vec{P}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\vec{P}(u+\Delta u) - \vec{P}(u)}{\Delta u}$$

- Derivada da soma de duas funções vetoriais:

$$\frac{d(\vec{P}+\vec{Q})}{du} = \frac{d\vec{P}}{du} + \frac{d\vec{Q}}{du}$$

- Derivada do produto de uma função escalar por uma função vetorial:

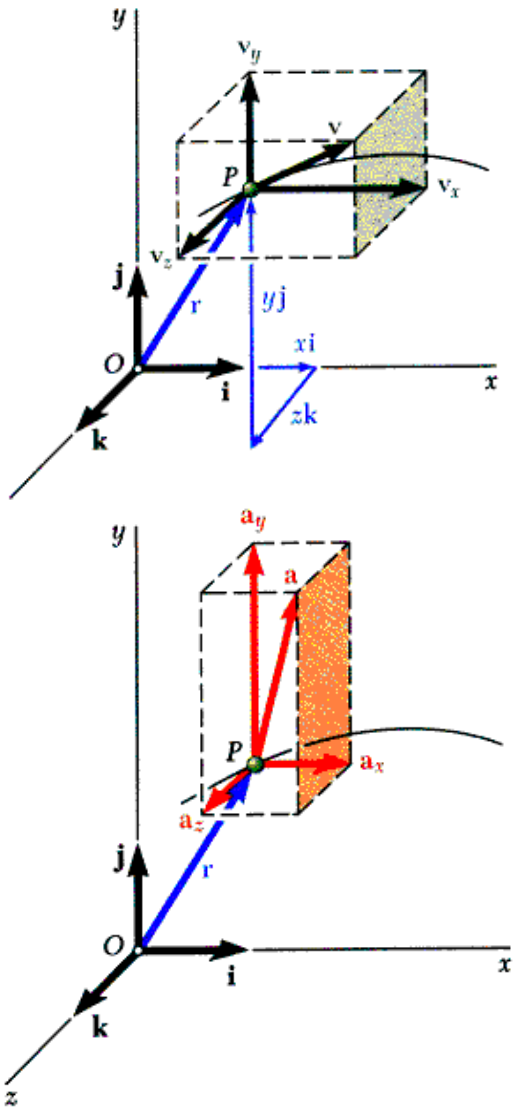
$$\frac{d(f\vec{P})}{du} = \frac{df}{du}\vec{P} + f\frac{d\vec{P}}{du}$$

- Derivadas do produto escalar e do produto vetorial:

$$\frac{d(\vec{P}\bullet\vec{Q})}{du} = \frac{d\vec{P}}{du}\bullet\vec{Q} + \vec{P}\bullet\frac{d\vec{Q}}{du}$$

$$\frac{d(\vec{P}\times\vec{Q})}{du} = \frac{d\vec{P}}{du}\times\vec{Q} + \vec{P}\times\frac{d\vec{Q}}{du}$$

Componentes Retangulares de Velocidade e Aceleração



- Quando o vetor posição da partícula P é dado por seus componentes retangulares,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

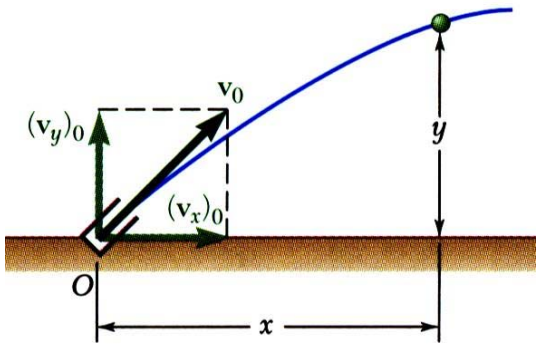
- Vetor velocidade

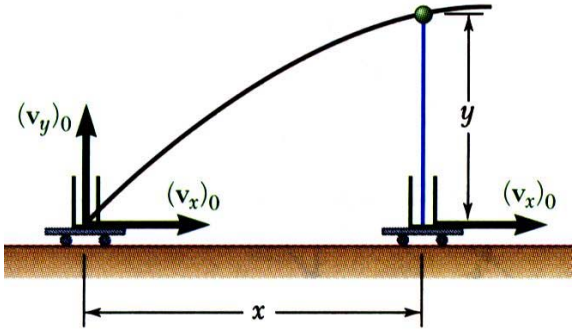
$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$$
$$= v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$$

- Vetor Aceleração

$$\mathbf{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}$$
$$= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

Componentes Retangulares de Velocidade e Aceleração







- Componentes retangulares são particularmente eficazes quando componentes das acelerações podem ser integrados independentemente, por exemplo, movimento de um projétil,

$$a_x = \ddot{x} = 0 \qquad a_y = \ddot{y} = -g \qquad a_z = \ddot{z} = 0$$

com condições iniciais,

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0 \qquad (v_x)_0 , (v_y)_0 \neq 0$$

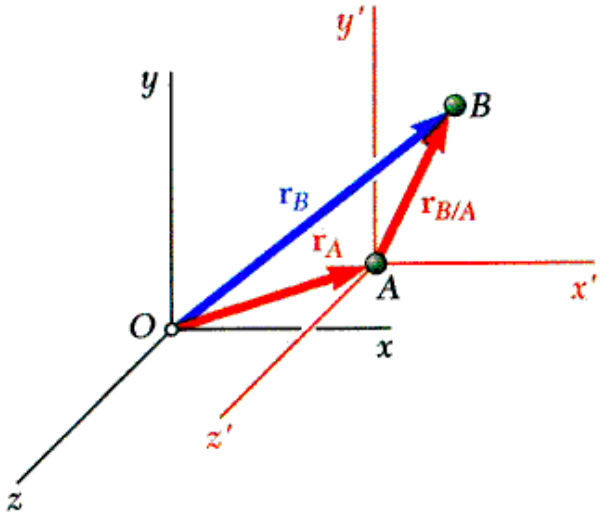
Integrando duas vezes leva a:

$$v_x = (v_x)_0 \qquad v_y = (v_y)_0 - gt \qquad v_z = 0$$

$$x = (v_x)_0 \, t \qquad y = (v_y)_0 \, y - \tfrac{1}{2} g t^2 \qquad z = 0$$

- O movimento na direção horizontal é uniforme.
- O movimento na direção vertical é uniformemente acelerado.
- O movimento do projétil poderia ser substituído por dois movimentos retilíneos independentes.

Movimento Relativo a um Sistema de Referência em Translação



- Designemos um sistema de referência como o sistema de referência fixo. Todos os demais sistemas não ligados rigidamente a ele são sistemas de referência móveis.

- Os vetores de posição para as partículas A e B em relação ao sistema de referência fixo Oxyz são $\vec{r}_A$ e $\vec{r}_B$.

- O vector $\vec{r}_{B/A}$ que une A a B define a posição de B em relação ao sistema móvel Ax'y'z' e

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}$$

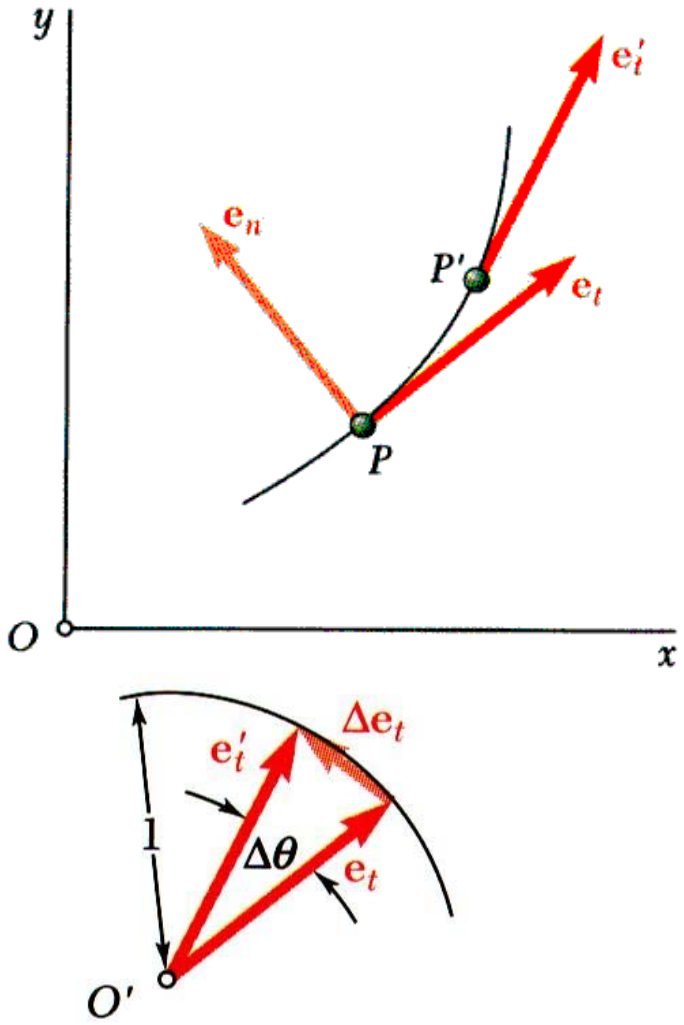
- Derivando duas vezes obtemos,

$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$ $\quad \vec{v}_{B/A} =$ velocidade de B em relação ao referencial A.

$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$ $\quad \vec{a}_{B/A} =$ aceleração de B em relação ao referencial A.

- O movimento absoluto de B pode ser obtido pela combinação do movimento de A e do movimento relativo de B em relação ao referencial móvel preso em A.

Componentes Tangencial e Normal



- O vetor velocidade é tangente à trajetória da partícula. Em geral, o vetor aceleração não é. Queremos expressar o vetor aceleração em termos dos componentes tangenciais e normais.

- $\mathbf{e}_t$ e $\mathbf{e}'_t$ são os vetores unitários tangenciais para a trajetória da partícula em P e P'. Quando expressos com relação à mesma origem, $\Delta\mathbf{e}_t = \mathbf{e}'_t - \mathbf{e}_t$. Δθ é o ângulo entre eles.

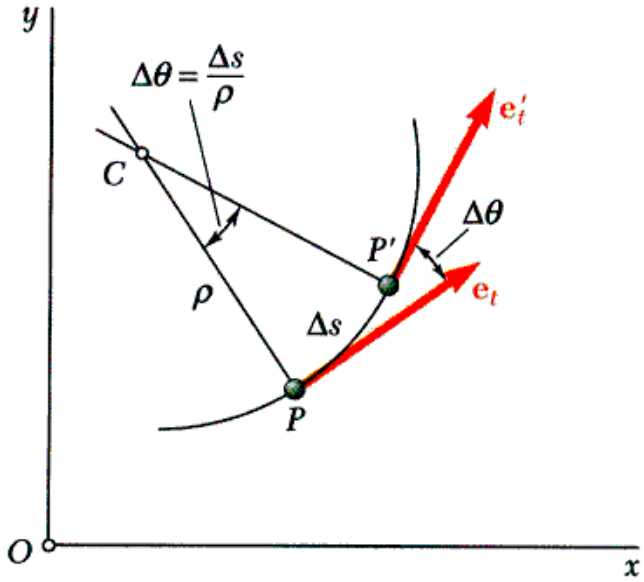
$$\Delta e_t = 2\sin(\Delta\theta/2)$$

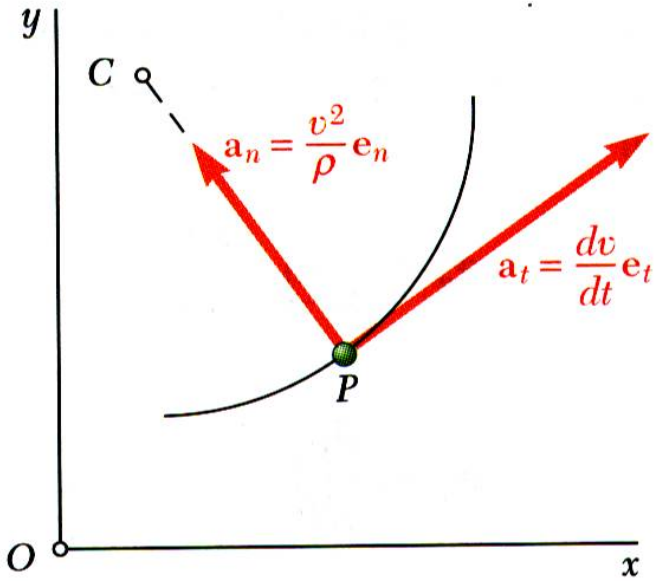
$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta\mathbf{e}_t}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2}\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_n$$

$$\mathbf{e}_n = \frac{d\mathbf{e}_t}{d\theta}$$



Componentes Tangencial e Normal





- Com o vetor velocidade expresso como $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_t$, a aceleração da partícula pode ser escrita como

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + v\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + v\frac{d\mathbf{e}}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt}$$

mas

$$\frac{d\mathbf{e}_t}{d\theta} = \mathbf{e}_n \qquad \rho\, d\theta = ds \qquad \frac{ds}{dt} = v$$

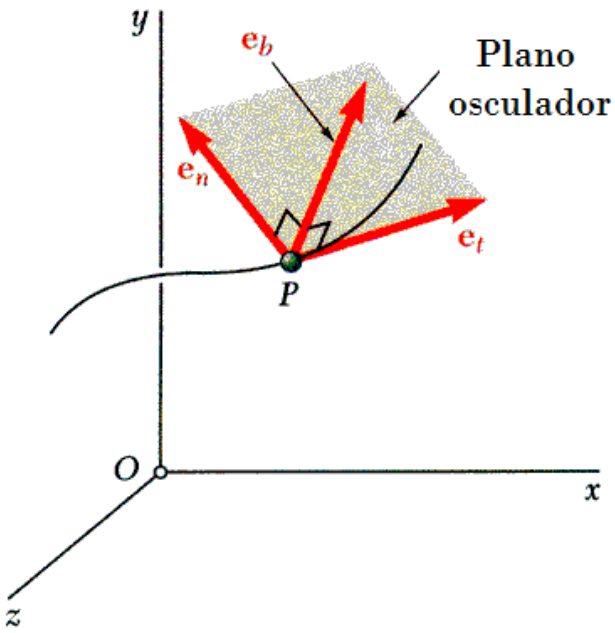
Após substituir,

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n \qquad a_t = \frac{dv}{dt} \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

- A componente tangencial da aceleração reflete a mudança na velocidade e a componente normal reflete a mudança na direção.

- A componente tangencial pode ser positiva ou negativa. A componente normal sempre aponta para o centro de curvatura da trajetória.

Componentes Tangencial e Normal



- As relações para as acelerações normal e tangencial também são válidas para uma partícula que se desloca ao longo de uma curva no espaço.

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n \qquad a_t = \frac{dv}{dt} \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

- O plano que contém os vetores unitários tangencial e normal é chamado plano osculador.

- A Normal ao plano osculador é obtida a partir da relação

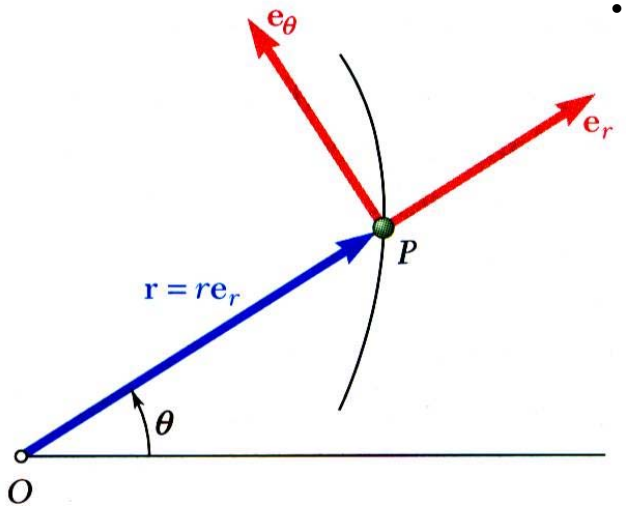
$$\vec{e}_b = \vec{e}_t \times \vec{e}_n$$

$$\vec{e}_n = normal\ principal$$

$$\vec{e}_b = binormal$$

- A aceleração não tem nenhum componente ao longo da binormal.

Componentes Radial e Transversal



- Quando a posição de uma partícula é dada em **coordenadas polares**, é conveniente decompor a velocidade e a aceleração em componentes paralelo e perpendicular à linha OP.

- Nesse caso, o vetor velocidade da partícula é

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta$$
$$= \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta \qquad \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r$$

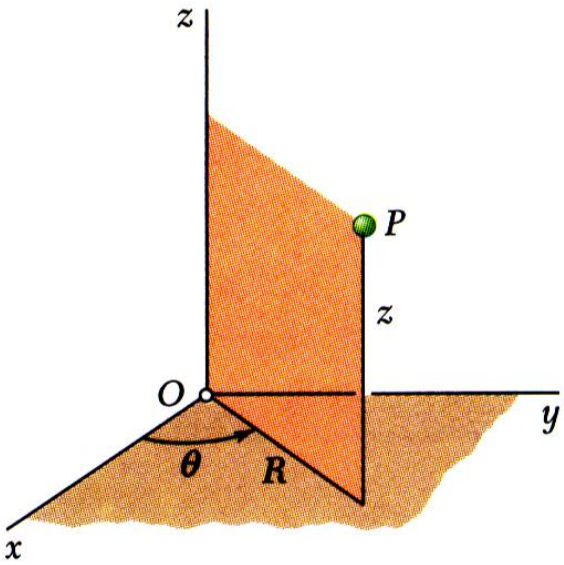
$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \vec{e}_\theta\frac{d\theta}{dt}$$

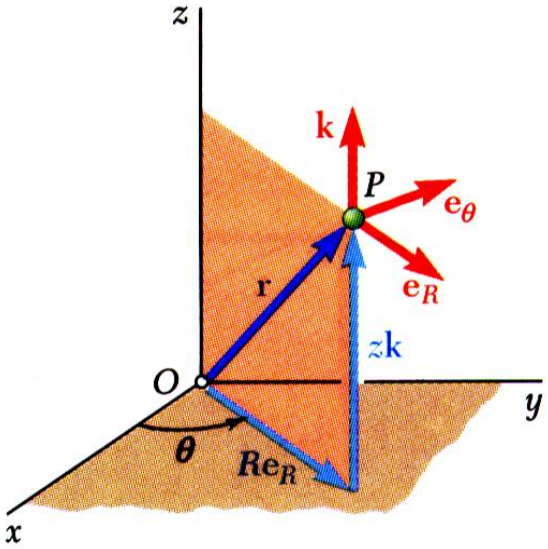
$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\vec{e}_r\frac{d\theta}{dt}$$

- De maneira análoga, a aceleração da partícula é

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta\right)$$
$$= \frac{d^2r}{dt^2}\vec{e}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{e}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$
$$= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta$$

Componentes Radial e Transversal





- Quando a posição de uma partícula é dada em **coordenadas cilíndricas**, é conveniente expressar sua velocidade e sua aceleração utilizando os vetores unitários

$$\vec{e}_R, \vec{e}_\theta \text{ e } \vec{k}.$$

- Verificamos que, nesse caso, o vetor de posição é:

$$\vec{r} = R\,\vec{e}_R + z\,\vec{k}$$

- O vetor velocidade é:

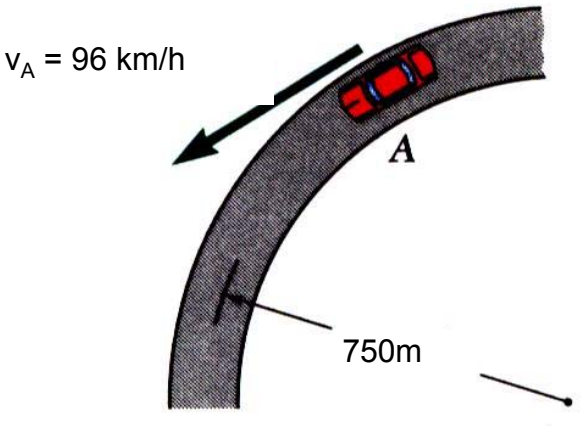
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{R}\,\vec{e}_R + R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{k}$$

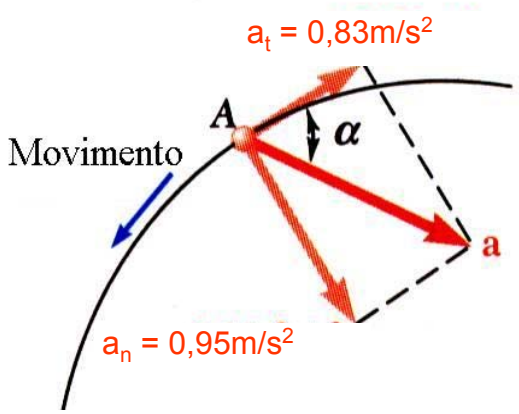
- E o vetor aceleração é:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\ddot{R} - R\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_R + \left(R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta + \ddot{z}\,\vec{k}$$

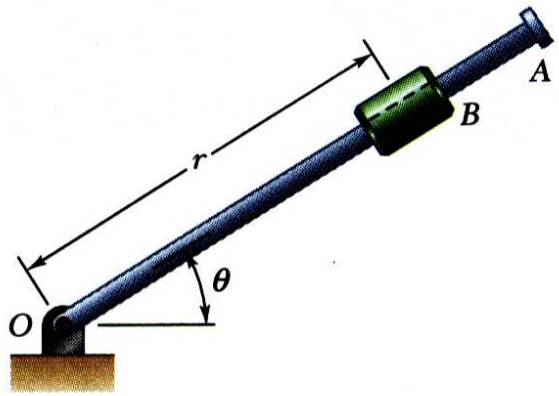
Exemplo 11.10

Um motorista está viajando na seção curva da estrada a 96 km/h. O motorista aciona o freio causando uma desaceleração constante. Sabendo que após 8 s a velocidade foi reduzida para 72 km/h, determine a aceleração do automóvel imediatamente após o freio ser acionado.




$a_t = 0{,}83 m/s^2$
A
α
Movimento
a
$a_n = 0{,}95 m/s^2$

Exemplo 11.12

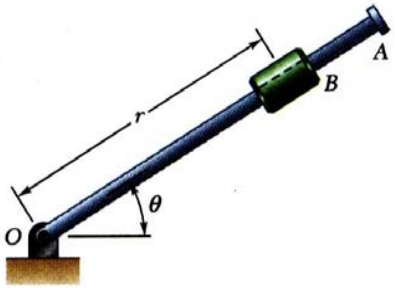


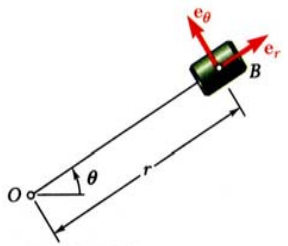
O rotação do braço OA em torno de O é definida pela relação $\theta = 0{,}15t^2$, onde θ está em radianos e t em segundos. O Cursor B desliza ao longo do braço de tal maneira que sua distância em relação a O é $r = 0{,}9 - 0{,}12t^2$, onde r é expresso em metros.

Após o braço ter girado 30º, determine (a) a velocidade total do cursor, (b) a aceleração total do cursor e (c) a aceleração relativa do cursor em relação ao braço.

SOLUÇÃO:

- Determinamos o tempo t para o qual θ = 30º.
- Determinamos os valores de r e θ, e de suas primeiras e segundas derivadas no instante t.
- Calculamos a velocidade e a aceleração em coordenadas cilíndricas.
- Determinamos a aceleração do cursor em relação ao braço.





$\mathbf{v} = v_r\mathbf{e}_r + v_\theta\mathbf{e}_\theta$

$\mathbf{a} = a_r\mathbf{e}_r + a_\theta\mathbf{e}_\theta$

