



FACULDADE DE ENGENHARIA DA UERJ

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

Análise de Sistemas Físicos



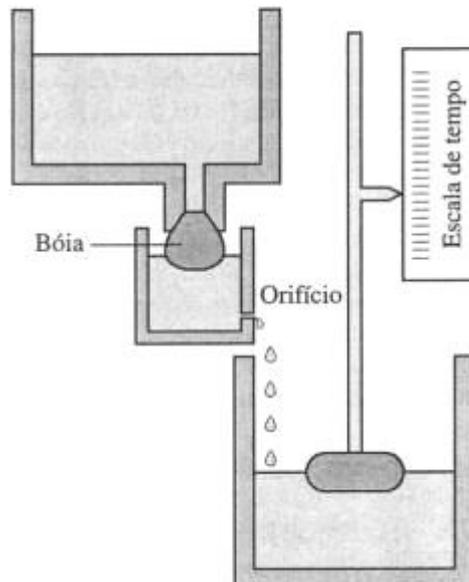
*“A mente que se abre a uma nova ideia
jamais voltará ao seu tamanho original”
Albert Einstein*

PROF.: PAULO ALMEIDA

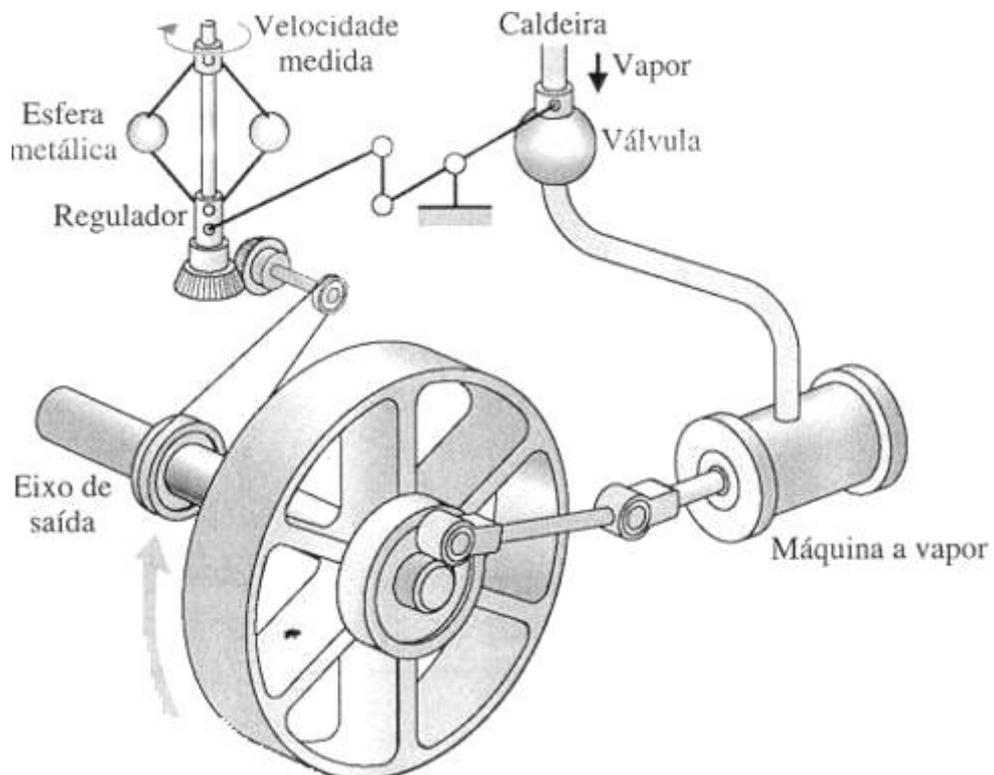
Análise de Sistemas Físicos

1 - Introdução / Histórico

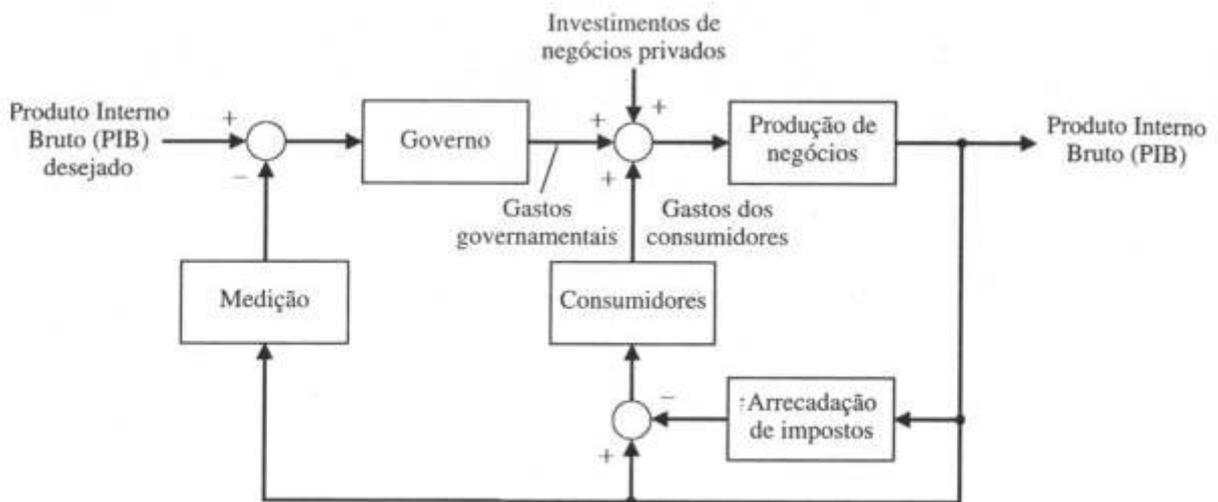
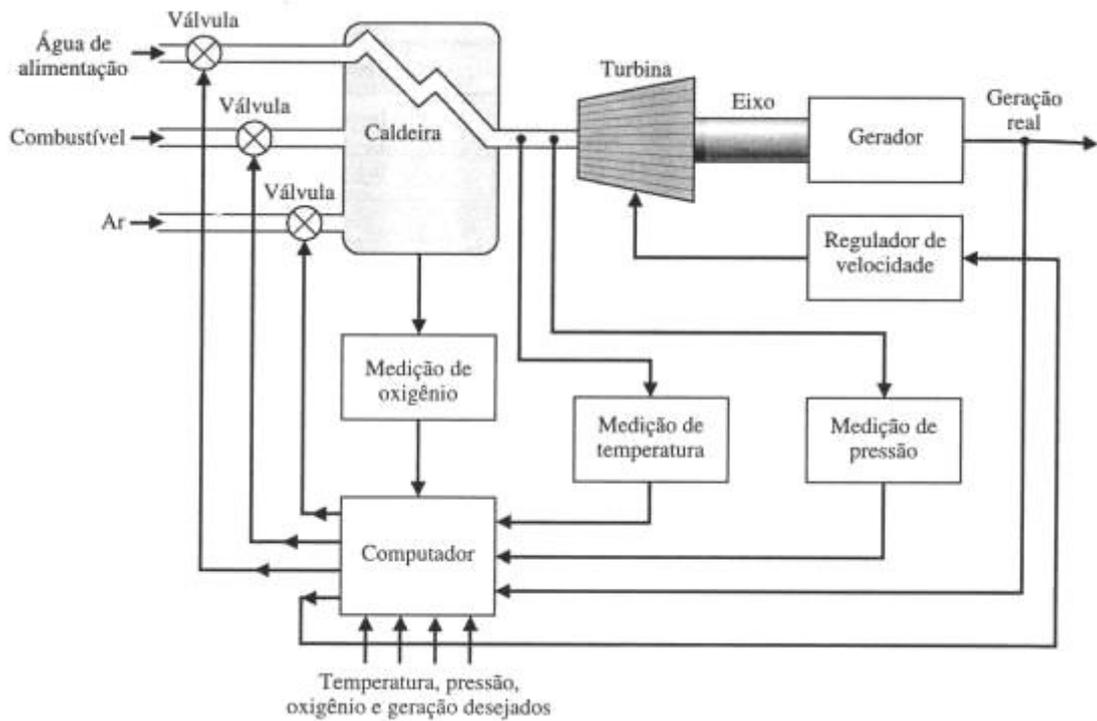
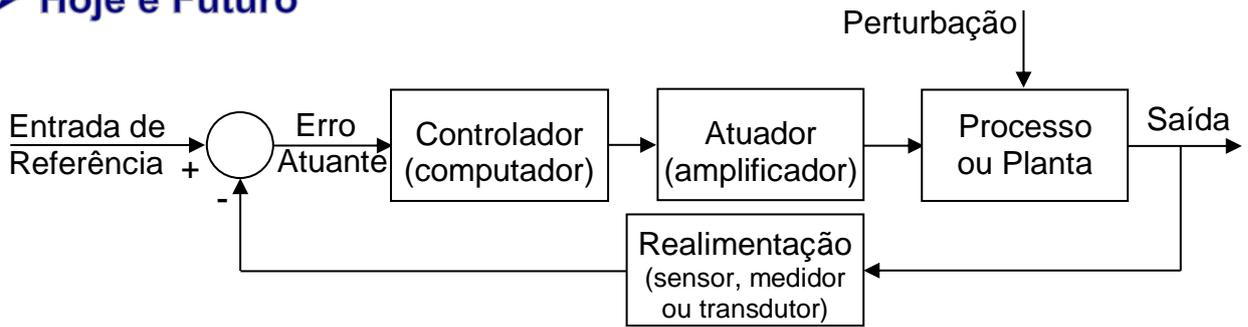
- Relógio de água ⇒ 300 a.C. (na Grécia) até o século XVII



- *Regulador de James Watt* – 1796 ⇒ Regulador de Velocidade (Esferas) para Máquinas a Vapor



➤ Hoje e Futuro



2 - Modelos Matemáticos

➤ Equações Diferenciais de Sistemas Físicos

Quadro Resumo das Variáveis “através” e “sobre” componentes dos sistemas

Componente	Variável “através”	Variável “sobre”
Elétrico	Corrente $i(t)$	Diferença de tensão $v(t)$
Mecânico em Translação	Força $f(t)$	Diferença de velocidade $v_{el}(t)$
Mecânico em Rotação	Torque $\tau(t)$	Diferença de vel. angular $\omega(t)$
Fluido	Vazão Volumétrica $q(t)$	Diferença de pressão $p(t)$
Térmico	Fluxo Térmico $\varphi(t)$	Diferença de temperatura $\theta(t)$

Equações Diferenciais de Elementos Ideais

Com dissipação de energia	Com armazenamento de energia	
	Indutivo	Capacitivo
Resistência Elétrica R $i(t) = \frac{v(t)}{R}$	Indutância Elétrica L $v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	Capacitância Elétrica C $i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$
Atrito ou amortecimento b_t (translação) $f(t) = b_t v_{el}(t)$	Mola de Translação k_t $v_{el}(t) = \frac{1}{k_t} \frac{df(t)}{dt}$	Massa em Translação M $f(t) = M \frac{dv_{el}(t)}{dt}$
Atrito ou amortecimento b_r (rotação) $\tau(t) = b_r \omega(t)$	Mola de Rotação k_r $\omega(t) = \frac{1}{k_r} \frac{d\tau(t)}{dt}$	Massa em Rotação J $\tau(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt}$
Resistência Fluida R_f $q(t) = \frac{p(t)}{R_f}$	Inércia Fluida I $p(t) = I \frac{dq(t)}{dt}$	Capacitância Fluida C_f $q(t) = C_f \frac{dp(t)}{dt}$
Resistência Térmica R_θ $\varphi(t) = \frac{\theta(t)}{R_\theta}$	Não há elemento análogo	Capacitância Térmica C_θ $\varphi(t) = C_\theta \frac{d\theta(t)}{dt}$

Obs.: $J \Rightarrow$ momento de inércia e $b \Rightarrow$ atrito viscoso

➤ Aproximações Lineares de Sistemas Físicos

Um sistema linear $y(t) = g(x(t))$ satisfaz as propriedades:

- (1) Superposição $\Rightarrow g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2)$
- (2) Homogeneidade $\Rightarrow y_1 = g(x_1) \Rightarrow \beta y_1 = g(\beta x_1)$

Exemplos: $y = x^2$; $y = m x + b$ (Obs.: $x + \Delta x \Rightarrow y + \Delta y$)

Sistema Linear \Rightarrow eq. diferencial é linear se os coeficientes são constantes ou são funções da variável independente (em geral t):

- Coeficientes a_i e b_i ^{tes} \Rightarrow sist. lineares invariantes no tempo (LIT)
- Coeficientes a_i e b_i são $f(t) \Rightarrow$ sist. lineares variáveis no tempo

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^m u}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{du}{dt} + b_m u$$

Além disso, somente estão presentes termos de 1º grau da entrada u , da saída y e de suas derivadas.

Sist. dinâmicos com componentes lineares de parâmetros concentrados (não existem derivadas parciais de qualquer variável) e invariantes no tempo podem ser descritos por *equações diferenciais lineares ordinárias invariantes no tempo*:

- Sistemas LIT \Rightarrow aplicar transformada de Laplace

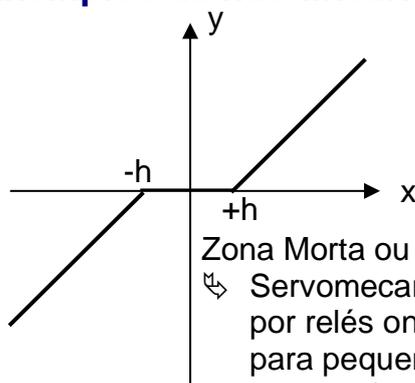
Exemplos de equações diferenciais não-lineares:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + y = A \sin \omega t$$

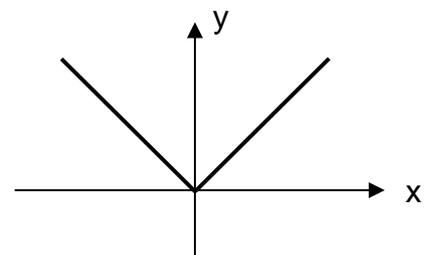
$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (y^2 - 1) \frac{dy}{dt} + y = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y + y^3 = 0$$

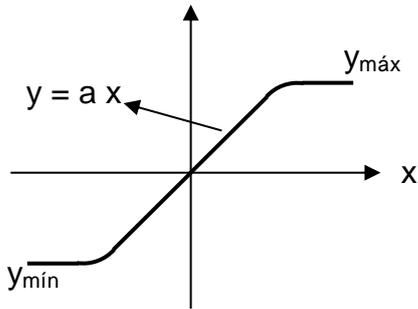
Exemplos de não-linearidades:



Zona Morta ou Banda Morta:
 \Rightarrow Servomecanismos acionados por relés onde a saída é nula para pequenas variações na entrada (razão: atrito estático)

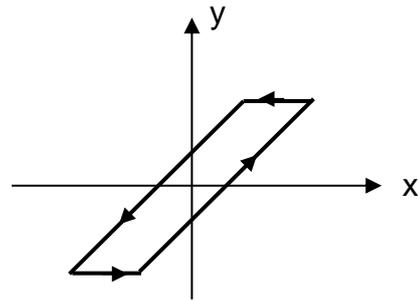


Valor Absoluto $y = |x|$:
 \Rightarrow Retificadores



Saturação:

- ↳ Limitação física da capacidade dos equipamentos ou componentes (amplificadores, geradores, motores etc).



Histerese:

- ↳ Folgas mecânicas e histerese magnética.

➤ **Linearização em torno de um ponto de operação**

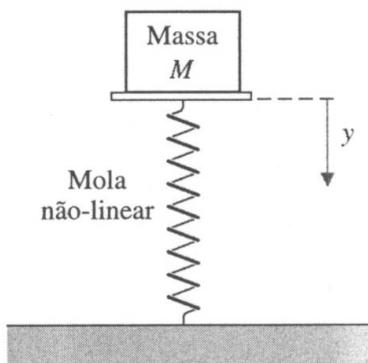
↳ **expansão em Série de Taylor:**

$$y = g(x) = g(x_0) + \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=x_0} \frac{(x - x_0)}{1!} + \left. \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x=x_0} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots$$

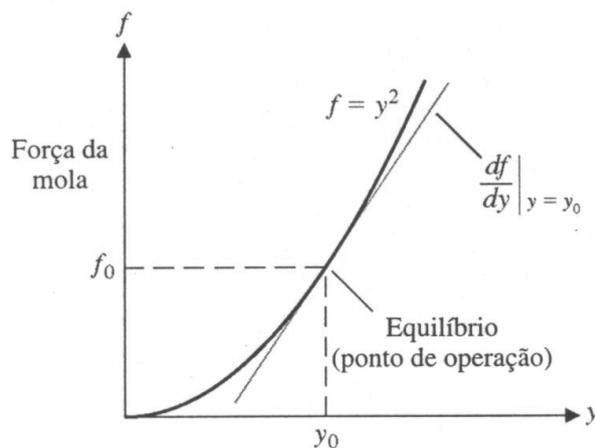
Aproximando em torno do ponto de operação x_0 com a inclinação de dg/dx :

$$y = g(x) = g(x_0) + \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) = y_0 + m (x - x_0) \quad \text{ou}$$

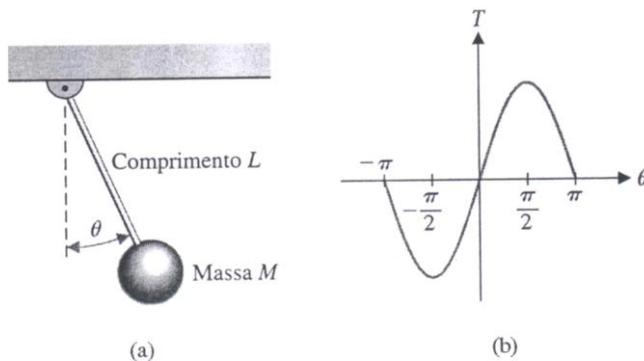
$$(y - y_0) = m (x - x_0) \Rightarrow \Delta y = m \Delta x$$



(a)



(b)

Exemplo: Modelo do oscilador tipo pêndulo

Torque aplicado à massa:

$$T = M g L \operatorname{sen} \theta$$

No equilíbrio:

$$\theta_0 = 0^\circ \text{ e } T_0 = 0$$

$$T - T_0 = M g L \left. \frac{\partial \operatorname{sen} \theta}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} (\theta - \theta_0) \Rightarrow T = M g L (\cos 0^\circ) (\theta - 0^\circ) = M g L \theta$$

Conclusão: para uma oscilação de $\pm 30^\circ$, o modelo linear tem uma resposta \cong não-linear (erro de 2 %).

3 - Transformada de Laplace (\mathcal{L})

Equações Diferenciais de Sistemas LIT $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ Equações Algébricas
(vide tabelas de Transformada de Laplace \Rightarrow pares e propriedades)

Observações:

a) $\mathcal{L}^{-1} \Rightarrow$ expansão em frações parciais (*Vide Anexos*)

b) A variável complexa $s = \sigma \pm j \omega$ pode ser considerada pelo operador

$$\text{diferencial } s \equiv \frac{d}{dt} \text{ e } \frac{1}{s} \equiv \int_0^t dt$$

c) Convolução: $y(t) = \int_0^t x(\tau) g(t-\tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) x(t-\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(s) = G(s) X(s)$

➤ **Resolução de Equação Diferencial LIT usando Transformada de Laplace**

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = 3u ; y(0) = 0 ; \dot{y}(0) = 0 \text{ (Cls=0) e } u=1$$

$$\mathcal{L}[\ddot{y}] = s^2 Y(s) - s y(0) - \dot{y}(0) = s^2 Y(s)$$

$$\mathcal{L}[\dot{y}] = s Y(s) - y(0) = s Y(s)$$

$$\mathcal{L} \Rightarrow (s^2 + 2s + 5)Y(s) = 3/s \Rightarrow Y(s) = 3/[s(s^2 + 2s + 5)]$$

Expandindo:
$$Y(s) = \frac{3}{5} \frac{1}{s} - \frac{3}{10} \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2} - \frac{3}{5} \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2}$$

Da tabela $\mathcal{L}^{-1} \Rightarrow y(t) = 3/5 - (3/10) e^{-t} \text{sen}2t - (3/5) e^{-t} \text{cos}2t$
(expressão analítica)

4 - Função de Transferência (FT) $\Rightarrow G(s)$ (Vide Anexos)

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}[\text{saída}]}{\mathcal{L}[\text{entrada}]} \Big|_{\text{CIs} = 0} = \frac{Y(s)}{U(s)} \Big|_{\text{CIs} = 0}$$

Seja o sistema LIT definido por:

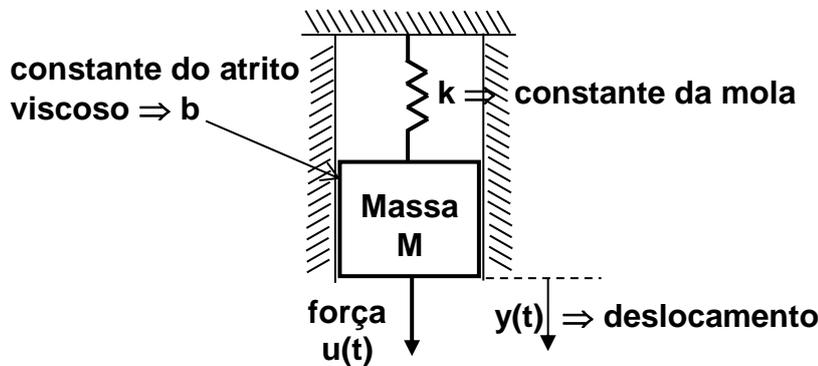
$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 u^{(m)} + b_1 u^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} \dot{u} + b_m u$$

Obs.: Os sistemas físicos reais são não-lineares e causais ($m \leq n$).

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{K(s+z_1) \dots (s+z_m)}{(s+p_1) \dots (s+p_n)} \Rightarrow \text{zeros}$$

Polinômio ou equação característica $\Rightarrow \text{polos}$

Exemplo: Sistema massa-mola-amortecedor



Da 2ª Lei de Newton: $\Sigma F = M a \Rightarrow M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + k y(t) = u(t)$
(Princípio Fundamental da Dinâmica)

$$\mathcal{L} \Rightarrow M [s^2 Y(s) - s y(0) - \dot{y}(0)] + b [s Y(s) - y(0)] + k Y(s) = U(s)$$

Para $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ (CIs = 0) e $u(t) = k \times$ “impulso” unitário, temos:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ms^2 + bs + k} \Rightarrow Y(s) = \frac{k/M}{s^2 + (b/M)s + k/M}$$

$$\text{polos} \Rightarrow s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4kM}}{2M}$$

- Se $b=0$ (sem atrito) $\Rightarrow s_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{k}{M}} = \pm j\omega_n$

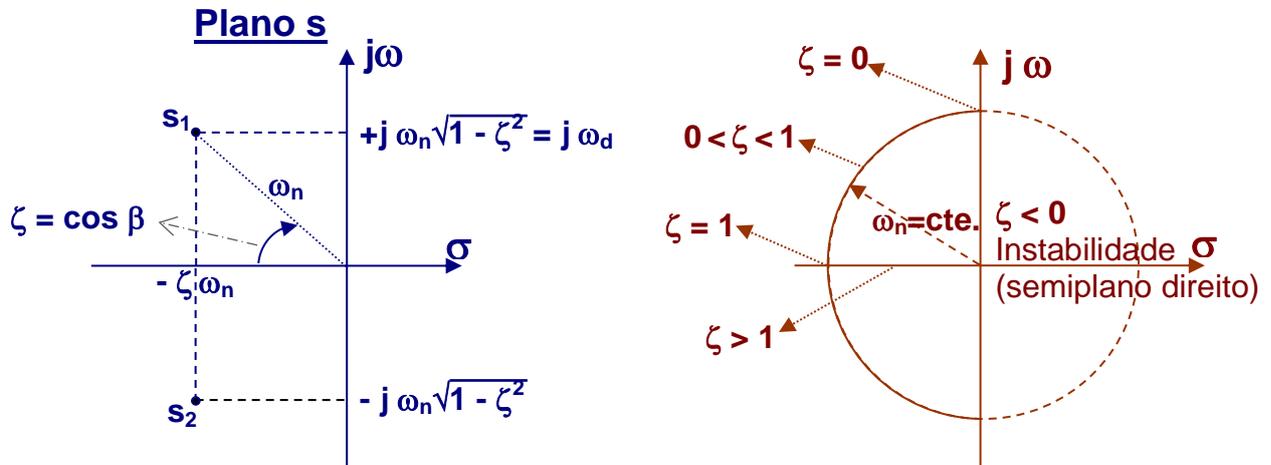
Definindo: $\omega_n \Rightarrow$ frequência natural de oscilação e

$\zeta \Rightarrow$ coeficiente de amortecimento onde $\zeta = b / (2\sqrt{kM})$

- Se $b > 2\sqrt{kM} \Rightarrow$ 2 polos reais e diferentes ($\zeta > 1$) \Rightarrow resposta sem oscilação (sistema sobreamortecido)
- Se $b = 2\sqrt{kM} \Rightarrow$ 2 polos reais e idênticos ($\zeta = 1$) \Rightarrow resposta “limite” sem oscilação (amortecimento crítico)
- Se $0 < b < 2\sqrt{kM} \Rightarrow$ 1 par de polos complexos ($0 < \zeta < 1$) \Rightarrow resposta oscilatória porém amortecida (sistema subamortecido)

Generalizando um sistema de 2ª ordem:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \text{ com polos} \Rightarrow s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$



Análise do deslocamento $y(t)$ (resposta ou saída) da massa $M = 1$ kg para uma entrada $u(t) = 4$ N na forma de “impulso”, considerando a força da mola $k = 4$ N/m e o atrito b variando em 3 situações:

a) Sistema subamortecido ($0 < \zeta < 1$): $b < 2\sqrt{kM} \Rightarrow b = 0,8$ N.s/m

$$Y(s) = \frac{4}{s^2 + 0,8s + 4} = \frac{4}{(s + 0,4 + j1,96)(s + 0,4 - j1,96)} = \frac{4}{(s + 0,4)^2 + 1,96^2} = \frac{4}{1,96} \times \frac{1,96}{(s + 0,4)^2 + 1,96^2}$$

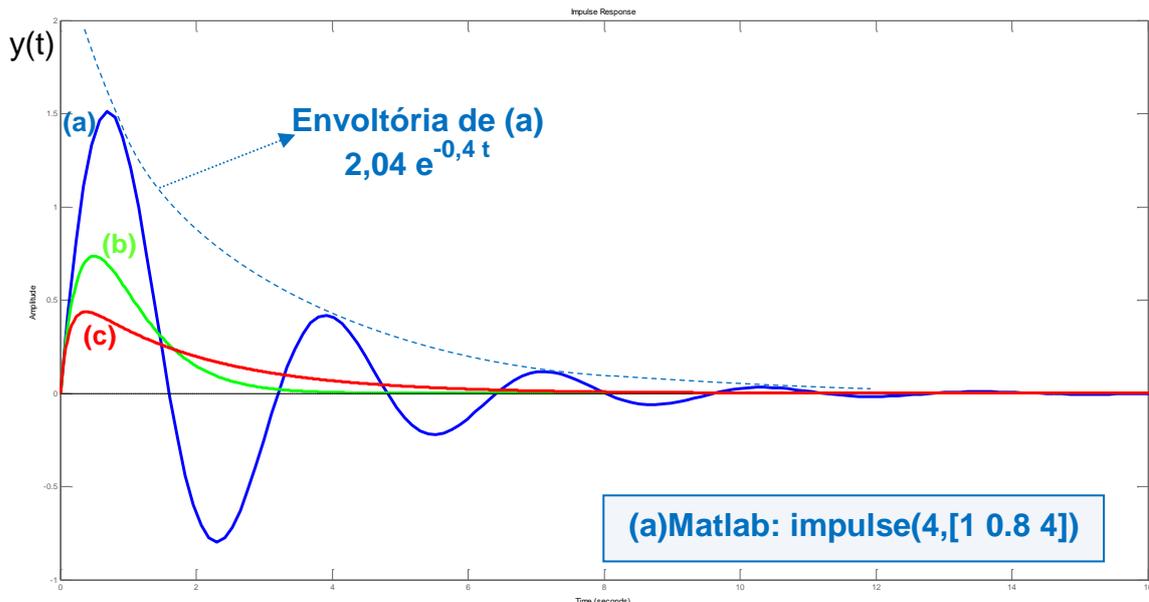
$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = 2,04 e^{-0,4t} \text{ sen } 1,96 t ; \text{ onde: } \omega_n = 2 \text{ rad/s e } \zeta = 0,2$$

b) Sistema criticamente amortecido ($\zeta = 1$): $b = 2\sqrt{kM} \Rightarrow b = 4 \text{ N.s/m}$

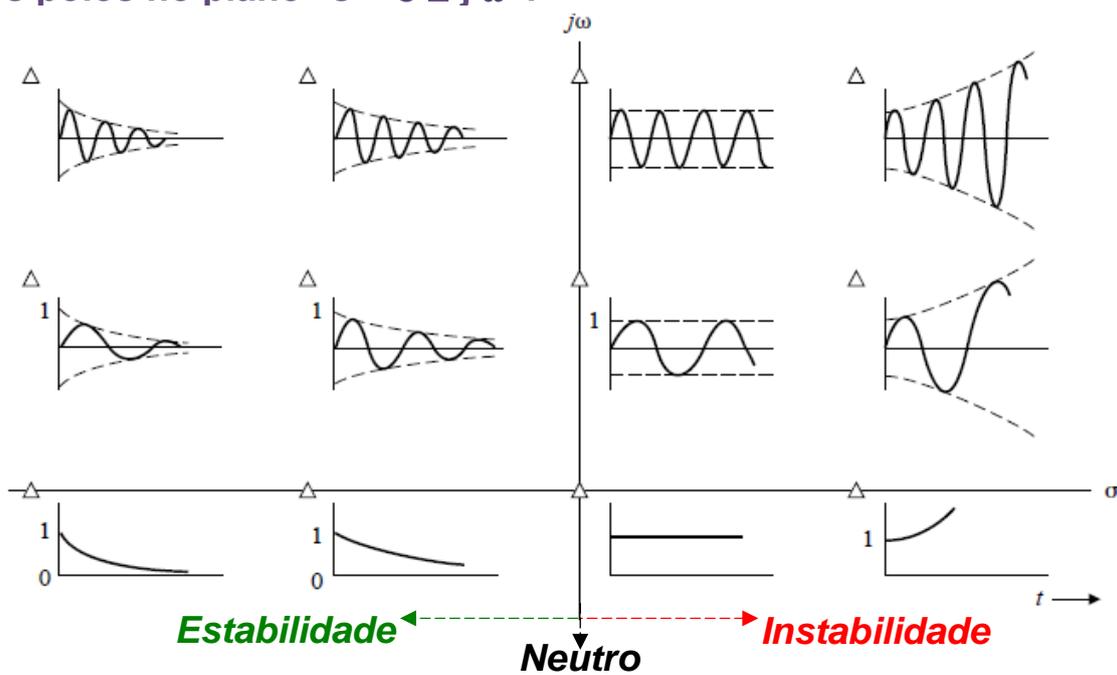
$$Y(s) = \frac{4}{s^2 + 4s + 4} = \frac{4}{(s+2)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = 4t e^{-2t}$$

c) Sistema sobreamortecido ($\zeta > 1$): $b > 2\sqrt{kM} \Rightarrow b = 8 \text{ N.s/m}$ ($\zeta = 2$)

$$Y(s) = \frac{4}{s^2 + 8s + 4} = \frac{4}{(s+0,536)(s+7,464)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = 0,577 (e^{-0,536t} - e^{-7,464t})$$



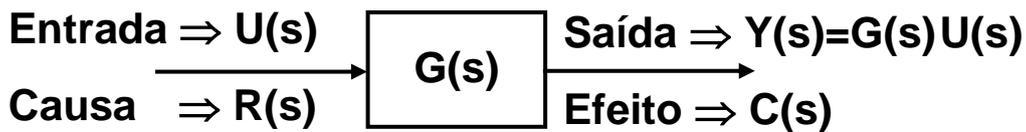
Padrões de resposta ao impulso unitário para algumas localizações dos polos no plano “ $s = \sigma \pm j \omega$ ”:



(Marginalmente Estável)

Figura 5.17 Dorf 11ª Ed.

5 - Modelos em Diagramas de Blocos

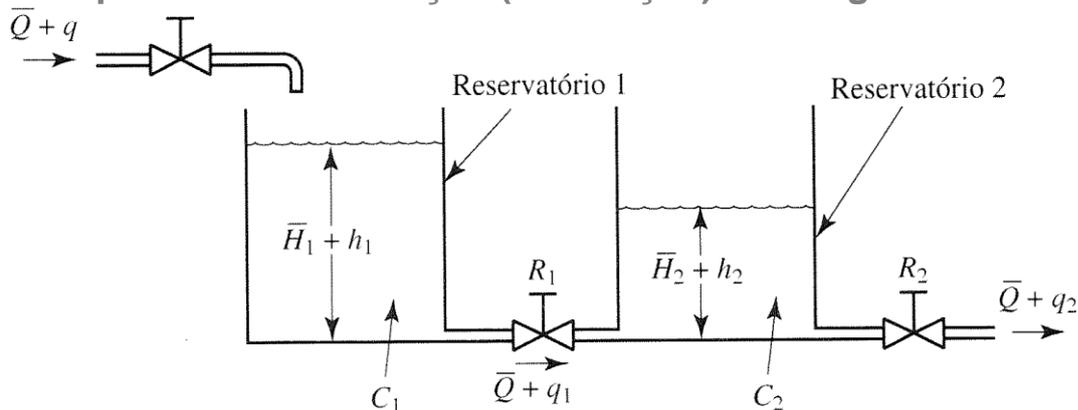


Regras da álgebra de blocos

	Diagramas de Blocos Originais	Diagramas de Blocos Equivalentes
1		
2		
3		
4		
5		

Malha Aberta x Malha Fechada (Realimentação)

Exemplo de Transformação (e Redução) em Diagramas de Blocos:



Sistema de Nível de Líquido com Interação

Onde: $Q(m^3/s)$ e $H(m) \Rightarrow$ vazão e altura em regime estacionário

$$(h_1 - h_2)/R_1 = q_1$$

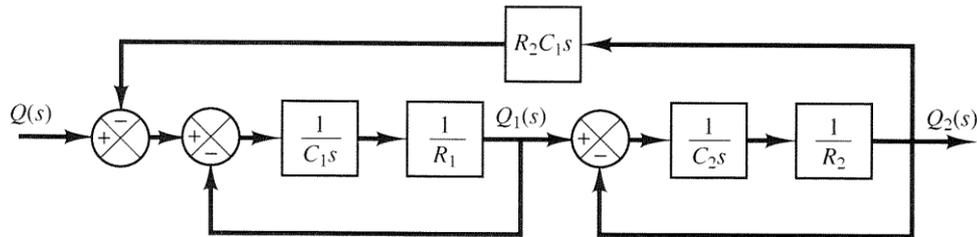
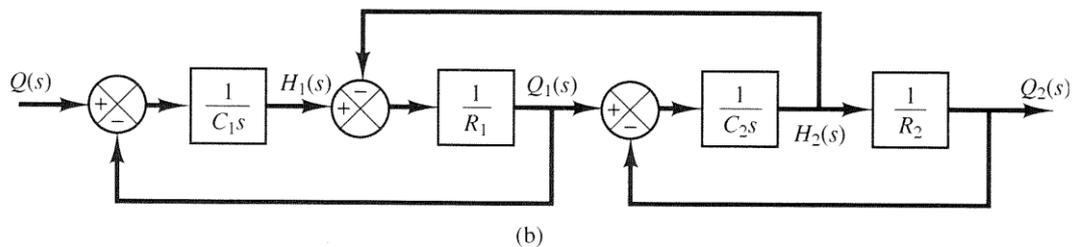
$$C_1(dh_1/dt) = q - q_1$$

$$C = \Delta V / \Delta h \text{ e } R = \Delta h / \Delta q$$

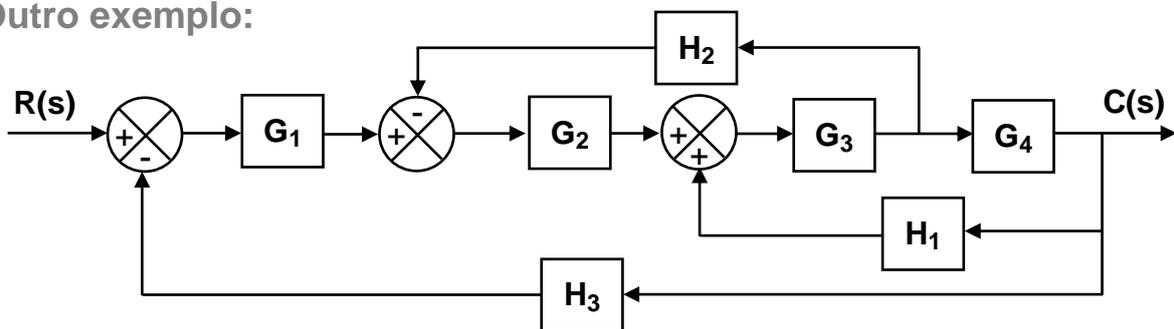
$$h_2/R_2 = q_2$$

$$C_2(dh_2/dt) = q_1 - q_2$$

q e $h \Rightarrow$ pequenas variações

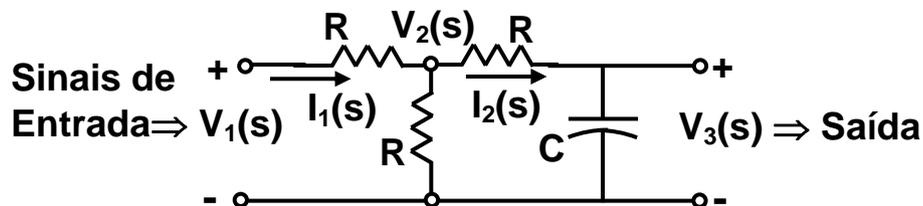


Outro exemplo:



Exemplo do projeto de um filtro “passa-baixas”:

- Projetar um filtro de 1ª ordem para atenuar sinais com frequências maiores que 106,1 Hz e com ganho estático (ou DC) de 1/2.



$$\begin{cases} I_1 = (V_1 - V_2) / R & (1) \\ I_2 = (V_2 - V_3) / R & (2) \\ V_2 = (I_1 - I_2) R & (3) \\ V_3 = (1/Cs) I_2 & (4) \end{cases}$$

Obs.: C ⇒ elemento que armazena energia

Subst. (1) e (2) em (3): $V_2 = (V_1 + V_3) / 3$ (5)

Subst. (2) em (4): $RCV_3s = V_1 - 2V_2$ (6)

Substituindo (5) em (6): $\frac{V_3}{V_1} = \frac{1}{3RCs + 2} = \frac{1/3RC}{s + (2/3RC)}$

Ganho Estático ($s \rightarrow 0$) ⇒ $V_3/V_1 = 1/2$

Atenuar freq. > 106,1 Hz ⇒ $\omega = 2\pi f = 2 \times 3,14 \times 106,1 = 666,65 \text{ rad/s} \Rightarrow$

Polo $s = -(2/3RC) = -666,65 \Rightarrow RC = 0,001$

Escolhendo $R = 1 \text{ k}\Omega$ e $C = 1 \text{ }\mu\text{F} \Rightarrow \frac{V_3}{V_1} = \frac{333,35}{s + 666,7}$

6 - Análise da Resposta Transitória

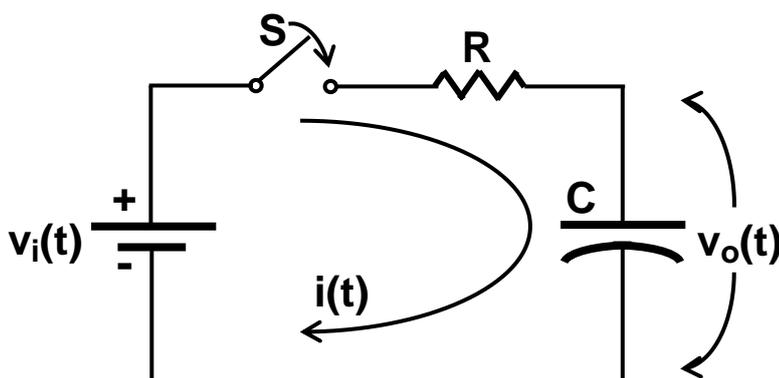
➤ Sinais de Entrada Típicos (para $t \geq 0$):

Entrada	$r(t)$	$R(s)$
Impulso Unitário	$\delta(t)$	1
Degrau (*)	A	A/s
Rampa(*)	At	A/s^2
Parábola (*)	$At^2/2$	A/s^3

(*) $A = 1 \Rightarrow$ unitário(a)

➤ Sistemas de 1ª ordem

Exemplos: Circuito RC (integrador) ou Termômetro

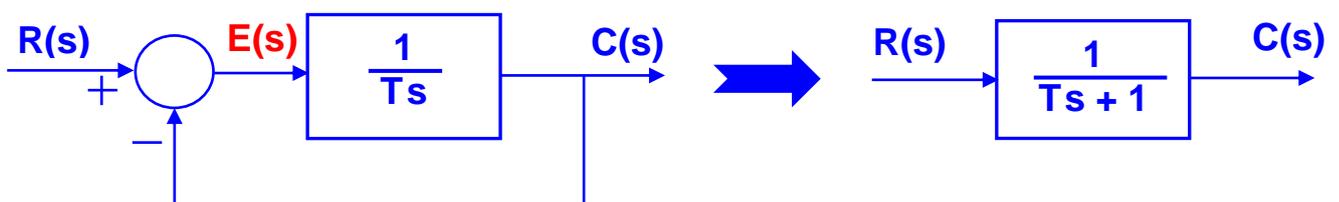


O fechamento da chave S simula a aplicação de um degrau

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{RCs+1}$$

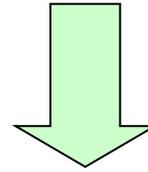
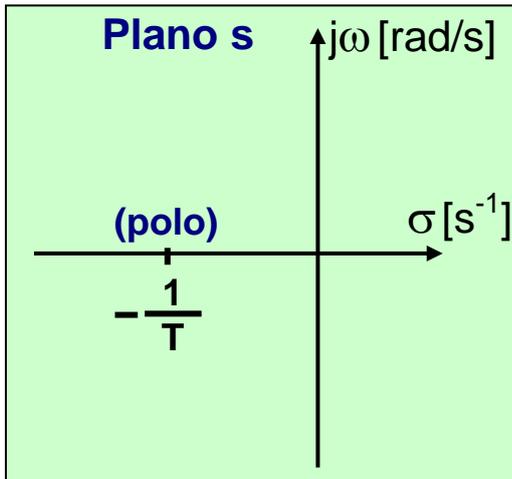
Obs.: CIs Nulas

Generalizando para todos os sistemas de 1ª ordem:



Observação:

$$RC = T \Rightarrow \text{Constante de Tempo}$$

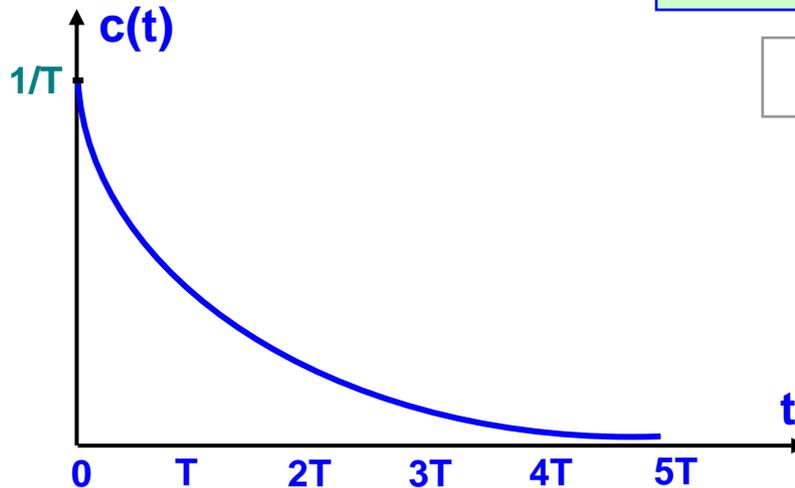


$$\text{Cte. Tempo} = 1 / |\text{Re Polo}|$$

Resposta ao impulso unitário $R(s) = 1 \Rightarrow$

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}$$

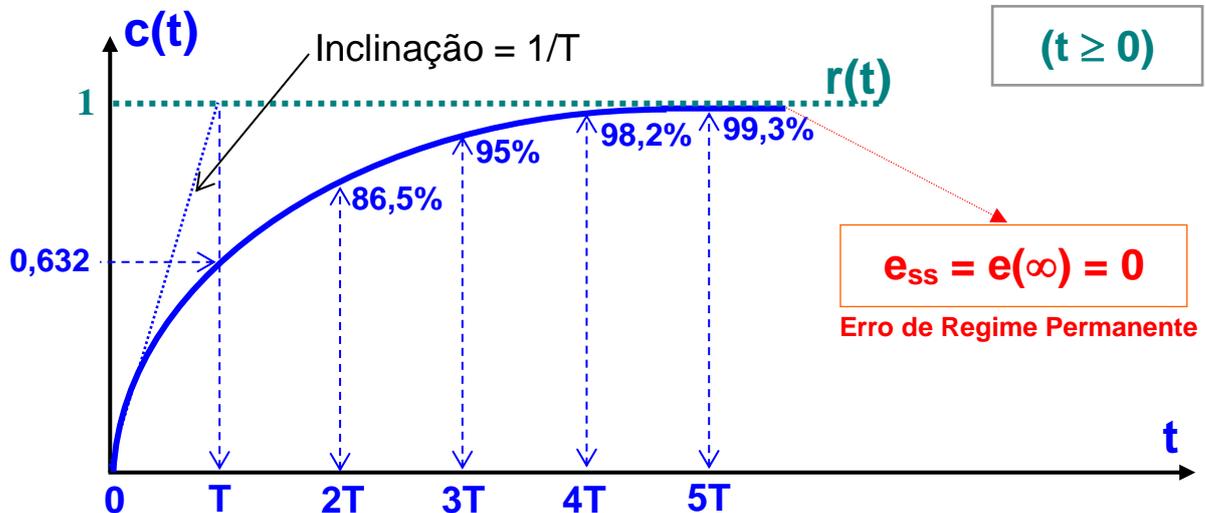
$$(t \geq 0)$$



Resposta a degrau unitário $R(s) = 1/s \Rightarrow$

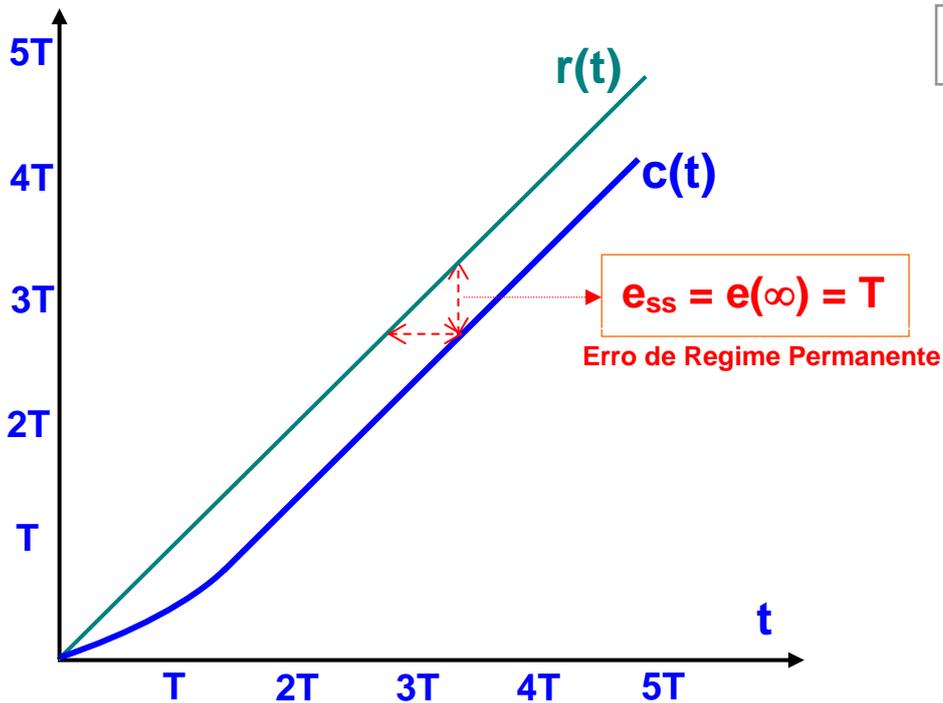
$$c(t) = 1 - e^{-t/T}$$

$$(t \geq 0)$$



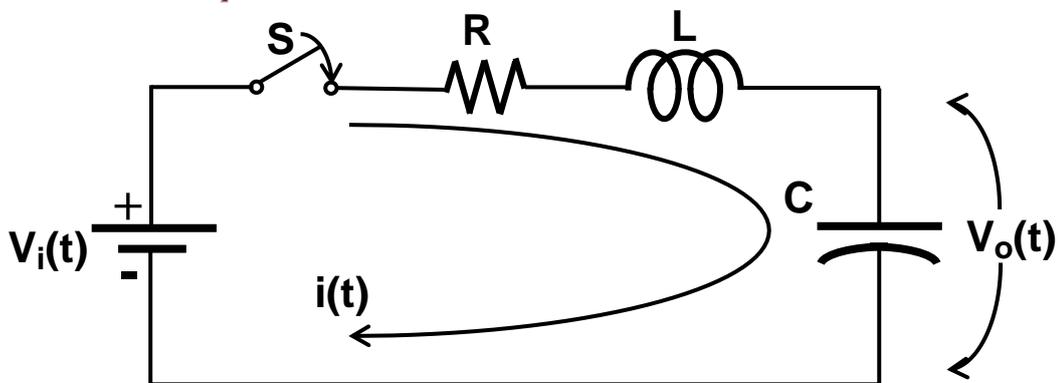
Resposta à rampa unitária $R(s)=1/s^2 \Rightarrow c(t) = t - T + T e^{-t/T}$

$(t \geq 0)$



➤ Sistemas de 2ª ordem

Exemplos: Circuito RLC ou Massa-Mola-Amortecedor



$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1/LC}{s^2 + (R/L)s + (1/LC)}$$

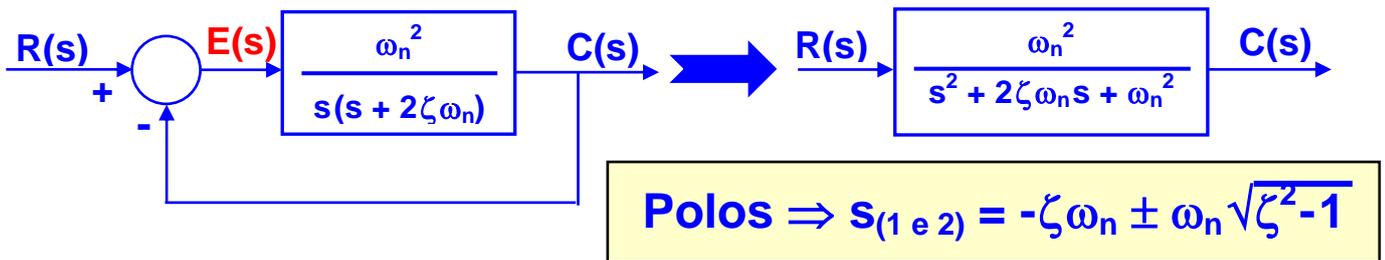
Polos $\Rightarrow s_{(1 e 2)} = - (R/2L) \pm \sqrt{(R^2/4L^2) - (1/LC)}$

Se $R=0 \Rightarrow s_{(1 e 2)} = \pm j1/\sqrt{LC} = \pm j \omega_n \Rightarrow$ freq. natural de oscilação

Se $R > 0$:

$\zeta = (R/2L) / (1/\sqrt{LC}) \Rightarrow$ coeficiente de amortecimento

Generalizando para todos os sistemas de 2ª ordem:



Para um sistema com $0 < \zeta < 1$ (subamortecido):

$$s_{(1 e 2)} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma \pm j\omega_d$$

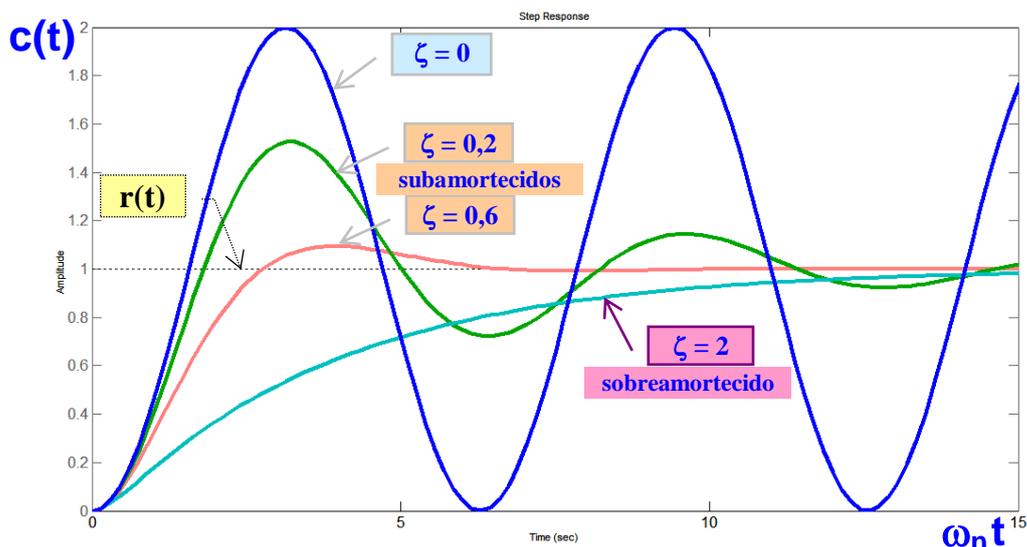
onde: $\sigma = \zeta\omega_n = T^{-1} \Rightarrow$ atenuação e
 $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \Rightarrow$ frequência natural amortecida

Resposta a degrau unitário $R(s) = 1/s$ para $0 < \zeta < 1$: $(t \geq 0)$

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen}\omega_d t \right)$$

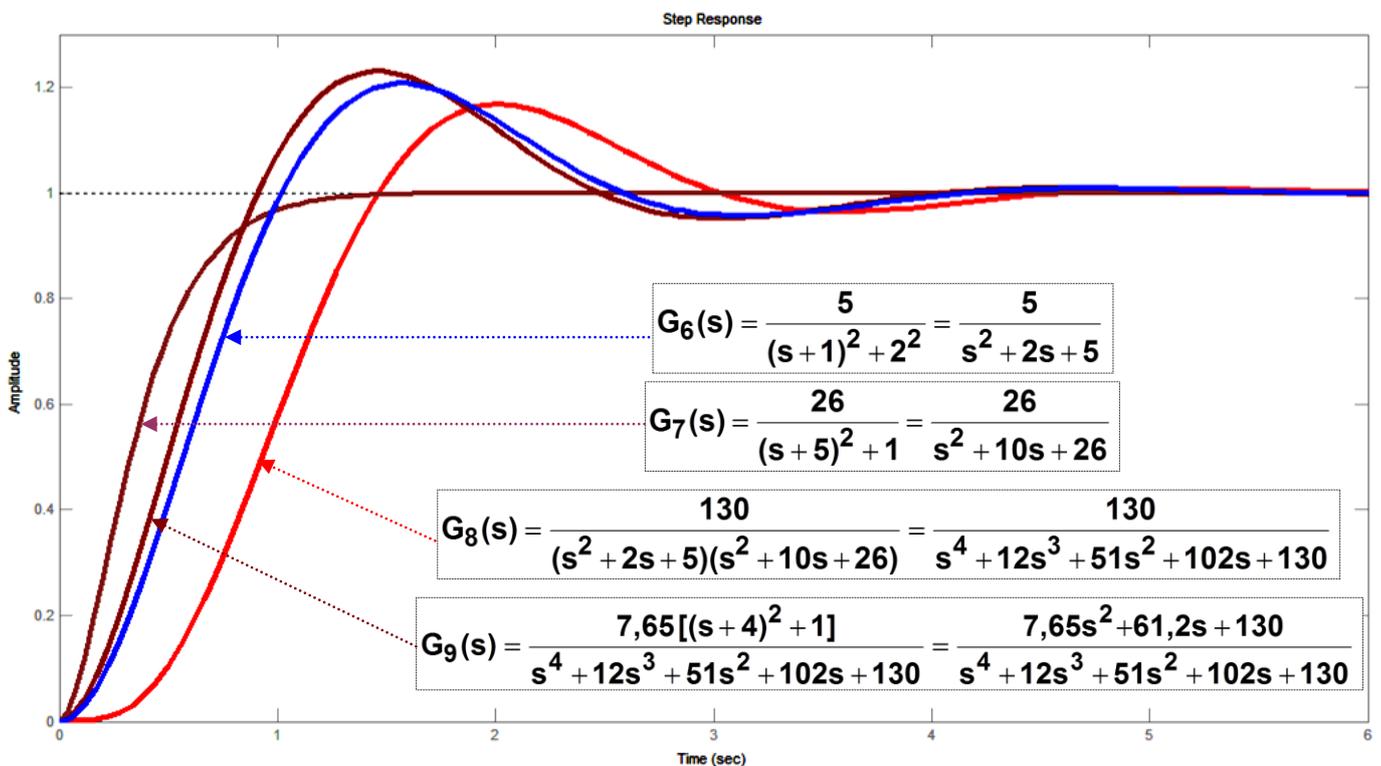
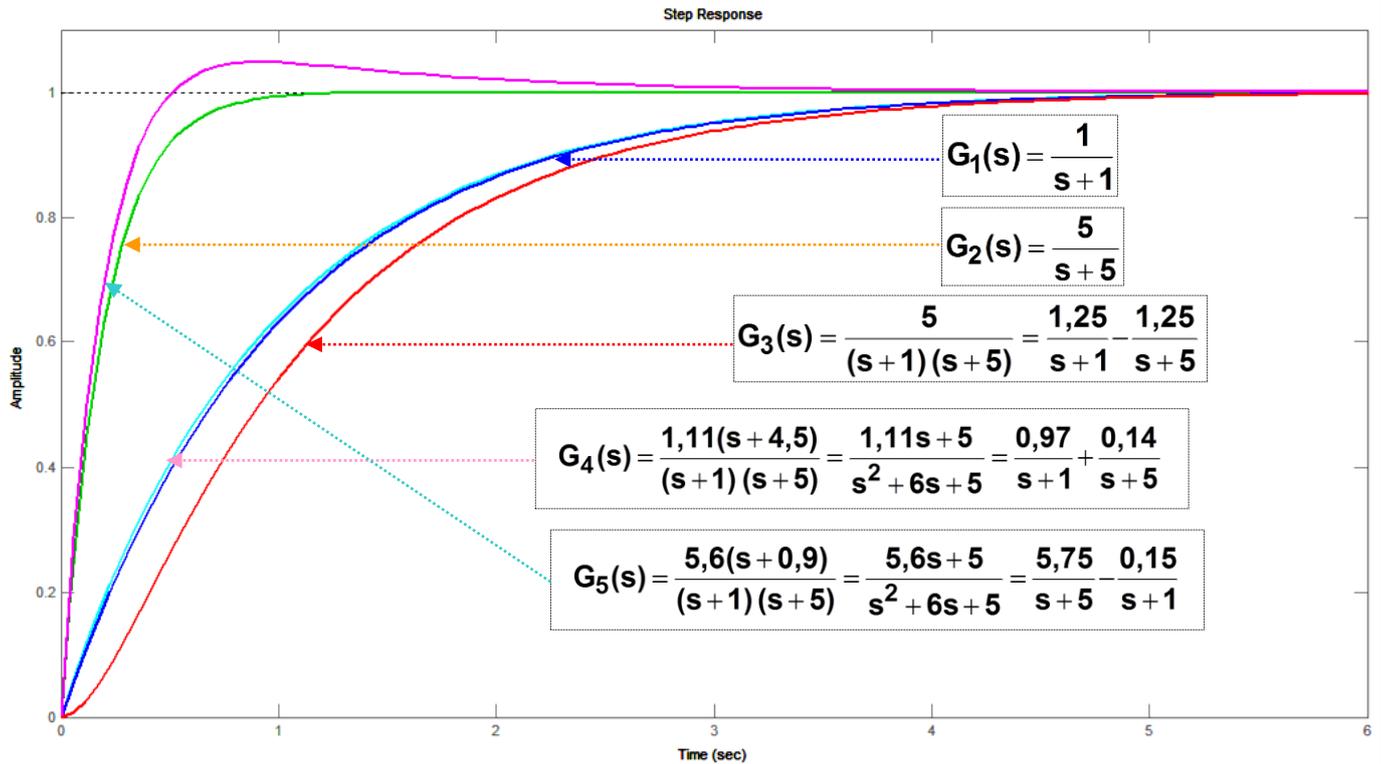
ou

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen} \left(\omega_d t + \text{tag}^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right)$$



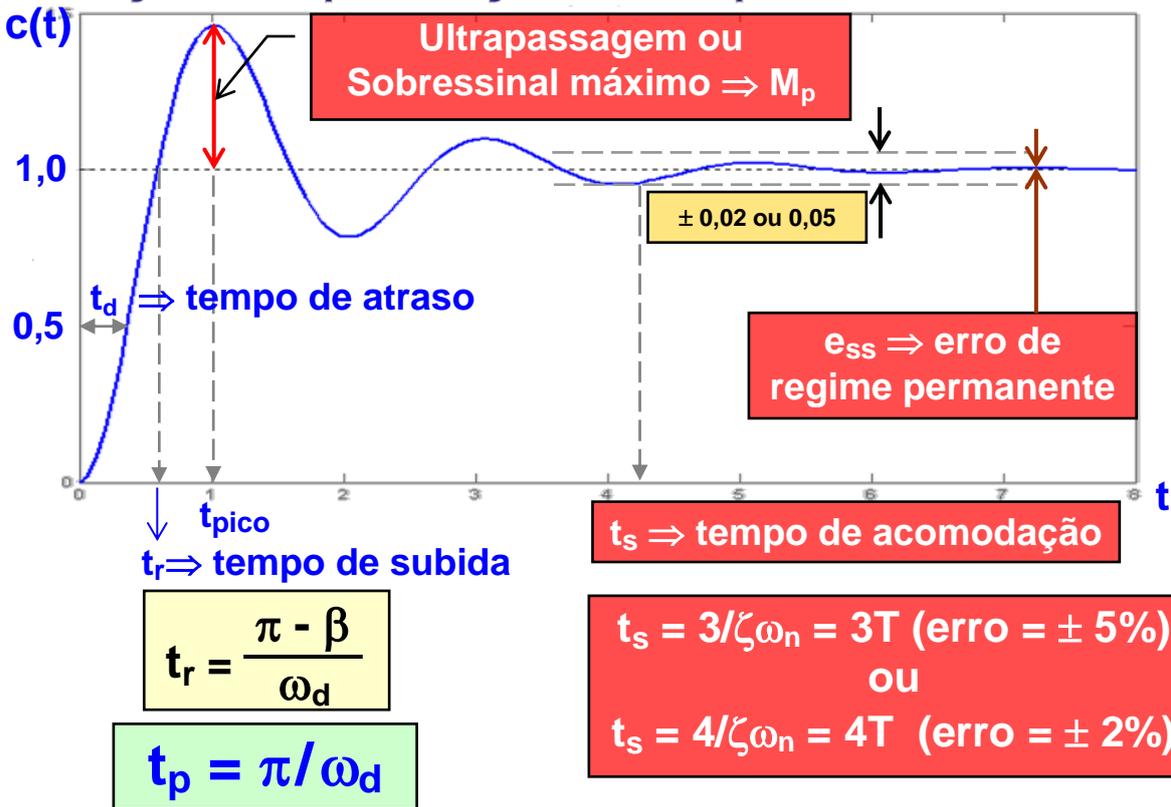
➤ Importância dos Polos (Dominantes) e dos Zeros (Resíduos)

Respostas $c(t)$ a degrau unitário [$R(s)=1/s$] na entrada de $G_i(s)$:



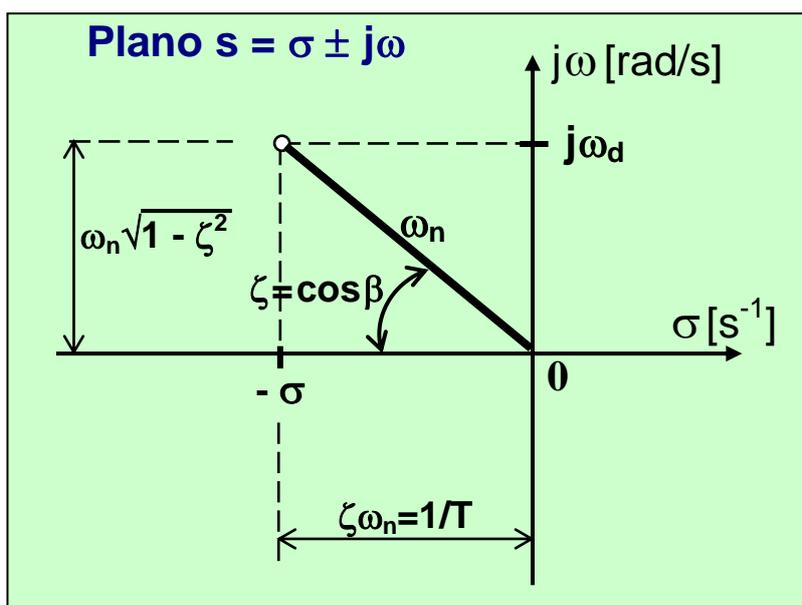
Obs.: Todas as $G_i(s)$ têm Ganho Estático ou DC (CC) = 1

Definições e Especificações da Resposta Transitória



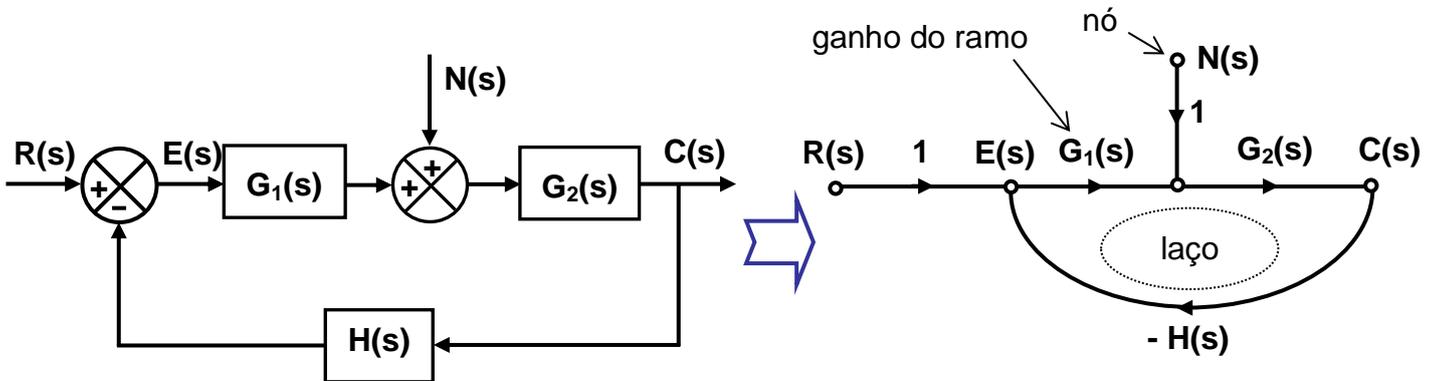
$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100[\%] \Rightarrow M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100[\%]$$

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)}$$



7 - Diagramas (Gráficos) de Fluxo de Sinal

- Melhor que Diagrama de Blocos para sistemas mais complexos
- Possui uma Fórmula de Ganho de Mason



Percurso ou Caminho (P) \Rightarrow um ramo ou uma seqüência contínua de ramos entre dois sinais (nós)

Laços (L) Disjuntos \Rightarrow não possui(m) nó(s) comum(ns)

A dependência linear T_{ij} entre a variável independente x_i (entrada) e uma variável de saída x_j (saída) é dada pela fórmula de Mason:

$$\mathbf{T}_{ij} = \frac{\sum_k \mathbf{P}_{ijk} \Delta_{ijk}}{\Delta}, \text{ onde:}$$

\mathbf{P}_{ijk} = k -ésimo percurso ou caminho entre a variável x_i e a variável x_j

Δ_{ijk} = cofator do percurso \mathbf{P}_{ijk}

Δ = determinante do diagrama

$$\Delta = 1 - \sum_a L_a + \sum_{b,c} L_b L_c - \sum_{d,e,f} L_d L_e L_f + \dots$$

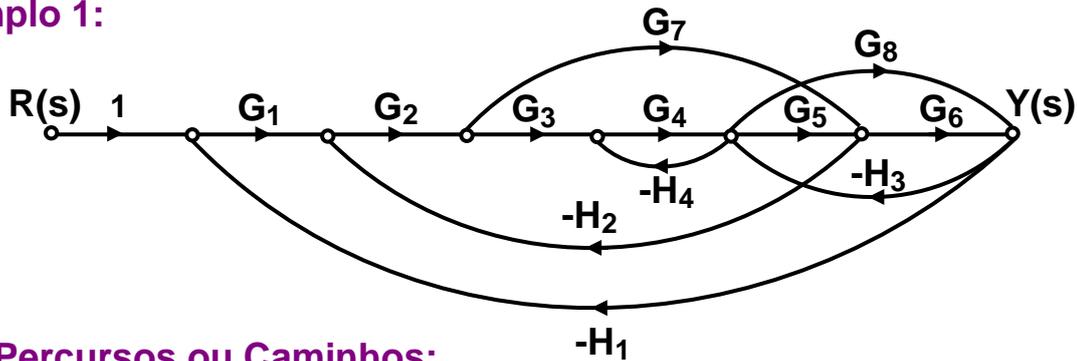
$\sum_a L_a$ = soma de todos os ganhos de laços diferentes

$\sum_{b,c} L_b L_c$ = soma dos produtos de ganhos de todas as combinações possíveis de laços disjuntos 2 a 2

$\sum_{d,e,f} L_d L_e L_f$ = soma dos produtos de ganhos de todas as combinações possíveis de laços disjuntos 3 a 3 etc

Δ_k = é o determinante do k -ésimo percurso, removendo-se todos os laços que tocam este percurso (ou caminho)

Exemplo 1:



3 Percursos ou Caminhos:

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6$$

$$P_2 = G_1 G_2 G_7 G_6$$

$$P_3 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_8$$

8 Laços:

$$L_1 = - G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6 H_1$$

$$L_3 = - G_5 G_6 H_3$$

$$L_5 = - G_2 G_7 H_2 \quad (1)(2)$$

$$L_7 = - G_1 G_2 G_7 G_6 H_1 \quad (1)$$

$$L_2 = - G_2 G_3 G_4 G_5 H_2$$

$$L_4 = - G_4 H_4 \quad (1)$$

$$L_6 = - G_8 H_3 \quad (2)$$

$$L_8 = - G_1 G_2 G_3 G_4 G_8 H_1$$

Laços disjuntos: (1) L_4 não toca L_5 e L_7 (2) L_5 não toca L_6

Determinante:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7 + L_8) + (L_4 L_5 + L_4 L_7 + L_5 L_6)$$

Cofatores:

$$\Delta_1 = \Delta_3 = 1$$

$$\Delta_2 = 1 - L_4 = 1 + G_4 H_4$$

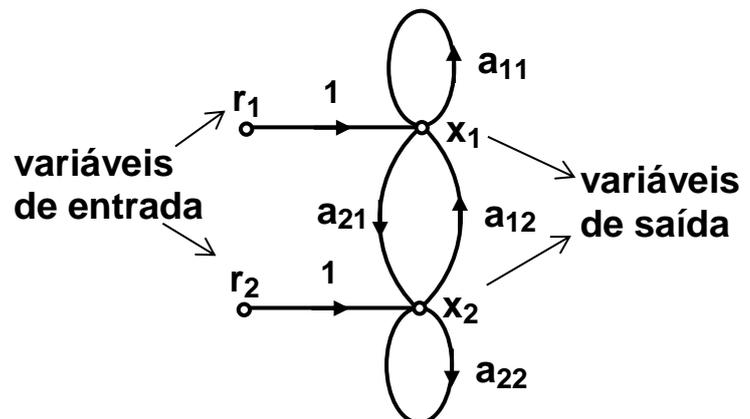
Função de Transferência T(s):

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{P_1 + P_2 \Delta_2 + P_3}{\Delta}$$

Exemplo 2:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + r_1 = x_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + r_2 = x_2$$



4 Percursos:

$$P_1 = 1 \quad (r_1 \rightarrow x_1)$$

$$P_2 = a_{21} \quad (r_1 \rightarrow x_2)$$

$$P_3 = 1 \quad (r_2 \rightarrow x_2)$$

$$P_4 = a_{12} \quad (r_2 \rightarrow x_1)$$

3 Laços:

$$\left. \begin{matrix} L_1 = a_{11} \\ L_2 = a_{22} \end{matrix} \right\} \text{laços que não se tocam}$$

$$L_3 = a_{12} a_{21} \text{ (toca os outros dois laços)}$$

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + (L_1 L_2) = 1 - a_{11} - a_{22} - a_{12} a_{21} + a_{11} a_{22}$$

Para a variável de saída x_1 : $P_1 \times \Delta_1 = 1 \times (1 - a_{22}) = 1 - a_{22}$
 $P_4 \times \Delta_4 = a_{12} \times 1 = a_{12}$, logo:

$$x_1 = \frac{1 - a_{22}}{\Delta} r_1 + \frac{a_{12}}{\Delta} r_2$$

Como a variável de saída x_2 é simétrica a x_1 , temos:

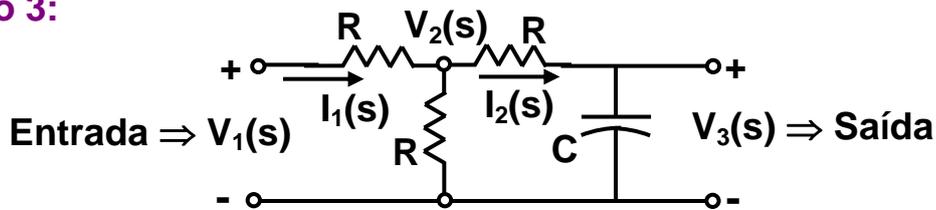
$$x_2 = \frac{1 - a_{11}}{\Delta} r_2 + \frac{a_{21}}{\Delta} r_1$$

Ou usando a regra de Cramer, temos:

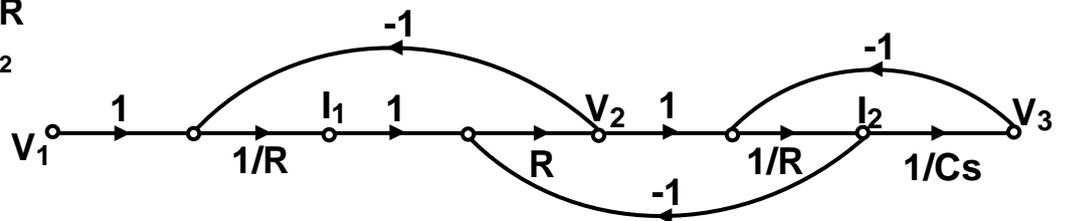
$$x_1 = \frac{(1 - a_{22}) r_1 + a_{12} r_2}{(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12} a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{(1 - a_{11}) r_2 + a_{21} r_1}{(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12} a_{21}}$$

Exemplo 3:



$$\begin{cases} I_1 = (V_1 - V_2) / R \\ I_2 = (V_2 - V_3) / R \\ V_2 = (I_1 - I_2) R \\ V_3 = (1/Cs) I_2 \end{cases}$$



1 Percurso:

$$P_1 = 1/(RCs)$$

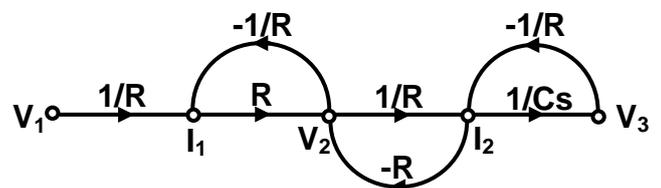
3 Laços (todos os laços tocam P1 e L1 e L3 não se tocam):

$$L_1 = -1 \quad L_2 = -1 \quad L_3 = -1/(RCs)$$

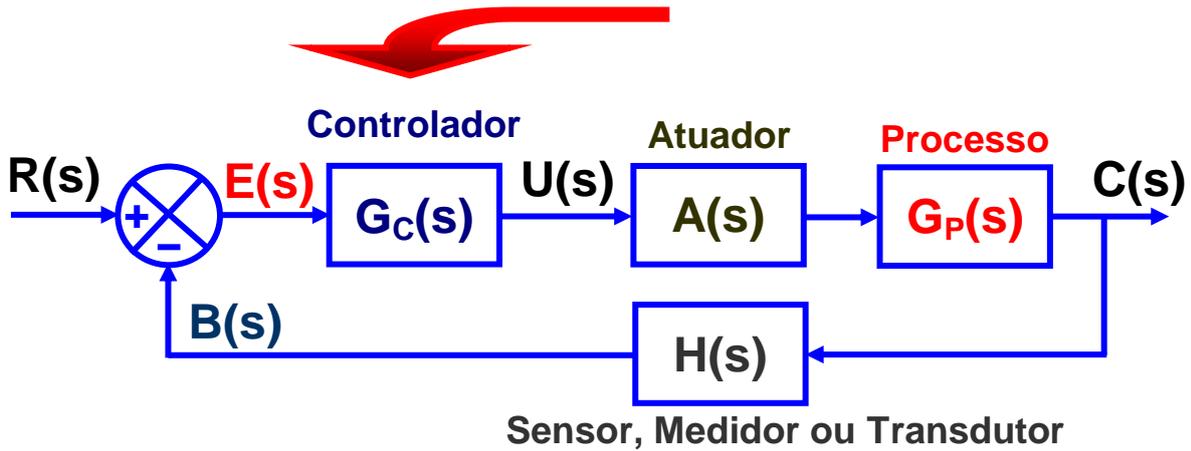
$$T(s) = \frac{V_3(s)}{V_1(s)} = \frac{P_1}{1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1 L_3}$$

$$T(s) = \frac{V_3(s)}{V_1(s)} = \frac{1/(RCs)}{3 + (2/RCs)}$$

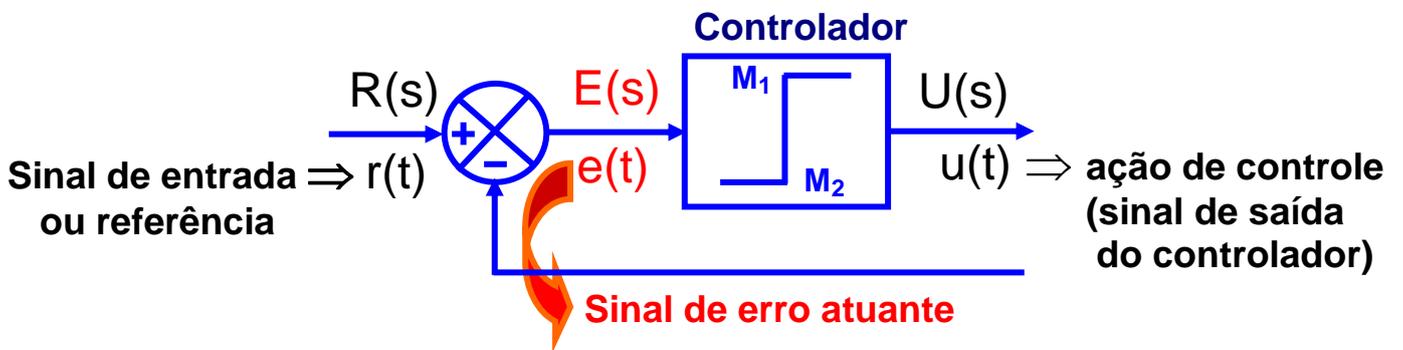
$$\frac{V_3}{V_1} = \frac{1}{3RCs + 2} = \frac{1/3RC}{s + (2/3RC)}$$



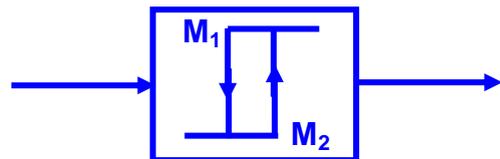
8 - Ações Básicas de Controle



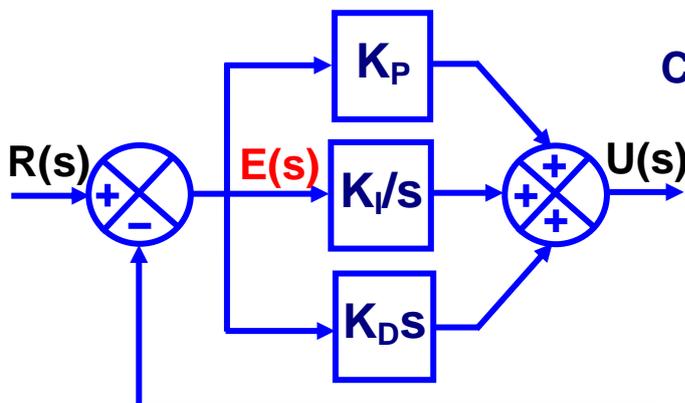
➤ Controlador de 2 Posições ou liga-desliga (on-off)



$$\left. \begin{aligned} u(t) &= M_1 \text{ para } e(t) > 0 \\ &\text{ou} \\ u(t) &= M_2 \text{ para } e(t) < 0 \end{aligned} \right\} \text{Para } e(t) \approx 0 \Rightarrow \text{Histerese ou intervalo diferencial ou banda morta}$$



➤ Controlador Proporcional+Integral+Derivativo (PID)



Controlador: $K_P + (K_I/s) + K_D s$

$$\text{ou}$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}$$

(*) Não-causal

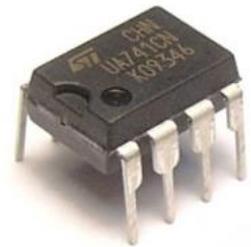
(*) Não-causal \Rightarrow diferenciador $\cong K_D s / (Ts+1)$, onde $T \ll K_D$

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}$$

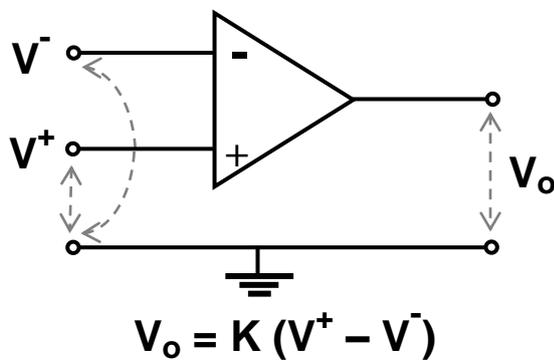
Efeitos na resposta	Tempo de Subida	Ultrapassagem ou sobressinal	Tempo de Acomodação	Erro de reg.perm.
$K_P \uparrow$	diminui	aumenta	pequena variação	diminui
$K_I \uparrow$	diminui	aumenta	aumenta	elimina
$K_D \uparrow$	pequena variação	diminui	diminui	pouco efeito

Obs.: Esta tabela serve apenas como referência uma vez que a variação em um dos ganhos muda o efeito dos demais.
 O Controlador P possui um e_{ss} (erro residual ou "offset"), para entrada em degrau, se o sistema não possui pelo menos um integrador.

Exemplo de Aplicação:



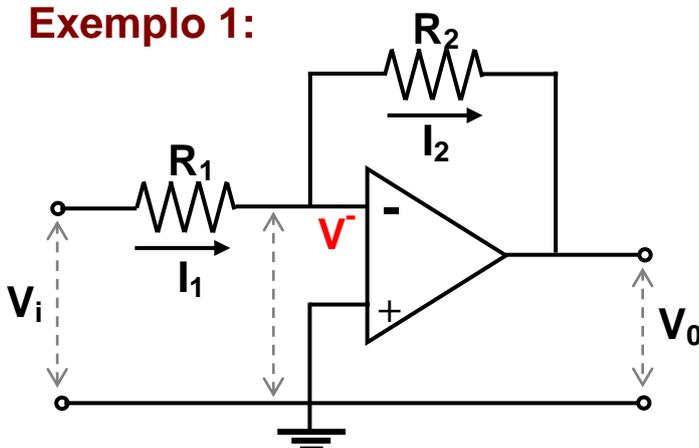
➤ Amplificador Operacional (AO)



Características:

- ✓ $K \cong 10^5$ a 10^6 de CC até 10 kHz
(Para $f > 1$ MHz $\Rightarrow K \cong 1$)
- ✓ $Z_{in} \gg 0$ ($Z_{in} \rightarrow \infty$) e $Z_{out} \cong 0$

Exemplo 1:



$$\begin{cases} I_1 = (V_i - V^-) / R_1 \\ I_2 = (V^- - V_0) / R_2 \end{cases} \Rightarrow$$

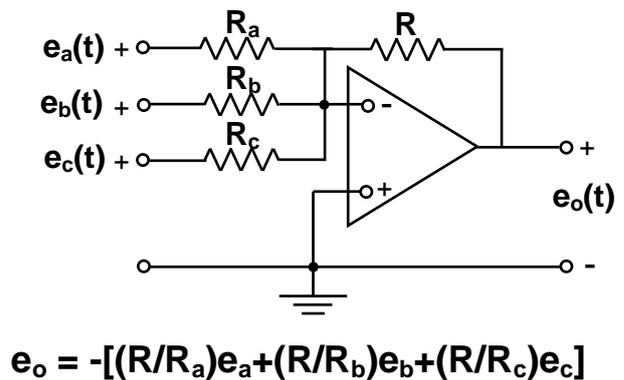
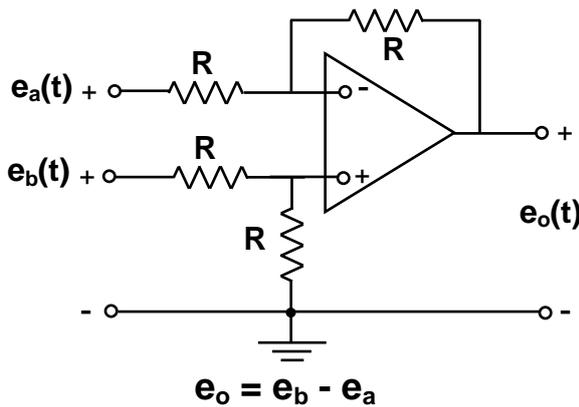
$$\frac{V_i - V^-}{R_1} = \frac{V^- - V_0}{R_2}$$

Como $K(0 - V^-) = V_0$ e $K \gg 1 \Rightarrow V^- = 0$, logo:

$$\frac{V_i}{R_1} = -\frac{V_0}{R_2} \Rightarrow \frac{V_0}{V_i} = -\frac{R_2}{R_1} \xrightarrow{\text{Generalizando}} \boxed{\frac{V_0}{V_i} = -\frac{Z_2}{Z_1}}$$

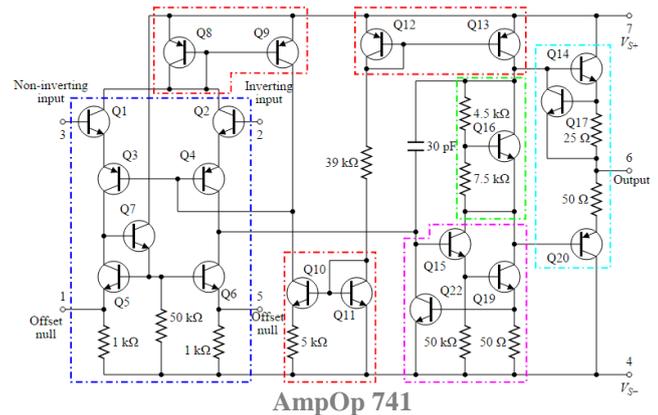
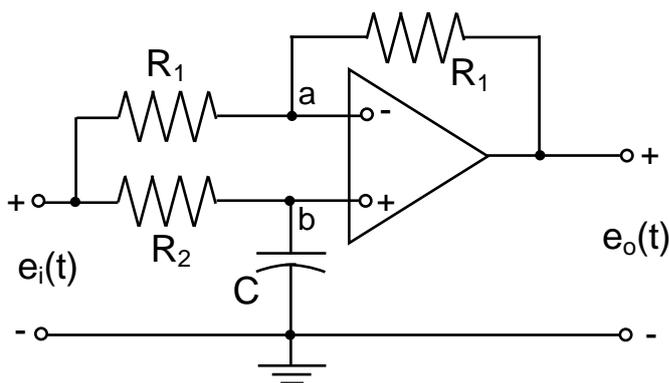
Controlador tipo P
(inversor)

Exemplo 2 (somador e multiplicador):



Exemplo 3 (PP2.4 do Dorf 11ª Edição):

Determine a função de transferência $E_o(s) / E_i(s)$, admitindo o AO como sendo ideal, e obtenha $e_o(t)$ quando a entrada $e_i(t) = At$, para $t \geq 0$.

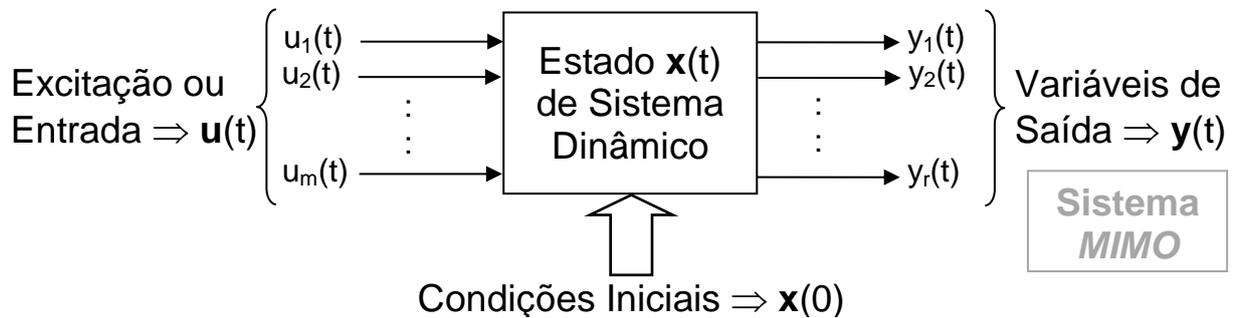


Vide Anexos: Circuitos com Amplificadores Operacionais

9 - Espaço de Estados: Equações de Estado e de Saída

Teoria de Controle Moderno × Controle Clássico (*)

(*) Representação única, externa, $Cl=0$, monovariável (SISO) e $F(s)$



$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \Rightarrow$ **Vetor de Estado** $\mathbf{x}(t)_{n \times 1}$ - Menor conjunto de **variáveis de estado** tal que o conhecimento destas variáveis, em $t = t_0$, e da entrada $\mathbf{u}(t)_{m \times 1}$ ($t \geq t_0$) determina completamente o comportamento do sistema para qualquer instante $t \geq t_0$.
 Obs.: $\mathbf{x}(t)$ podem ser não mensuráveis e não observáveis, mas isto não é conveniente. Melhor usar $\mathbf{x}(t)$ com significado físico.

Nº de variáveis de estado = Nº de integradores (dispositivos de memória)

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m; t) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m; t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m; t) \end{array} \right\} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \Rightarrow \text{Equações de Estado (1)}$$

As saídas $y_1(t)$, $y_2(t)$, ..., $y_r(t)$ ($\mathbf{y}(t)_{r \times 1}$) podem ser dadas por:

$$\left. \begin{array}{l} y_1(t) = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m; t) \\ y_2(t) = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m; t) \\ \vdots \\ y_r(t) = g_r(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m; t) \end{array} \right\} \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \Rightarrow \text{Equações de Saída (2)}$$

Linearizando as equações (1) e (2) em torno do estado de operação:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t) \mathbf{u}(t) \end{array} \right. , \text{ onde:}$$

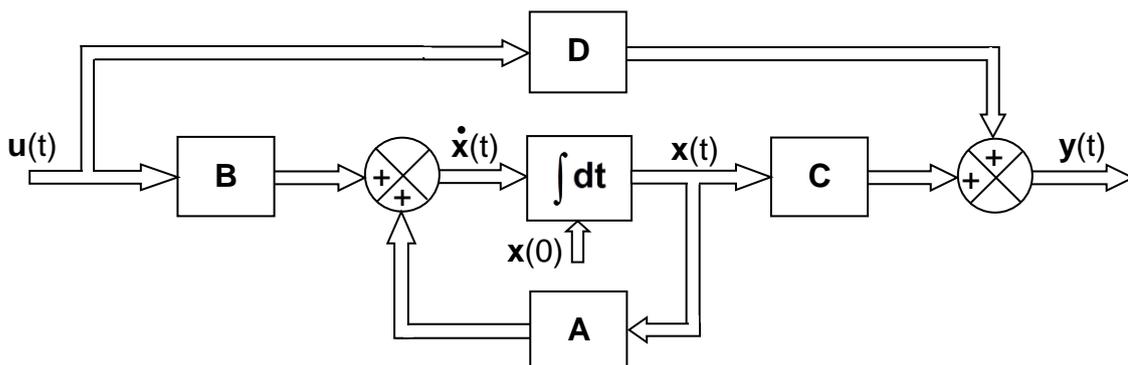
$\mathbf{A}(t) \Rightarrow$ matriz de estado ($n \times n$); $\mathbf{B}(t) \Rightarrow$ matriz de entrada ($n \times m$);

$\mathbf{C}(t) \Rightarrow$ matriz de saída ($r \times n$); $\mathbf{D}(t) \Rightarrow$ matriz de transmissão direta ($r \times m$).

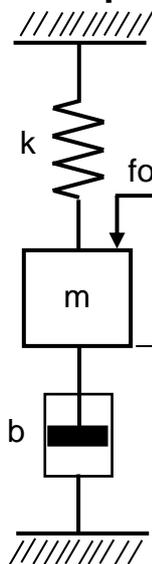
Se as funções vetoriais \mathbf{f} e \mathbf{g} não envolverem t explicitamente (sistema invariante no tempo), então se pode escrever as equações de estado e saída da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \end{cases}$$

Diagrama de Blocos de sistema de controle linear e contínuo no tempo representado em espaço de estados:



Exemplo Massa-Mola-Amortecedor(atrito):



$$m \ddot{y} + b \dot{y} + k y = u \Rightarrow \text{sistema de } 2^{\text{a}} \text{ ordem} \Rightarrow 2 \text{ integradores}$$

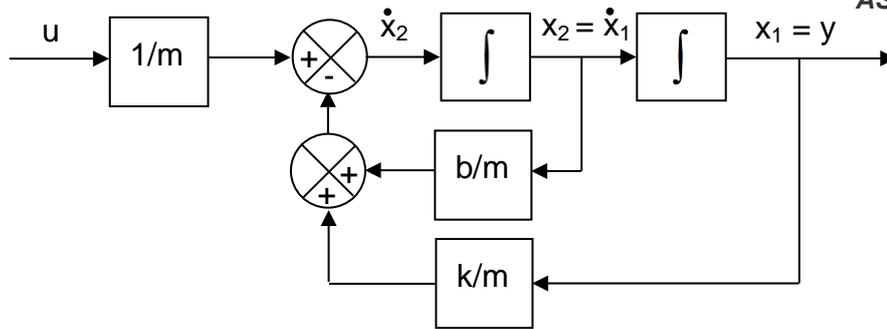
$$\Rightarrow 2 \text{ variáveis de estado} \begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dot{y}(t) \end{cases}$$

Daí, temos:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = - (k/m) x_1 - (b/m) x_2 + (1/m) u \\ e \quad y = x_1 \end{cases}$$

Sob a forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u \quad e \quad y = \underbrace{[1 \quad 0]}_{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = 0$$



➤ **Correlação entre Funções de Transferência (FT) e Equações de Espaço de Estados (EE) – exemplo para um sistema monovariável:**

$$FT \Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) \quad e \quad EE \Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u(t) \\ y(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} u(t) \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}$$

$$s \mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A} \mathbf{X}(s) + \mathbf{B} U(s) \\ Y(s) = \mathbf{C} \mathbf{X}(s) + \mathbf{D} U(s) \quad \text{supondo } \mathbf{C}\mathbf{I}s = 0 \Rightarrow$$

$$s \mathbf{X}(s) - \mathbf{A} \mathbf{X}(s) = \mathbf{B} U(s) \Rightarrow (s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{X}(s) = \mathbf{B} U(s) \Rightarrow \text{pré-mult. por } (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} U(s), \text{ subst. em } Y(s) \Rightarrow Y(s) = [\mathbf{C} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}] U(s)$$

$$\text{Comparando com a FT} \Rightarrow G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} = \frac{\mathbf{C} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B} + \mathbf{D} \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}$$

Do exemplo anterior:

$$G(s) = [1 \quad 0] \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} + 0 \Rightarrow$$

$$G(s) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s & -1 \\ k/m & s + (b/m) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} = [1 \quad 0] \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + (b/m) & 1 \\ -k/m & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k} \Rightarrow \text{Generalizando: } G(s) = \frac{Q(s)}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} \Rightarrow \begin{matrix} \Rightarrow \text{polinômio em } s \\ \Rightarrow \text{polinômio característico} \end{matrix}$$

polos \Leftrightarrow autovalores (λ)

Obs.: Para um sistema com múltiplas entradas e saídas:

$$\mathbf{Y}(s) / \mathbf{U}(s) = \mathbf{G}(s) \Rightarrow \text{Matriz de Transferência } (r \times m)$$

Matlab: `[A,B,C,D]=tf2ss(num,den)` \Leftrightarrow `[num,den]=ss2tf(A,B,C,D,ui)`
 $u_i = n^{\circ}$ da entrada quando $u_i > 1$

10 - Representação de Sistemas Dinâmicos por Espaço de Estados

Um sistema dinâmico formado por um número finito de elementos concentrados pode ser descrito por equações diferenciais ordinárias em que o tempo (t) é a variável independente.

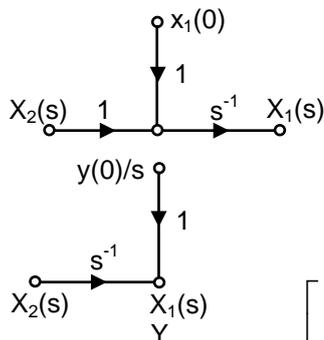
Equação Diferencial de ordem $n \Rightarrow n$ Equações Diferenciais de 1ª ordem (representação Matricial)

➤ **Equação Diferencial Linear com excitação $u(t)$ não envolvendo termos em derivadas**

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_n u \quad (1)$$

Conhecendo $y(0); \dot{y}(0); \ddot{y}(0); \dots; y^{(n-1)}(0)$ e a entrada $u(t)$, pode-se determinar completamente o comportamento futuro ($t \geq 0$) da saída $y(t)$ do sistema.

Definindo $x_1 = y$; $x_2 = \dot{y}$; $x_3 = \ddot{y}$; ... ; $x_n = y^{(n-1)}$, pode-se reescrever a equação (1), como:



$$\dot{x}_1 = x_2 ; \quad \dot{x}_2 = x_3 ; \quad \dot{x}_3 = x_4 ; \quad \dots ;$$

$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - a_{n-2} x_3 - \dots - a_1 x_n + b_n u \quad \text{ou}$$

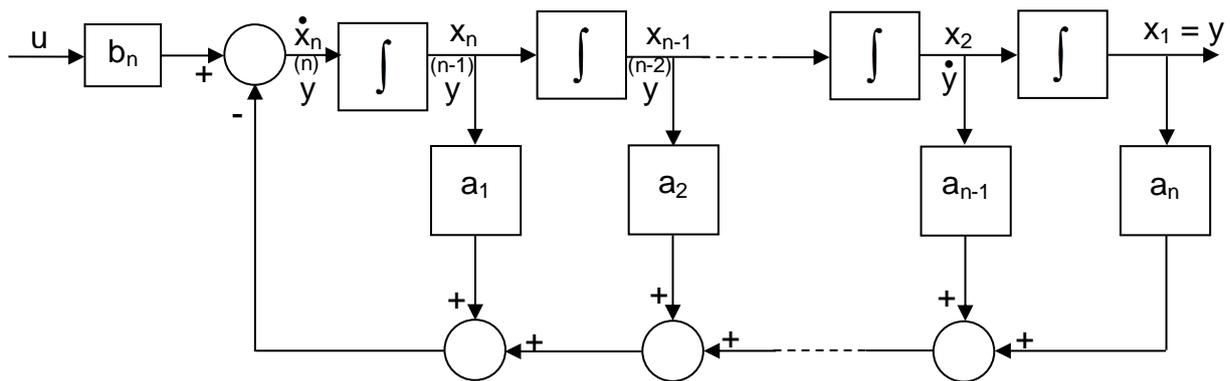
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u \quad \text{ou}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b_n \end{bmatrix} u$$

Logo, a equação da variável de saída pode ser escrita:

$$y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad y = \mathbf{C} \mathbf{x} \quad \text{e} \quad \mathbf{D} = 0$$

Diagrama de Blocos das Equações de Estado e Saída:



Obs.: Chamada de representação por variáveis de fase

• **Exemplo**

Obter uma representação no EE do sistema definido por $\ddot{y} + 6\dot{y} + 11y = 6u$

Definindo $x_1 = y$; $x_2 = \dot{y}$ e $x_3 = \ddot{y}$ \Rightarrow

$$\dot{x}_1 = x_2$$

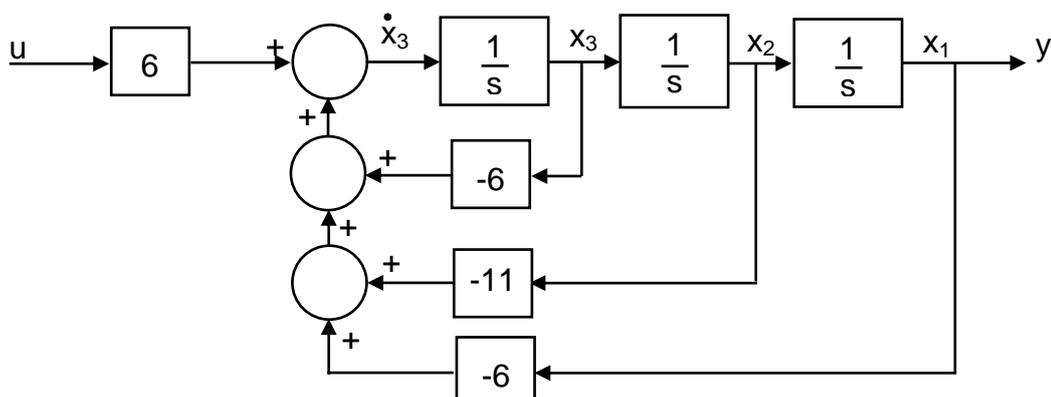
$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 6u$$

ou na notação matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}}_B u$$

$$y = \underbrace{[1 \ 0 \ 0]}_C \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{[0]}_D u$$



- ✓ Autovalores λ da Matriz $A_{n \times n}$ são as raízes da equação (ou polinômio) característica: $|\lambda I - A| = 0$ [$\det(\lambda I - A) = 0$] \Rightarrow

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda+6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$$

Autovalores λ de $A \Rightarrow -1, -2$ e -3

Obs.: Matlab \Rightarrow eig(A)

- ✓ Esta representação ou realização em EE não é única. Vejamos outra forma a partir da expansão em frações parciais da FT:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)} \Rightarrow$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{r_1}{s+1} + \frac{r_2}{s+2} + \frac{r_3}{s+3} \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{3}{s+1} U(s) + \frac{-6}{s+2} U(s) + \frac{3}{s+3} U(s)$$

Definindo: $X_1(s) = \frac{3}{s+1} U(s) \Rightarrow sX_1(s) + X_1(s) = 3U(s)$

$$X_2(s) = \frac{-6}{s+2} U(s) \Rightarrow sX_2(s) + 2X_2(s) = -6U(s)$$

$$X_3(s) = \frac{3}{s+3} U(s) \Rightarrow sX_3(s) + 3X_3(s) = 3U(s)$$

Achando a Transformada Inversa de Laplace (\mathcal{L}^{-1}):

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 3u$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 - 6u$$

$$\dot{x}_3 = -3x_3 + 3u$$

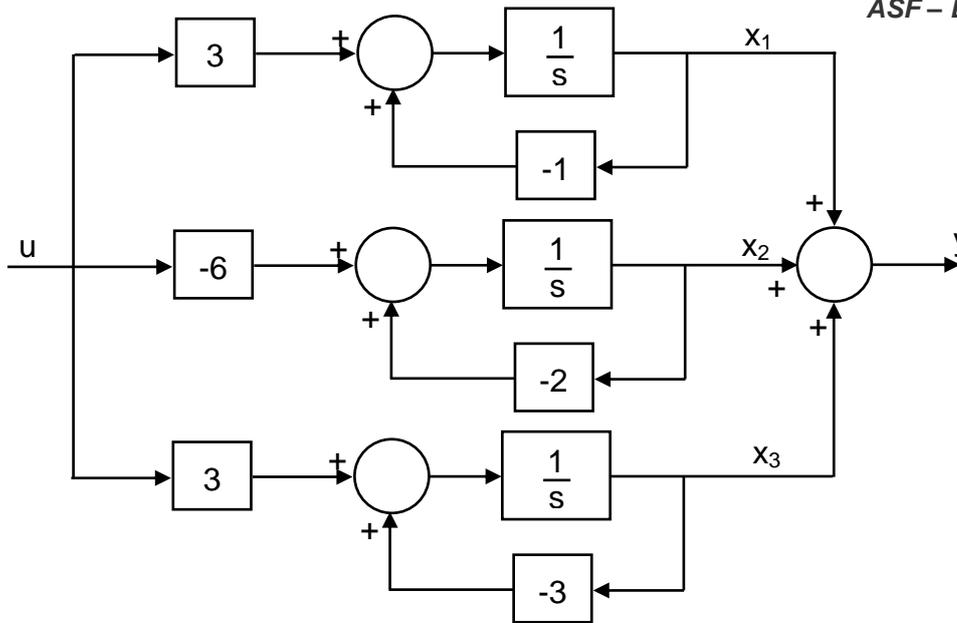
$$y = x_1 + x_2 + x_3$$

Ou na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

Forma Canônica Diagonal (*)

$$y = [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$



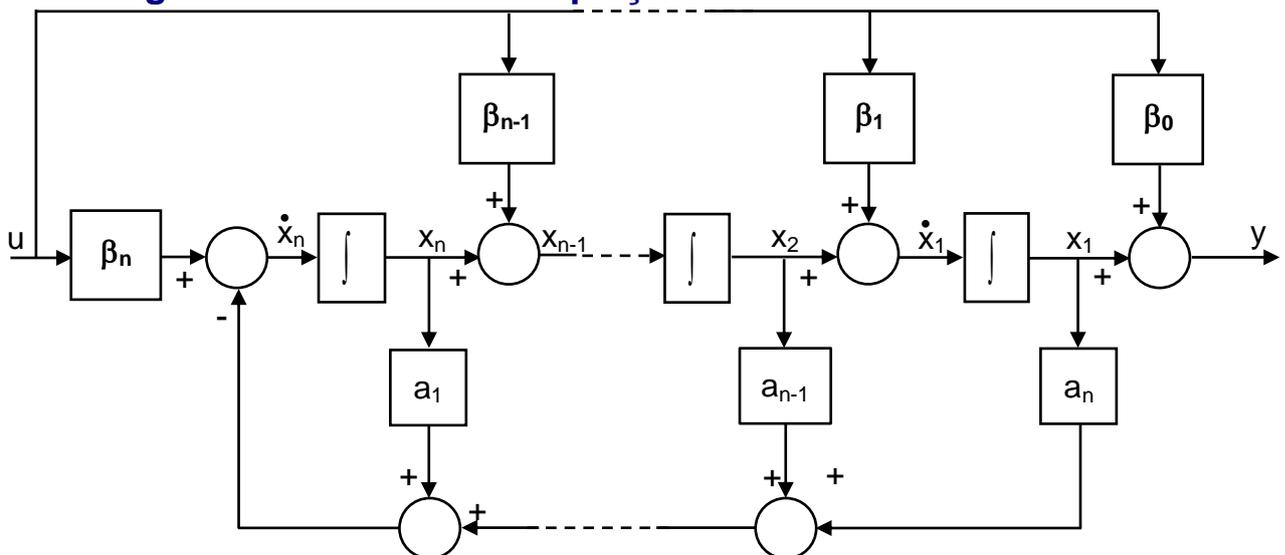
(*) Se há autovalores múltiplos, a diagonalização *pode* ser impossível
 ⇒ solução é a Forma Canônica de Jordan

➤ Equação Diferencial Linear com excitação $u(t)$ envolvendo termos em derivadas.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 u + b_1 \dot{u} + \dots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u \quad (2)$$

O método direto anterior não serve, pois pode não fornecer uma solução única. É usado um método que elimina as derivadas de u na equação de estado:

Diagrama de Blocos das Equações de Estado e Saída



$$y = x_1 + \beta_0 u \quad \Rightarrow \quad x_1 = y - \beta_0 u$$

$$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 \dot{u} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 \dot{u} = \dot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_2 &= x_3 + \beta_2 u \Rightarrow \dot{x}_3 = \dot{x}_2 - \beta_2 u = \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n-1} &= x_n + \beta_{n-1} u \Rightarrow \\
 x_n &= \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} u = y^{(n-1)} - \beta_0 u^{(n-1)} - \beta_1 u^{(n-2)} - \dots - \beta_{n-2} \dot{u} - \beta_{n-1} u
 \end{aligned}$$

Onde β 's são determinados através de:

$$\begin{aligned}
 \beta_0 &= b_0 \\
 \beta_1 &= b_1 - a_1 \beta_0 \\
 \beta_2 &= b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 \\
 \beta_3 &= b_3 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_0 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 \beta_n &= b_n - a_1 \beta_{n-1} - a_2 \beta_{n-2} - \dots - a_n \beta_0
 \end{aligned}$$

Com esta escolha, que não é única, garante-se a existência e a unicidade da solução de estado:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 + \beta_1 u \quad ; \quad \dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u \quad ; \quad \dot{x}_3 = x_4 + \beta_3 u \quad \dots \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n-1} &= x_n + \beta_{n-1} u \\
 \dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + \beta_n u
 \end{aligned}$$

Ou na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u$$

E a saída é escrita:

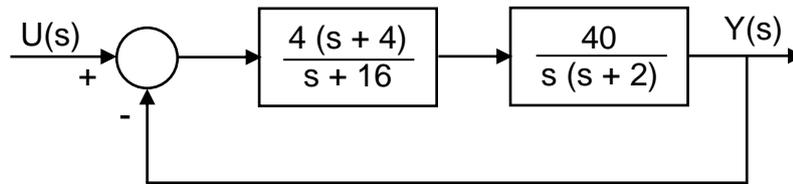
$$y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u$$

Neste caso, a representação por função de transferência é (ss2tf):

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

Exemplo

Obter uma representação no EE para o sistema:



$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G}{1+GH} = \frac{160(s+4)}{s^3 + 18s^2 + 192s + 640}$$

A equação diferencial corresponde é:

$$\overset{\dots}{y} + 18 \overset{\dots}{y} + 192 \overset{\cdot}{y} + 640 y = 160 \overset{\cdot}{u} + 640 u$$

Onde: $a_3 = 640$; $a_2 = 192$; $a_1 = 18$

$b_3 = 640$; $b_2 = 160$; $b_1 = b_0 = 0$

$\beta_0 = b_0 = 0$

$\beta_1 = b_1 - a_1 \beta_0 = 0$

$\beta_2 = b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 = 160$

$\beta_3 = b_3 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_0 = -2240$

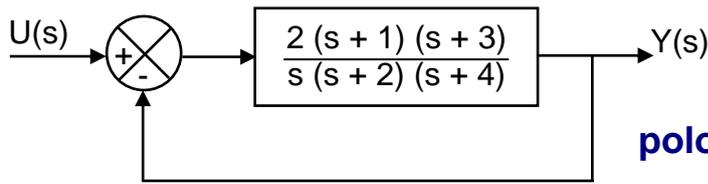
Então a equação de estado do sistema é:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -640 & -192 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 160 \\ -2240 \end{bmatrix} u$$

E a equação de saída é: $y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Obs.: Se $b_0 = \beta_0 = 0 \Rightarrow \mathbf{D} = 0$ (n° polos > n° zeros)

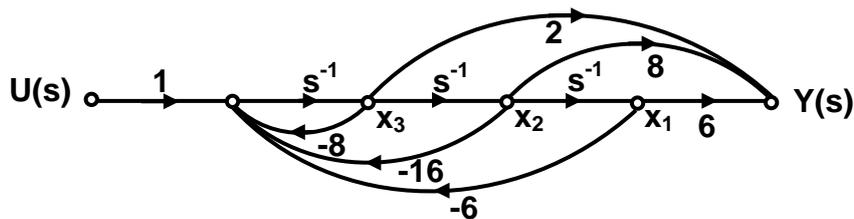
➤ Outras formas de representação no Espaço de Estados:



$K = 2$
 zeros $\Rightarrow -1$ e -3
 polos $\Rightarrow -0,4859; -2,4280$ e $-5,0861$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^2 + 8s + 6}{s^3 + 8s^2 + 16s + 6} = \frac{2s^{-1} + 8s^{-2} + 6s^{-3}}{1 + 8s^{-1} + 16s^{-2} + 6s^{-3}}$$

a) Forma Canônica de Variáveis de Fase

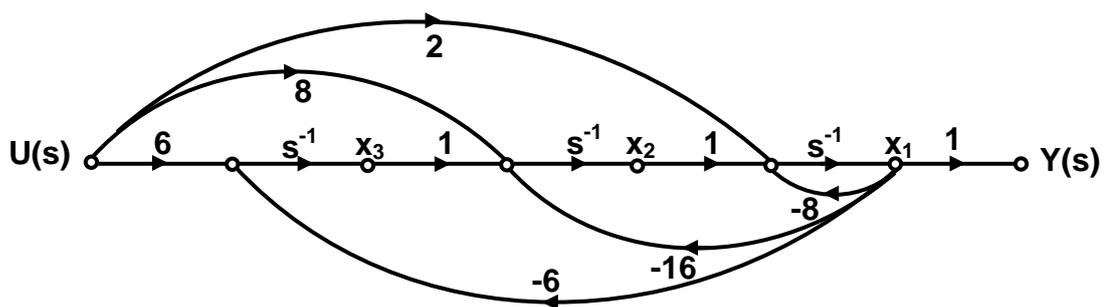


$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -16 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [6 \quad 8 \quad 2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Obs.: Usa a ação à frente das variáveis de fase x_1 , x_2 e x_3

b) Formato de Entrada com Ação à Frente (feedforward)



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 1 & 0 \\ -16 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} u$$

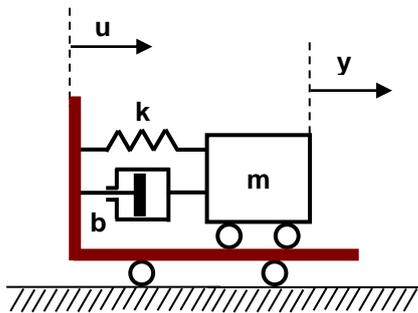
$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Obs.: Usa a ação à frente da variável de entrada u

11 - Modelagem de Sistemas Físicos

➤ Sistemas Mecânicos (Movimento de Translação)

Ex.: acelerômetro



2ª Lei de Newton: $m a = \Sigma F$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = b \left(\frac{du}{dt} - \frac{dy}{dt} \right) + k(u - y)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + k y = b \frac{du}{dt} + k u$$

Supondo $CIs=0 \Rightarrow y(0) = \dot{y}(0) = 0 \xrightarrow{\mathcal{L}} (m s^2 + b s + k) Y(s) = (b s + k) U(s)$

Função de Transferência:
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b s + k}{m s^2 + b s + k} = \frac{\frac{b}{m} s + \frac{k}{m}}{s^2 + \frac{b}{m} s + \frac{k}{m}}$$

Representação por Espaço de Estados:

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = b_0 \ddot{u} + b_1 \dot{u} + b_2 u$$

$$a_1 = b/m ; a_2 = k/m ; b_0 = 0 ; b_1 = b/m ; b_2 = k/m$$

$$\beta_0 = b_0 = 0 ;$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1 \beta_0 = b/m$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 = k/m - (b/m)^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = y - \beta_0 u = y \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u = \dot{x}_1 - (b/m) u \end{array} \right.$$

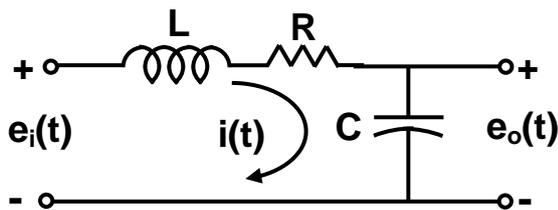
$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 + (b/m) u \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2 + \beta_2 u = - (k/m) x_1 - (b/m) x_2 + [k/m - (b/m)^2] u \end{array} \right. \text{ ou}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(k/m) & -(b/m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b/m \\ (k/m) - (b/m)^2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

➤ Sistemas Elétricos



Leis de Kirchhoff:

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = e_i \\ \frac{1}{C} \int i dt = e_o \end{cases}$$

Supondo $Ci(0) = 0 \Rightarrow \mathcal{L} \left\{ \begin{aligned} E_i &= LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{Cs}I(s) \\ E_o &= \frac{1}{Cs}I(s) \end{aligned} \right.$

Função de Transferência:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1/Cs}{Ls + R + (1/Cs)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{(1/LC)}{s^2 + (R/L)s + (1/LC)}$$

Representação por Espaço de Estados:

$$\ddot{e}_o + (R/L)\dot{e}_o + (1/LC)e_o = (1/LC)e_i \Rightarrow \ddot{e}_o = -(1/LC)e_o - (R/L)\dot{e}_o + (1/LC)e_i$$

$$\begin{cases} x_1 = e_o = y ; u = e_i \\ x_2 = \dot{e}_o = \dot{x}_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(1/LC)x_1 - (R/L)x_2 + (1/LC)u \end{cases}$$

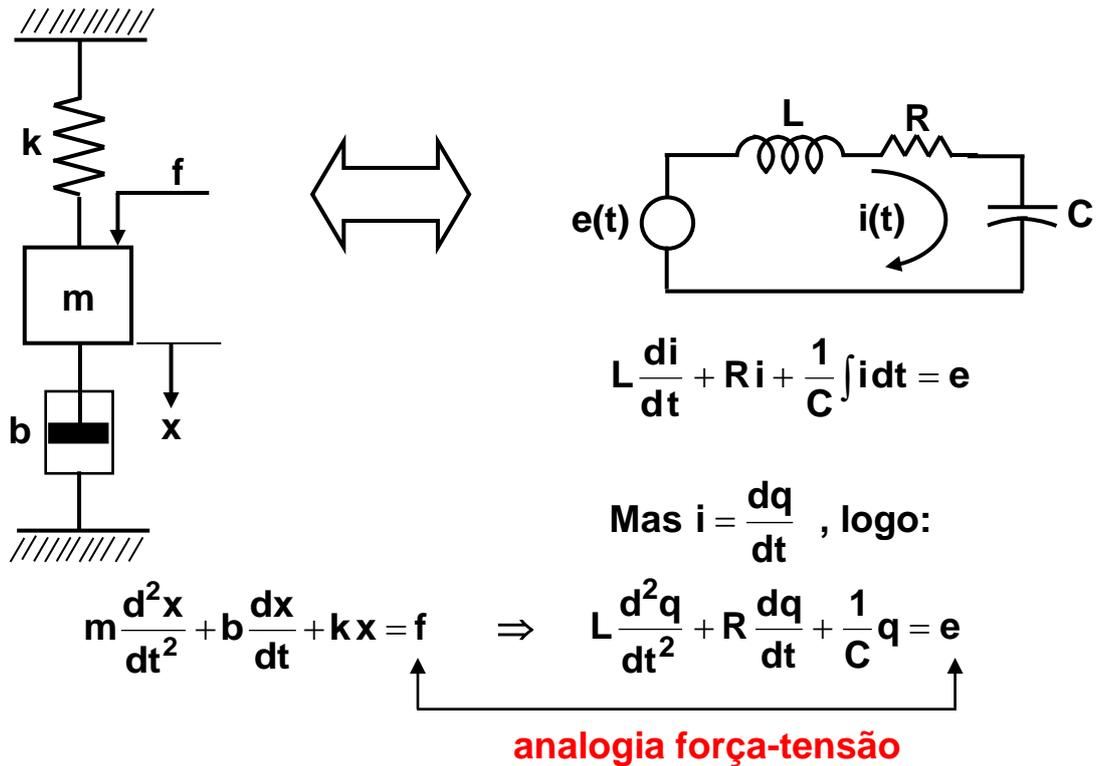
ou

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(1/LC) & -(R/L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/LC \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

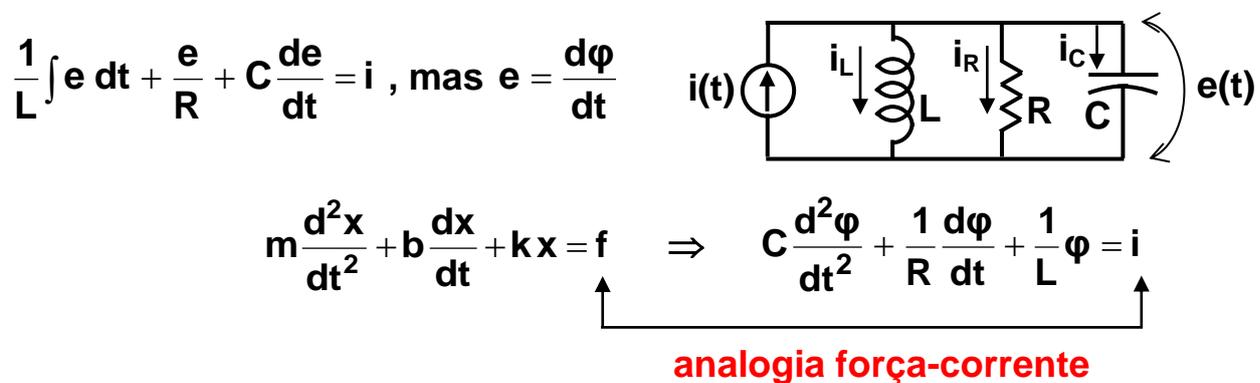
Obs.: Fazer outra realização com $x_1 = v_C$ e $x_2 = i_L$

➤ Sistemas Analógicos (Analogia Mecânico-Elétrica)



Grandezas análogas: $m \Leftrightarrow L$; $b \Leftrightarrow R$; $k \Leftrightarrow 1/C$

Ou:



Grandezas análogas: $m \Leftrightarrow C$; $b \Leftrightarrow 1/R$; $k \Leftrightarrow 1/L$

Comparação: Simulação Analógica × Simulação Digital

12 - Solução das Equações de Estado e de Saída (Sistemas LIT)

➤ **Solução Não-Forçada (Resposta Natural) $\Rightarrow \mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ (EE homogênea)**

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0} \text{ ou } = \mathbf{0}$$

a) Como solução da *equação diferencial escalar* $\Rightarrow \dot{x}(t) = a x(t)$, pode-se encontrar $x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_k t^k + \dots$

Substituindo a solução na eq. dif., temos:

$$b_1 + 2 b_2 t + 3 b_3 t^2 + \dots + k b_k t^{k-1} + \dots = a (b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_k t^k + \dots)$$

Igualando os coeficientes de t , temos:

$$b_1 = a b_0$$

$$b_2 = (1/2) a b_1 = (1/2) a^2 b_0$$

$$b_3 = (1/3) a b_2 = [1/(3 \times 2)] a^3 b_0$$

$$\vdots$$

$$b_k = (1/k!) a^k b_0 \quad , \text{ onde } b_0 = x(0) \text{ , ou seja , valor de } x(t) \text{ em } t=0$$

Portanto, a solução $x(t)$ pode ser escrita como:

$$x(t) = (1 + a t + \frac{1}{2!} a^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k!} a^k t^k + \dots) x(0)$$

$$x(t) = e^{at} x(0) \quad (\text{Série de Taylor})$$

b) Agora resolvendo para *eq. diferencial matricial-vetorial* $\Rightarrow \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t)$, onde $\mathbf{x}(t)$ é um vetor n -dimensional e \mathbf{A} é uma matriz constante $n \times n$

Analogamente, temos:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + \dots + \mathbf{b}_k t^k + \dots$$

$$\mathbf{b}_1 + 2 \mathbf{b}_2 t + 3 \mathbf{b}_3 t^2 + \dots + k \mathbf{b}_k t^{k-1} + \dots = \mathbf{A} (\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 t + \mathbf{b}_2 t^2 + \dots + \mathbf{b}_k t^k + \dots)$$

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{A} \mathbf{b}_0$$

$$\mathbf{b}_2 = (1/2) \mathbf{A} \mathbf{b}_1 = (1/2) \mathbf{A}^2 \mathbf{b}_0$$

$$\mathbf{b}_3 = (1/3) \mathbf{A} \mathbf{b}_2 = [1/(3 \times 2)] \mathbf{A}^3 \mathbf{b}_0$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{b}_k = (1/k!) \mathbf{A}^k \mathbf{b}_0 \quad , \text{ onde } \mathbf{b}_0 = \mathbf{x}(0)$$

E a solução é:

$$\mathbf{x}(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{A} t + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 t^2 + \dots + \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k t^k + \dots) \mathbf{x}(0)$$

A série entre parênteses converge para todo o valor finito de t e é uma matriz exponencial $n \times n$:

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) \quad (1)$$

Propriedades da Matriz Exponencial:

- 1) $\frac{d e^{\mathbf{A}t}}{dt} = \mathbf{A} e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{A}$
- 2) $e^{\mathbf{A}(t+s)} = e^{\mathbf{A}t} e^{\mathbf{A}s}$
- 3) $e^{\mathbf{A}t} e^{-\mathbf{A}t} = e^{-\mathbf{A}t} e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}(t-t)} = \mathbf{I}$
- 4) Logo, a inversa de $e^{\mathbf{A}t}$ é $e^{-\mathbf{A}t} \Rightarrow e^{\mathbf{A}t}$ é não-singular
- 5) $e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} = e^{\mathbf{A}t} e^{\mathbf{B}t}$ se $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A}$
- 6) $e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} \neq e^{\mathbf{A}t} e^{\mathbf{B}t}$ se $\mathbf{A}\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\mathbf{A}$

c) Abordagem da Transformada de Laplace (\mathcal{L})

Para o caso da eq. diferencial escalar $\dot{x}(t) = a x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s X(s) - x(0) = a X(s)$
 $\Rightarrow X(s) (s - a) = x(0) \Rightarrow X(s) = (s - a)^{-1} x(0) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x(t) = e^{at} x(0)$

Estendendo para eq. diferencial matricial $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}}$

$$s \mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A} \mathbf{X}(s) \Rightarrow (s \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0) \Rightarrow \mathbf{X}(s) = (s \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0) \quad (2)$$

Comparando (2) com (1): $\mathbf{X}(s) = (s \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0)$,

Verifica-se $\mathcal{L}^{-1}[(s \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \Rightarrow e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + (\mathbf{A}^2 t^2 / 2!) + (\mathbf{A}^3 t^3 / 3!) + \dots$

$$\text{Logo } (s \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = (\mathbf{I}/s) + (\mathbf{A}/s^2) + (\mathbf{A}^2/s^3) + (\mathbf{A}^3/s^4) + \dots$$

➤ **Matriz de Transição de Estados** $\Rightarrow \Phi(t) = e^{At}$

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0) = \Phi(t) \mathbf{x}(0)$$

contém toda a informação sobre os movimentos livres do sistema

$\Phi(t)$ é uma matriz $n \times n$ e a solução única de $\dot{\Phi}(t) = \mathbf{A} \Phi(t)$, $\Phi(0) = \mathbf{I}$

Observe que $\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\Phi}(t) \mathbf{x}(0) = \mathbf{A} \Phi(t) \mathbf{x}(0) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t)$ e $\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$

Se os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ da matriz \mathbf{A} são distintos, então $\Phi(t)$ conterá n exponenciais: $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$

Propriedades da Matriz de Transição de Estados:

$$1) \Phi(0) = e^{A0} = \mathbf{I}$$

$$2) \Phi(t) = e^{At} = (e^{-At})^{-1} = [\Phi(-t)]^{-1} \quad \text{ou} \quad \Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$$

$$3) \Phi(t_1 + t_2) = e^{A(t_1 + t_2)} = e^{At_1} e^{At_2} = \Phi(t_1) \Phi(t_2) = \Phi(t_2) \Phi(t_1)$$

$$4) [\Phi(t)]^n = [e^{At}]^n = \Phi(nt)$$

$$5) \Phi(t_2 - t_1) \Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_1 - t_0) \Phi(t_2 - t_1)$$

Exemplo - obtenha a matriz de transição de estados $\Phi(t)$ do sistema massa-mola-amortecedor ($m=1$ kg; $k=2$ N/m e $b=3$ N/m/s):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \Rightarrow \Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

Matlab: `A=[0 1;-2 -3];syms t;expm(A*t)`

➤ **Solução Forçada $\Rightarrow u(t) \neq 0$ (EE não-homogênea)**

a) *Eq. diferencial escalar* $\Rightarrow \dot{x}(t) = a x(t) + b u(t) \Rightarrow \dot{x}(t) - a x(t) = b u(t)$

Multiplicando por e^{-at} , temos:

$$e^{-at} [\dot{x}(t) - a x(t)] = \frac{d}{dt} [e^{-at} x(t)] = e^{-at} b u(t)$$

Integrando de 0 a t, resulta em:

$$e^{-at} x(t) = x(0) + \int_0^t e^{-a\tau} b u(\tau) d\tau \quad \text{ou} \quad x(t) = \underbrace{e^{at} x(0)}_{\text{Resposta à condição inicial } x(0)} + \underbrace{e^{at} \int_0^t e^{-a\tau} b u(\tau) d\tau}_{\text{Resposta à entrada } u(t)}$$

Resposta à condição inicial $x(0)$ \uparrow Resposta à entrada $u(t)$

b) *Equação diferencial matricial* \Rightarrow

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad \text{e} \quad \mathbf{x}(0) \neq 0 \text{ ou } = 0$$

Pré-multiplicando por $e^{-\mathbf{A}t}$, temos:

$$e^{-\mathbf{A}t} [\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A} \mathbf{x}(t)] = \frac{d}{dt} [e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{x}(t)] = e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{u}(t)$$

Integrando de 0 a t, resulta em:

$$e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad \text{ou} \quad \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

Reescrevendo usando $\Phi(t)$, vem a solução de $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t)$:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t) \mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau) \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

c) **Abordagem da Transformada de Laplace (\mathcal{L})**

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s \mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A} \mathbf{X}(s) + \mathbf{B} \mathbf{U}(s) \Rightarrow$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{U}(s) \Rightarrow$$

$$\mathbf{X}(s) = \mathcal{L}[e^{\mathbf{A}t}] \mathbf{x}(0) + \mathcal{L}[e^{\mathbf{A}t}] \mathbf{B} \mathbf{U}(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \text{usando a integral de convolução}$$

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau}$$

Se o instante inicial é diferente de 0 (t_0), teremos:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

Exemplo - obtenha a resposta $y(t)$ no domínio do tempo do sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad \text{onde } u(t) \text{ é a função degrau unitário ocorrendo em } t=0 [u(t) = 1(t)].$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{Supor } CIs=0 \Rightarrow \mathbf{x}(0) = 0$$

Do exemplo anterior, temos:

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Portanto, resposta $\mathbf{x}(t)$ ao degrau unitário é:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau$$

ou

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1/2) - e^{-t} + (1/2)e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Admitindo $\mathbf{x}(0) = 0$, então a resposta $\mathbf{x}(t)$ pode ser simplificada para:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/2) - e^{-t} + (1/2)e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}, t \geq 0$$

Como $\mathbf{C} = [1 \ 0]$ e $\mathbf{D} = 0$, a saída $y(t) = x_1(t)$:

$$y(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{C} e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} u(\tau) d\tau + \mathbf{D} u(t)$$

$$y(t) = x_1(t) = (1/2) - e^{-t} + (1/2)e^{-2t}$$

Obs.:

\mathbf{x} =vetor n -dimensional; \mathbf{u} =vetor m -dimensional ; \mathbf{y} =vetor r -dimensional

Matrizes Constantes: $\mathbf{A}_{n \times n}$; $\mathbf{B}_{n \times m}$; $\mathbf{C}_{r \times n}$; $\mathbf{D}_{r \times m}$

Se a entrada é um degrau $u(t) = k$ aplicado em $t=0$, pode-se obter $\mathbf{x}(t)$ através da seguinte expressão (ex. A-11-6 do Ogata 3ª Edição):

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^{-1} (e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I}) \mathbf{B} k$$

Se a entrada é um impulso $\delta(t) = w$ aplicado em $t=0$, temos:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0^-) + e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} w$$

Se a entrada é uma rampa $u(t) = vt$ aplicada em $t=0$, temos:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + [\mathbf{A}^{-2} (e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I}) - \mathbf{A}^{-1} t] \mathbf{B} v$$

➤ Outras formas de calcular $\Phi(t)$

a) Usar a fórmula de Interpolação de Sylvester:

$$e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1}, \text{ onde:}$$

a.1) A possui autovalores distintos $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_1^2 + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_1^{n-1} &= e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 \lambda_2^2 + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_2^{n-1} &= e^{\lambda_2 t} \\ \dots & \dots \\ \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_n + \alpha_2 \lambda_n^2 + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_n^{n-1} &= e^{\lambda_n t} \end{aligned}$$

Ou diretamente através de: $e^{At} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{A - \lambda_j I}{\lambda_i - \lambda_j}$ ou ainda:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & e^{\lambda_1 t} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & e^{\lambda_2 t} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & e^{\lambda_3 t} \\ I & A & A^2 & e^{At} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \text{exemplo para } n=3$$

a.2) A possui autovalores múltiplos, por exemplo:

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ e $\lambda_4 \neq \lambda_5 \neq \dots \neq \lambda_n$ Neste caso temos:

$$\begin{aligned} \alpha_2 + 3 \alpha_3 \lambda_1 + \dots + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \alpha_{n-1} \lambda_1^{n-1} &= (t^2/2) e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_1 + 2 \alpha_2 \lambda_1 + 3 \alpha_3 \lambda_1^2 + \dots + (n-1) \alpha_{n-1} \lambda_1^{n-1} &= t e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_1^2 + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_1^{n-1} &= e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_4 + \alpha_2 \lambda_4^2 + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_4^{n-1} &= e^{\lambda_4 t} \\ \dots & \dots \\ \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_n + \alpha_2 \lambda_n^2 + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_n^{n-1} &= e^{\lambda_n t} \end{aligned}$$

Obs.: Vejam também pelo método do Teorema de Cayley-Hamilton

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k \quad \text{e} \quad e^{\lambda_i t} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda_i^k \quad \text{para } \lambda_i \text{ distintos}$$

b) Transformar A em matriz Diagonal (veremos adiante)

c) Forma Canônica de Jordan (veremos adiante)

13 - Discretização da Resposta no Domínio do Tempo

A resposta de um sistema representado no espaço de estados pode ser obtida utilizando-se uma *aproximação discreta no tempo*. Este método é adequado para o cálculo numérico e análise através programas computacionais.

Neste processamento, os valores das variáveis de estados $x(t)$ são calculados para sucessivos intervalos de tempo $t = 0, T, 2T, 3T, \dots$, onde T é o incremento de tempo Δt (*Método de Euler*). Quanto menor for Δt (suficientemente pequeno em comparação com as constantes de tempo do sistema), menor será o erro em relação à solução exata.

Dada a equação de estado EE (LIT): $\frac{dx(t)}{dt} = A x(t) + B u(t)$

E a definição de derivada: $\frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \Rightarrow$ pode-se aproximar a EE para $\frac{dx(t)}{dt} \cong \frac{x(t+T) - x(t)}{T}$ onde $\Delta t = T \Rightarrow$ pequeno intervalo de tempo

Desse modo, podemos escrever a equação de estado da seguinte forma:

$$\frac{x(t+T) - x(t)}{T} \cong A x(t) + B u(t)$$

Resolvendo $x(t+T)$, temos: $x(t+T) \cong (I+TA) x(t) + T B u(t)$

Se o tempo t é descrito como $t = kT$, onde k é 0, 1, 2, 3, ..., temos que:

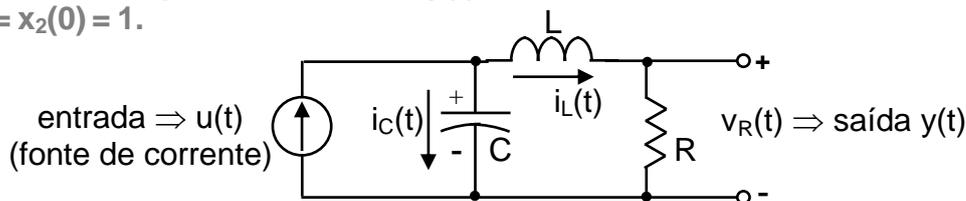
$$x(k+1)T \cong (I+TA) x(kT) + T B u(kT)$$

E o valor do vetor de estado no $(k+1)$ ésimo instante de tempo é:

$$x(k+1) \cong (I+TA) x(k) + T B u(k) = \Phi_d(T) x(k) + T B u(k) \quad (*)$$

Exemplo:

Escolhendo a tensão no capacitor como x_1 e a corrente no indutor como x_2 , determine a resposta natural de $y(t)$, considerando $R = 3 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$, $C = 1/2 \text{ F}$ e $x_1(0) = x_2(0) = 1$.



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/C \\ 1/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/C \\ 0 \end{bmatrix} u \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad R] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow y = 3 x_2$$

Solução Exata:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \Phi(t) x(0) = e^{At} x(0) = \begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & (2e^{-2t}-2e^{-t}) \\ (e^{-t}-e^{-2t}) & (2e^{-2t}-e^{-t}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Autovalores: $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2 \Rightarrow$ menor constante de tempo = 0,5 s

Escolhendo $T = 0,2 \text{ s} \Rightarrow$ menor que a metade da menor constante de tempo

Da solução aproximada (*): $x(k+1) \cong (I + 0,2 A) x(k) + 0,2 B u(k) \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \quad \text{onde } u(k) = 0$$

Resposta no 1º instante: $k=0$ ($t=T=0,2$ s):

$$\begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,6 \end{bmatrix} \Rightarrow y(t) = 1,8$$

Resposta no 2º instante: $k=1$ ($t=2T=0,4$ s):

$$\begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,36 \\ 0,36 \end{bmatrix} \Rightarrow y(t) = 1,08$$

Resposta no 3º instante: $k=2$ ($t=3T=0,6$ s):

$$\begin{bmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,4 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,36 \\ 0,36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,216 \\ 0,216 \end{bmatrix} \Rightarrow y(t) = 0,648$$

etc

Tempo t (s)	0	0,2	0,4	0,6	0,8
Valor exato de y(t)	3	2,011	1,348	0,904	0,606
Valor de y(t) com T=0,2 s	3	1,8	1,08	0,648	0,390
Valor de y(t) com T=0,1 s	3	1,92	1,229	0,786	0,503
Valor de y(t) com T=0,05 s	3	1,968	1,291	0,847	0,556

Calculando a Matriz de Transição de Estado para um $\Delta t = 0,2$ s com o Matlab:

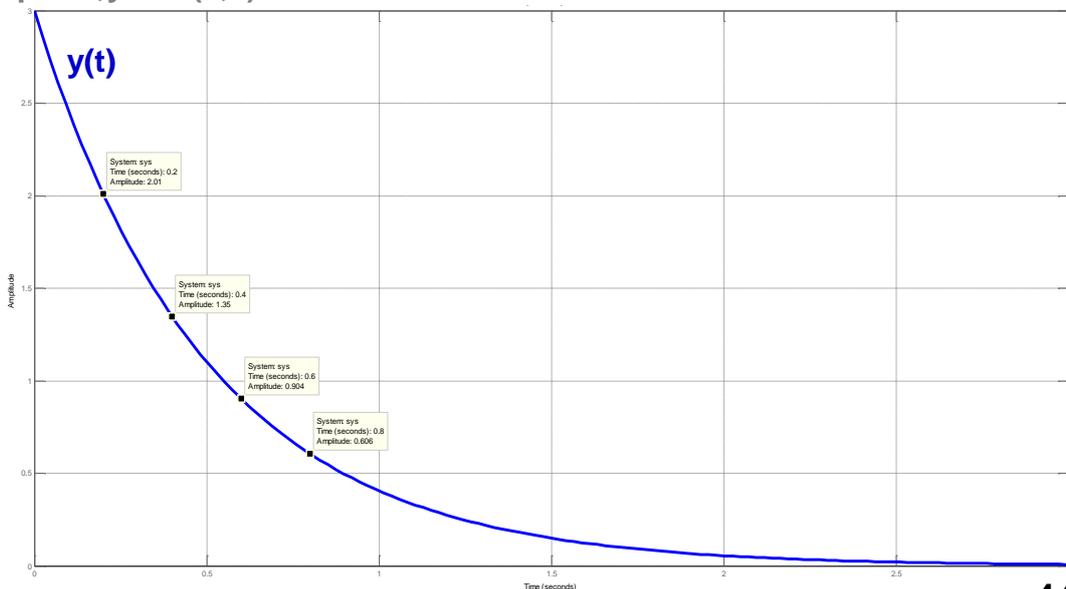
```
A=[0 -2;1 -3];dt=0.2;phi=expm(A*dt)
```

phi =

```
0.9671 -0.2968
0.1484 0.5219
```

```
x=[1;1];x=phi*x;y=3*x(2,1)
```

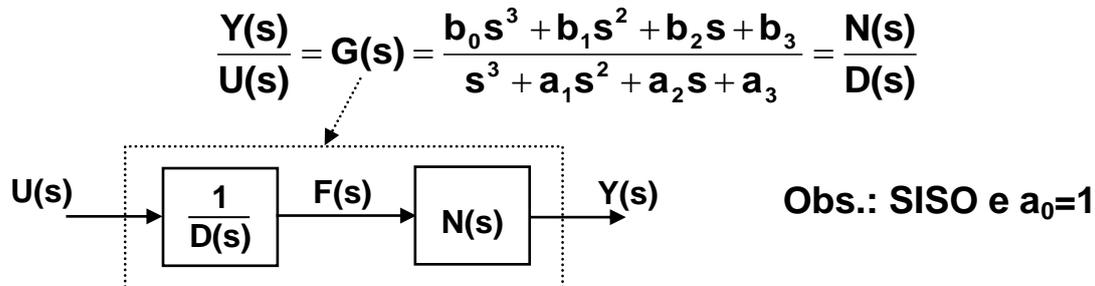
y =
2.0110



14 - Controlabilidade e Observabilidade

Antes de iniciar o projeto de um controlador é necessário analisar a controlabilidade e a observabilidade do sistema. A localização dos polos de MF pode ser escolhida arbitrariamente se, e somente se, o sistema é controlável e observável.

➤ Forma Canônica Controlável



$$F(s) = \frac{1}{D(s)} U(s) \Rightarrow s^3 F(s) + a_1 s^2 F(s) + a_2 s F(s) + a_3 F(s) = U(s) \quad (*)$$

Definindo:

$$f(t) = x_1$$

$$\frac{df(t)}{dt} = \dot{x}_1 = x_2$$

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \dot{x}_2 = \ddot{x}_1 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -a_3 x_1 - a_2 x_2 - a_1 x_3 + u(t) \Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1} (*)$$

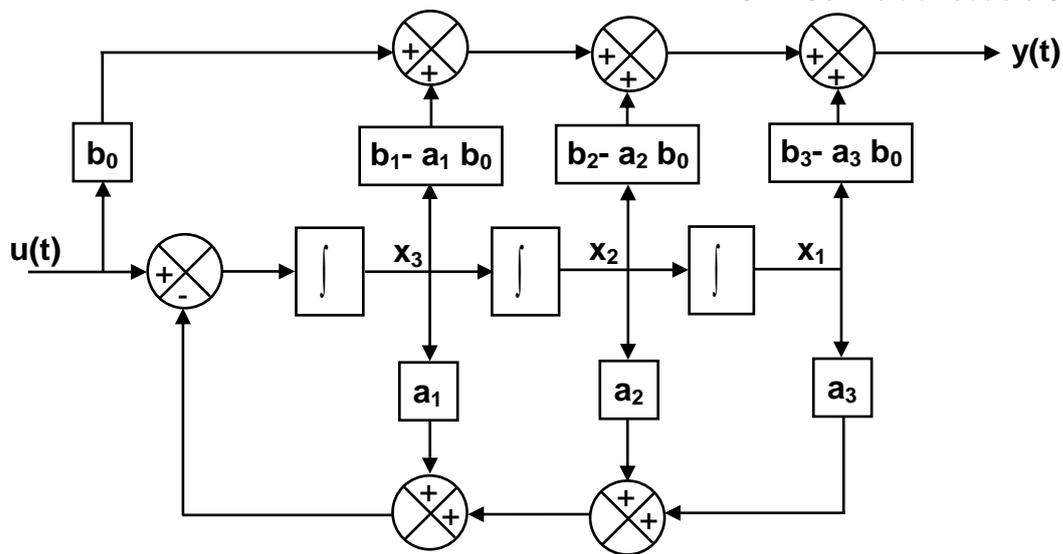
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$Y(s) = N(s)F(s) \Rightarrow Y(s) = b_0 s^3 F(s) + b_1 s^2 F(s) + b_2 s F(s) + b_3 F(s) \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}^{-1} \Rightarrow y(t) = b_0 [-a_3 x_1 - a_2 x_2 - a_1 x_3 + u(t)] + b_1 x_3 + b_2 x_2 + b_3 x_1 \Rightarrow$$

$$y(t) = (b_3 - a_3 b_0) x_1 + (b_2 - a_2 b_0) x_2 + (b_1 - a_1 b_0) x_3 + b_0 u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_3 - a_3 b_0 & b_2 - a_2 b_0 & b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + b_0 u(t)$$



Generalizando, temos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [b_n - a_n b_0 \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \quad \dots \quad b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + b_0 u(t)$$

Um sistema é dito controlável no instante t_0 se for possível, por meio de um vetor de controle u não-restrito, transferir o sistema de qualquer estado inicial $x(t_0)$ para qualquer outro estado num intervalo de tempo finito $x(t)$.

Um sistema é completamente controlável:

- Se o $\det M_C = \det [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$ é não-nulo ($M_C \Rightarrow$ matriz de controlabilidade) ou se a matriz M_C ($n \times nm$) tem posto “n” ou;
- Se, no diagrama de fluxo de sinal, existe percurso entre o sinal de controle u e cada uma das variáveis de estado, o sistema pode ser descrito em variáveis de fase. Um sistema descrito no formato de variáveis de fase é sempre controlável.

Exercício

Matlab: $M_C = \text{ctrb}(A,B)$ e $\det(M_C)$ ou $\text{rank}(M_C)$

➤ Forma Canônica Observável

Obs.: SISO e $a_0=1$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} \Rightarrow \text{reescrevendo} \Rightarrow$$

$$s^3[Y(s) - b_0 U(s)] + s^2[a_1 Y(s) - b_1 U(s)] + s[a_2 Y(s) - b_2 U(s)] + a_3 Y(s) - b_3 U(s) = 0$$

Dividindo por s^3 :

$$Y(s) = b_0 U(s) + \frac{1}{s}[b_1 U(s) - a_1 Y(s)] + \frac{1}{s^2}[b_2 U(s) - a_2 Y(s)] + \frac{1}{s^3}[b_3 U(s) - a_3 Y(s)]$$

Definindo: $Y(s) = b_0 U(s) + X_3(s)$

$$X_3(s) = \frac{1}{s}[b_1 U(s) - a_1 Y(s) + X_2(s)]$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s}[b_2 U(s) - a_2 Y(s) + X_1(s)]$$

$$X_1(s) = \frac{1}{s}[b_3 U(s) - a_3 Y(s)]$$

$$\mathcal{L}^{-1} \Rightarrow y(t) = x_3 + b_0 u(t)$$

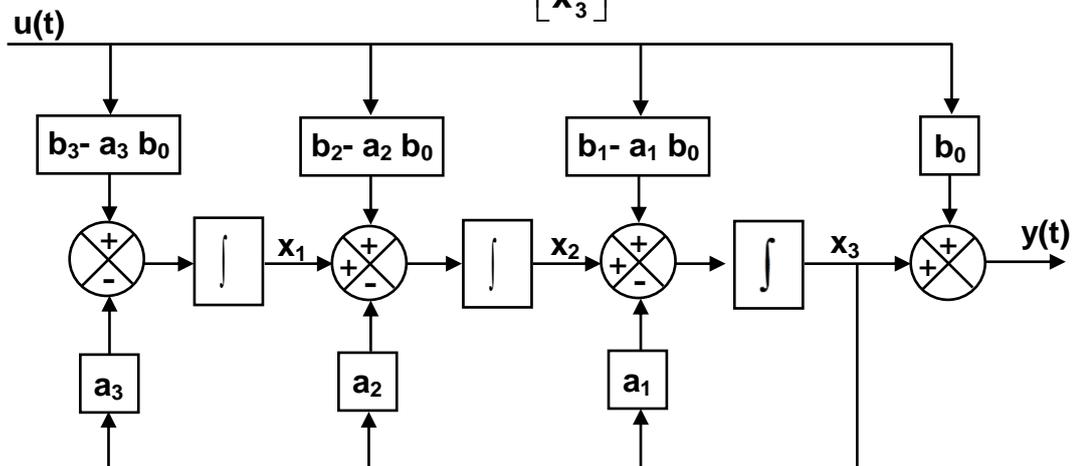
$$\dot{x}_3 = x_2 - a_1 x_3 + (b_1 - a_1 b_0) u$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - a_2 x_3 + (b_2 - a_2 b_0) u$$

$$\dot{x}_1 = -a_3 x_3 + (b_3 - a_3 b_0) u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_3 - a_3 b_0 \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + b_0 u(t)$$



Generalizando, temos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + b_0 u(t)$$

Um sistema é dito observável no instante t_0 se, com o sistema num estado $x(t_0)$ qualquer, for possível determinar este estado a partir da observação da saída $y(t)$ durante um intervalo de tempo finito.

Um sistema é observável:

- Se o $\det M_O$ é não-nulo ($M_O \Rightarrow$ matriz de observabilidade) ou se a matriz M_O ($n \times nr$) tem posto “n” ou;

$$M_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

- Um sistema descrito no formato de variáveis de fase é sempre observável.

Exercício

Matlab: $M_O = \text{obsv}(A,C)$ e $\det(M_O)$ ou $\text{rank}(M_O)$

15 - Autovalores e Autovetores

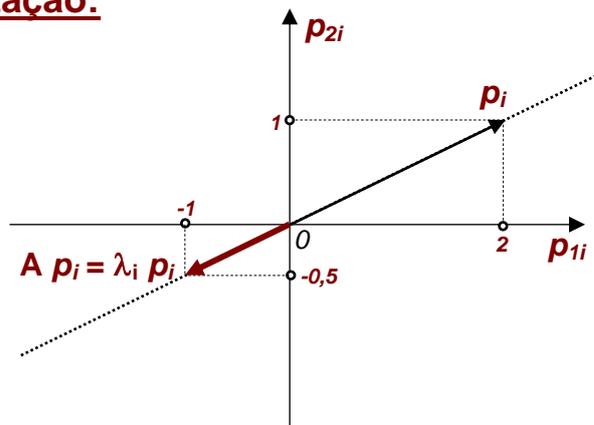
Um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor de A se existe um vetor não-nulo $p \in \mathbb{C}^n$ tal que:

$$A p = \lambda p \Rightarrow (\lambda I - A) p = 0 \quad \text{então, diz-se que}$$

p_i é um autovetor à direita associado ao autovalor λ_i

Para que p_i seja não-nulo $\Rightarrow \det(\lambda_i I - A) = 0$, ou seja, $(\lambda_i I - A)$ é singular

Interpretação:



Seja um sistema representado por $\dot{x} = A x + B u$:

➤ 1º Caso: Autovalores Distintos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow P = [p_1 \quad p_2 \quad p_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Matriz Modal

$$P^{-1} * A * P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Forma Canônica Diagonal } (\Lambda)$$

Matlab $\Rightarrow [P, \Lambda] = \text{eig}(A)$

$$P = \begin{bmatrix} 0,7071 & -0,2182 & -0,0921 \\ 0,0000 & -0,4364 & -0,5523 \\ 0,7071 & -0,8729 & -0,8285 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{normalizados } (*)$$

$$(*) \quad p_{1i}^2 + p_{2i}^2 + p_{3i}^2 = 1$$

(*) Os autovetores não são únicos (existem infinitas possibilidades). Assim como os autovalores, os autovetores estão associados ao comportamento dinâmico do sistema (modos de oscilação). Os autovetores de A também servem a outros propósitos (*exemplo a seguir*).

✓ Admitindo agora um novo conjunto de variáveis de estado z_1, z_2 e z_3 (Transformação por Similaridade), tal que:

$$x = Pz \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{substituindo na EE anterior,}$$

temos:

$$P\dot{z} = APz + Bu \Rightarrow \text{pré-multiplicando por } P^{-1}, \text{ obtemos:}$$

$$\dot{z} = P^{-1}APz + P^{-1}Bu$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2,5 & -2 \\ -3 & -4 & 3 \\ 1 & 1,5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2,5 & -2 \\ -3 & -4 & 3 \\ 1 & 1,5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 \\ 18 \\ -6 \end{bmatrix} u$$

Obs.: Equações de Estado “Desacopladas”

E a nova equação de saída é:

$$y = CPz \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

➤ 2º Caso: Autovalores Múltiplos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow (\lambda - 1)^3 = 0 \quad \text{e} \quad P = [p_1 \ p_2 \ p_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (1)$$

$$P^{-1} * A * P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Forma Canônica de Jordan (J)} \quad (2)$$

(1) Veremos que também é possível encontrar uma matriz de transformação P (inversível) capaz de reduzir a matriz A à forma canônica de Jordan

$$(2) J = P^{-1} * A * P \Rightarrow A = P * J * P^{-1} \quad \text{e} \quad A^k = P * J^k * P^{-1}$$

16 - Forma Canônica de Jordan (Caso Geral)

A existência de uma forma diagonal de A está ligada à existência de “ n autovetores linearmente independentes associados aos n autovalores” de A . Neste caso é possível definir P e obter:

$$P^{-1} * A * P = \Lambda$$

Supondo que existem apenas “ r autovalores distintos” dentre os “ n autovalores” de A , o polinômio característico é

$$\text{pol}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

- A “multiplicidade algébrica” do autovalor λ_i é representada por m_i . Portanto: $m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$
- A “multiplicidade geométrica” do autovalor λ_i é representada por μ_i e é definida como o número de autovetores linearmente independentes de associados ao autovalor λ_i .

As multiplicidades algébrica e geométrica estão relacionadas através de $1 \leq \mu_i \leq m_i$, $i = 1, 2, 3, \dots, r$ e existe uma forma diagonal de A se e somente se $\mu_i = m_i$, $i = 1, 2, 3, \dots, r$.

Exemplo 1:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow (\lambda - 5)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 5 \quad \text{e} \quad m_1 = 2$$

$$(\lambda_1 I - A) p_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow p_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha \neq 0 \Rightarrow \text{única solução possível.}$$

Portanto $\mu_1 = 1 < m_1 = 2 \Rightarrow$ a matriz A não possui forma diagonal

Exemplo 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, m_1 = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 1, m_2 = 2$$

$$(\lambda_1 I - A) p_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow p_1 = \begin{bmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \neq 0 \Rightarrow \mu_1 = 1$$

$$(\lambda_2 I - A)p_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow p_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } p_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha \neq 0 \Rightarrow \text{o autovalor}$$

λ_2 possui duas soluções (autovetores) linearmente independentes. Portanto, λ_2 tem $\mu_2 = 2$ e a matriz A possui forma diagonal.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow P = [p_1 \ p_2 \ p_3] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$P^{-1} * A * P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Matriz Diagonal } (\Lambda)$$

Quando $\mu_i < m_i$ para pelo menos um autovalor λ_i , não é possível obter uma forma diagonal. Neste caso, a forma canônica de Jordan é do tipo triangular superior, formada de blocos de Jordan (*bloco-diagonal*).

Exemplo: matriz A de ordem 9 com 4 autovalores distintos ($r = 4$), sendo $\lambda_1 \Rightarrow m_1 = 3$ e $\mu_1 = 1$;

$$\lambda_2 \Rightarrow m_2 = 3 \text{ e } \mu_2 = 2 ;$$

$$\lambda_3 \Rightarrow m_3 = 2 \text{ e } \mu_3 = 1 \text{ e}$$

$$\lambda_4 \Rightarrow m_4 = 1 \text{ e } \mu_4 = 1.$$

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

Obs.: 1) Número total de blocos de Jordan $\mu = 5$ ($\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4$)

2) Matlab $\Rightarrow [P, J] = \text{jordan}(A)$

➤ Cálculo da Matriz de Transição de Estados $\Phi(t)$

Com a estrutura de autovalores-autovetores, o cálculo de e^{At} fica “substancialmente” simplificado. No caso mais geral, o cálculo de e^{At} baseia-se na Forma Canônica de Jordan.

Vimos que:

$$e^{At} = I + At + (A^2 t^2 / 2!) + \dots + (A^k t^k / k!) + \dots \quad e \quad A^k = P J^k P^{-1}$$

$$e^{At} = P P^{-1} + P J P^{-1} t + (P J^2 P^{-1} t^2 / 2!) + \dots + (P J^k P^{-1} t^k / k!) + \dots \Rightarrow$$

$$e^{At} = P \{ I + J t + (J^2 t^2 / 2!) + \dots + (J^k t^k / k!) + \dots \} P^{-1} \Rightarrow$$

$$\boxed{e^{At} = P e^{Jt} P^{-1}}$$

Se, em particular, $J = \Lambda$ (matriz diagonal), temos:

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

No caso geral, J é formada por blocos. Se, por exemplo, temos:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & t e^{\lambda_1 t} & \frac{1}{2} t^2 e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & t e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} & t e^{\lambda_2 t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

Exemplo: $e^{At} = P e^{Jt} P^{-1}$

17 - Representação Modal

Seja $\begin{cases} \dot{x} = A x + B u \\ y = C x + D u \end{cases}$ fazendo $x = P z$ onde

$z \Rightarrow$ novo conjunto de variáveis de estado (z_1, z_2, z_3, \dots) associadas respectivamente aos modos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ e

$P \Rightarrow$ colunas com os autovetores à direita de A , temos:

$$\begin{cases} P\dot{z} = A P z + B u \\ y = C P z + D u \end{cases} \Rightarrow \text{pré-multiplicando por } P^{-1}, \text{ obtemos:}$$

$$\begin{cases} \dot{z} = P^{-1} A P z + P^{-1} B u \\ y = C P z + D u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{z} = \Lambda z + \mathcal{B} u \\ y = \mathcal{C} z + D u \end{cases}, \text{ onde:}$$

$\Lambda = P^{-1} A P \Rightarrow$ matriz diagonal;

$\mathcal{B} = P^{-1} B \Rightarrow$ se a i -ésima linha de \mathcal{B} for nula, as entradas (u) não têm efeito de controle sobre o modo z_i e

$\mathcal{C} = C P \Rightarrow$ se a i -ésima coluna de \mathcal{C} for nula, o modo z_i não é observado nos sinais de saída medidos (y).

Exemplo:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -2 & 6 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{duas entradas}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{duas saídas}$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 7 & 2 & -6 \\ -2 & \lambda + 3 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 23\lambda + 15 = 0$$

$\sigma(A) = \{-1, -3, -5\} \Rightarrow$ autovalores de A , cujos autovetores à direita são:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

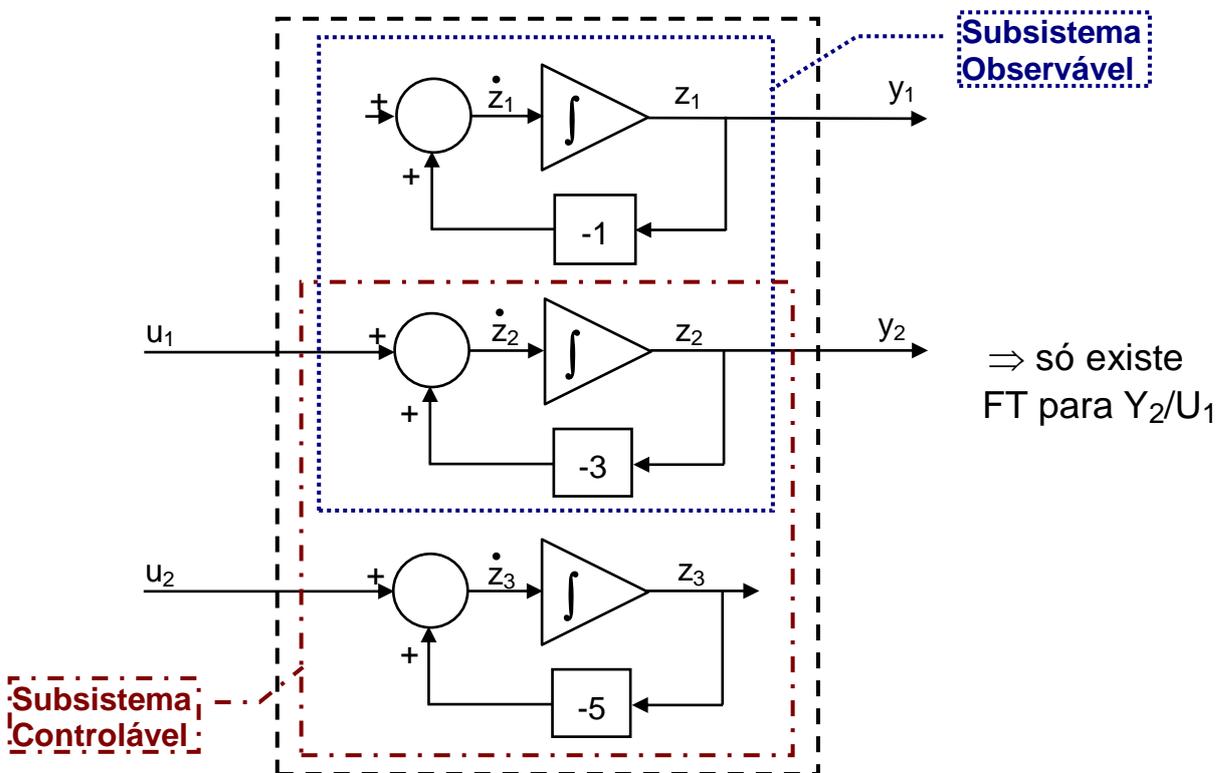
Com isso, pode-se achar a representação modal deste sistema:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}}_{\Lambda} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{B} \Rightarrow \text{posto (rank)} = 2} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

→ Modo z_1 não controlável

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{C} \Rightarrow \text{posto} = 2} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

→ Modo z_3 não observável



➤ **Diagonalização da Matriz de Estado A (Transformação por Similaridade)**

Se a matriz de estado A é descrita na forma canônica de variáveis de fase, pode-se então convertê-la na forma canônica diagonal (controlável e observável) através de $P^{-1} * A * P$, onde:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \lambda_3^1 & \dots & \lambda_n^1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Matriz de Vandermonde}$$

Onde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são os autovalores distintos de A

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} * A * P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Observações:

- 1) Se A tem autovalores múltiplos, nem sempre é possível obter uma forma diagonal de A.
- 2) Se A não está na forma canônica de variáveis de fase, P pode ser formada pelos autovetores da A $\Rightarrow (\lambda_i I - A) p_i = 0$