FLUXO EM SOLOS SOB CONDIÇÃO SATURADA

Análise Numérica – Método das Diferenças Finitas

CONTEÚDO

1. ANÁLISE NUMÉRICA – MÉTODO DAS FIFERENÇAS FINITAS

Equação de Laplace [1]

$$\boxed{k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0} \qquad (1)$$

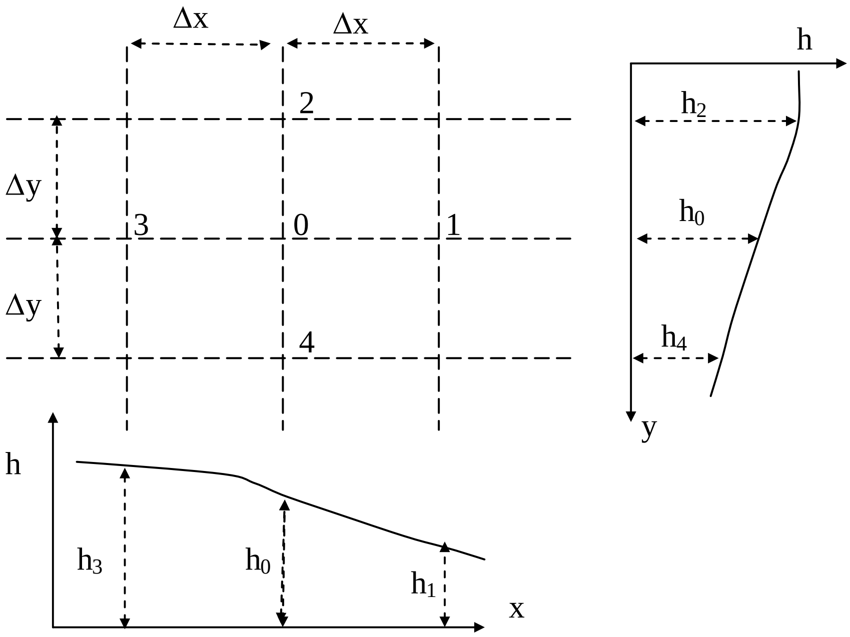


Figura 1

Usando o Teorema de Taylor (série de Taylor)

eixo X: $$h_1 = h_o + \Delta x\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_o + \frac{\Delta x^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)_o + \frac{\Delta x^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right)_o + ...$$

$+$

$$h_3 = h_o - \Delta x\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_o + \frac{\Delta x^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)_o - \frac{\Delta x^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}\right)_o + ...$$

---

[1] Scott, R.F. (1963) – "Principles of Soil Mechanics" – Addison-Wesley Publishing Company, Inc, pp 134-156.

$$h_1 + h_3 = 2h_o + 2\frac{\Delta x^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)_o + \underbrace{2\frac{\Delta x^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 h}{\partial x^4}\right)_o + ...}_{\substack{\text{aproximadamente zero} \\ \text{desde que } \Delta x \approx \text{pequeno}}}$$

$$\Rightarrow h_1 + h_3 \cong 2h_o + 2\frac{\Delta x^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)_o \quad \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{h_1 + h_3 - 2h_o}{\Delta x^2}} \qquad (2)$$

eixo y: $h_2 = h_o + \Delta y\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)_o + \frac{\Delta y^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)_o + \frac{\Delta y^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 h}{\partial y^3}\right)_o + ...$

+

$$h_4 = h_o - \Delta y\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)_o + \frac{\Delta y^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)_o - \frac{\Delta y^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 h}{\partial y^3}\right)_o + ...$$

$$h_2 + h_4 = 2h_o + 2\frac{\Delta y^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)_o + \underbrace{2\frac{\Delta y^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 h}{\partial y^4}\right)_o + ...}_{\substack{\text{aproximadamente zero} \\ \text{desde que } \Delta x \approx \text{pequeno}}}$$

$$\Rightarrow h_2 + h_4 \cong 2h_o + 2\frac{\Delta y^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)_o \quad \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{h_2 + h_4 - 2h_o}{\Delta y^2}} \qquad (3)$$

Substituindo eq. (2) e (3) em na equação de Laplace eq. (1), tem-se

$$\boxed{k_x \frac{h_1 + h_3 - 2h_o}{\Delta x^2} + k_y \frac{h_2 + h_4 - 2h_o}{\Delta y^2} = 0}$$

Fazendo que

$$\frac{k_x}{\Delta x^2} = \frac{k_y}{\Delta y^2} \quad \text{ou} \quad \boxed{\Delta x = \sqrt{\frac{k_x}{k_y}}\,\Delta y}$$

isto é, **fixando uma malha retangular** , conforme a relação acima, ou redesenhando a geometria do problema a partir da transformação geométrica, tem-se

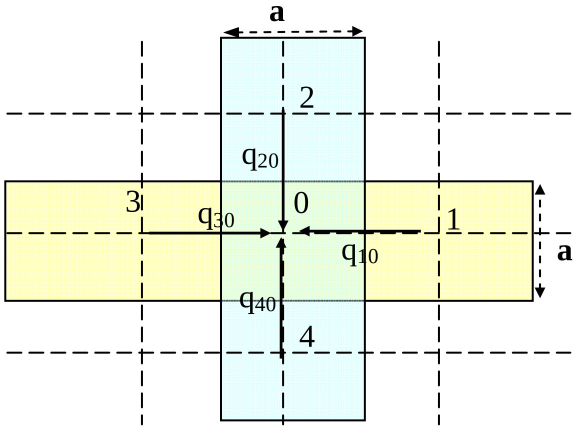
$$\boxed{h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = 4h_o} \qquad (5)$$

Em outras palavras, a eq (5) mostra que a carga total em um nó central é equivalente a media da soma das cargas totais nos nós circundantes; isto é

$$\boxed{h_o = \frac{1}{4}\left[h_1 + h_2 + h_3 + h_4\right]} \qquad (6)$$

Fisicamente este equilíbrio pode ser interpretado em termos de continuidade de vazão; isto é ,

$$\boxed{q_{entra} - q_{sai} = 0}$$



Então

$$q_{10} + q_{20} + q_{30} + q_{40} = 0$$

$$q_{10} = k\frac{h_1 - h_o}{a}a \times 1$$

$$q_{20} = k\frac{h_2 - h_o}{a}a \times 1$$

$$q_{30} = k\frac{h_3 - h_o}{a}a \times 1$$

$$+q_{40} = k\frac{h_4 - h_o}{a}a \times 1$$

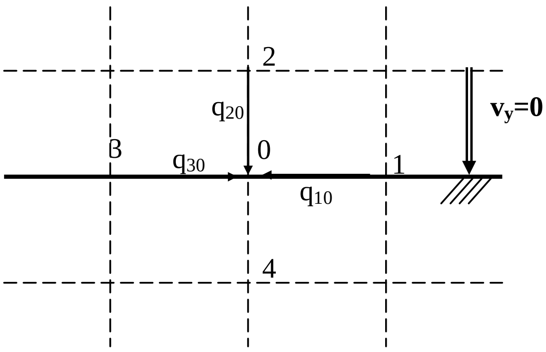
$$\sum q_{10} = k(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 - 4h_o) = 0$$

ou

$$\boxed{h_o = \frac{1}{4}\left[h_1 + h_2 + h_3 + h_4\right]}$$

1.1. Condições especiais

1.1.1. Superfície impermeável



$$v_y = k\frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

Assim sendo, no eixo y:

$$h_2 = h_o + \Delta y\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)_o + \frac{\Delta y^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)_o + \frac{\Delta y^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 h}{\partial y^3}\right)_o + ...$$

-

$$h_4 = h_o - \Delta y\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)_o + \frac{\Delta y^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)_o - \frac{\Delta y^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 h}{\partial y^3}\right)_o + ...$$

$$h_2 - h_4 = 2\Delta y\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)_o + \underbrace{2\frac{\Delta y^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 h}{\partial y^3}\right)_o + ...}_{\text{aproximadamente zero desde que } \Delta x \approx \text{ pequeno}}$$

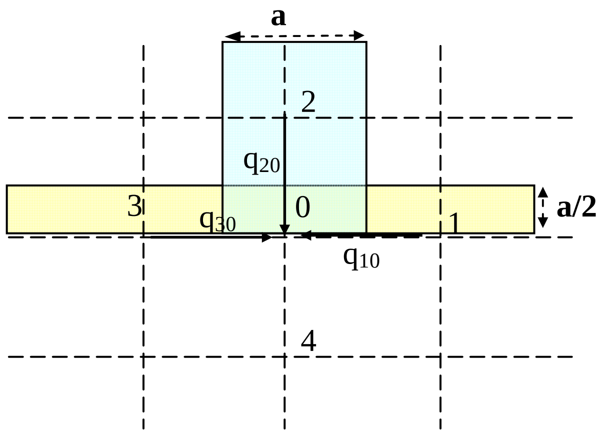
$$\Rightarrow h_2 - h_4 \cong 2\Delta y\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)_o$$

$$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{h_2 - h_4}{2\Delta y} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{h_2 = h_4}$$

Neste caso, a carga no ponto central fica definida como:

$$\boxed{h_o = \frac{1}{4}\left[h_1 + 2h_2 + h_3\right]}$$

Em termos de vazão:



$$q_{10} + q_{20} + q_{30} = 0$$

$$q_{10} = k\frac{h_1 - h_o}{a}\frac{a}{2}\times 1$$

$$q_{20} = k\frac{h_2 - h_o}{a}a\times 1$$

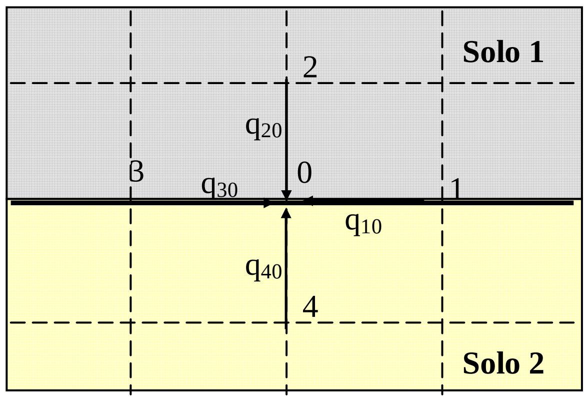
$$+ \quad q_{30} = k\frac{h_3 - h_o}{a}\frac{a}{2}\times 1$$

$$\sum q_{i0} = k\left(\frac{h_1 - h_0}{2} + h_2 + h_0 + \frac{h_3 - h_0}{2}\right) = 0$$

ou

$$\boxed{h_o = \frac{1}{4}\left[h_1 + 2h_2 + h_3\right]}$$

1.1.2. Diferentes materiais



$$q_{10} + q_{20} + q_{30} + q_{40} = 0$$

$$q_{10} = k_1\frac{h_1 - h_o}{a}\frac{a}{2}\times 1 + k_2\frac{h_1 - h_o}{a}\frac{a}{2}\times 1$$

$$q_{20} = k_1\frac{h_2 - h_o}{a}a\times 1$$

$$q_{30} = k_1 \frac{h_3 - h_o}{a} \frac{a}{2} \times 1 + k_2 \frac{h_3 - h_o}{a} \frac{a}{2} \times 1$$

$$+ \quad q_{40} = k_2 \frac{h_4 - h_o}{a} a \times 1$$

$$\sum q_{i0} = \frac{k_1}{2}(h_1 - h_0) + \frac{k_2}{2}(h_1 - h_0) + k_1(h_2 - h_0) + \frac{k_1}{2}(h_3 - h_0) + \frac{k_2}{2}(h_3 - h_0) + k_2(h_4 - h_0) = 0$$

$$\sum q_{i0} = \frac{k_1}{2}(h_1 + h_3 - 2h_0) + \frac{k_2}{2}(h_1 + h_3 - 2h_0) + k_1(h_2 - h_0) + k_2(h_4 - h_0) = 0$$

$$\sum q_{i0} = k_1(h_1 + h_3 - 2h_0) + k_2(h_1 + h_3 - 2h_0) + 2k_1(h_2 - h_0) + 2k_2(h_4 - h_0) = 0$$

$$\sum q_{i0} = h_1(k_1 + k_2) + h_3(k_1 + k_2) - 4h_0(k_1 + k_2) + 2k_1 h_2 + 2k_2 h_4 = 0$$

ou

$$\boxed{4h_0 = h_1 + h_3 + \frac{2k_1}{(k_1 + k_2)} h_2 + \frac{2k_2}{(k_1 + k_2)} h_4}$$

1.2. Aplicação

O método consiste em subdividir a geometria do problema em nós com espaçamento (os nós são internos à malha):

$$\boxed{\Delta x = \sqrt{\frac{k_x}{k_y}}\, \Delta y}$$

Alternativamente, pode-se alterar a escala do problema e permanecer usando malha quadrada, desde que na seção transformada:

$$\boxed{x_T = \sqrt{\frac{k_y}{k_x}}\, x}$$

Deve-se satisfazer as seguintes equações de continuidade

Exemplo

Solução A: Método Iterativo

- ✓ *chutar valores de hi a partir de um traçado estimado de rede de fluxo*
- ✓ *corrigir os valores satisfazendo as equações de equilíbrio*
- ✓ *repetir o processo até convergência ser atingida*

Solução B: Método da Relaxação (diferencas finitas - relaxação.xls)

- ✓ *chutar valores de hi a partir de um traçado estimado de rede de fluxo*
- ✓ *calcular o resíduo (R_o)*

$$\boxed{R_o = [h_1 + h_2 + h_3 + h_4] - 4h_o}$$

- ✓ *se o resíduo for diferente de zero, este pode ser eliminado somando-se ao nó o valor do resíduo com sinal negativo ($-R_o$). Entretanto, alterando o no central em (+1), contribui-se em (-4) para o residuo do no central e (+1) para os resíduos dos nos circundantes, dado que*

$$\boxed{[h_1 + h_2 + h_3 + h_4] - 4h_o = 0}$$

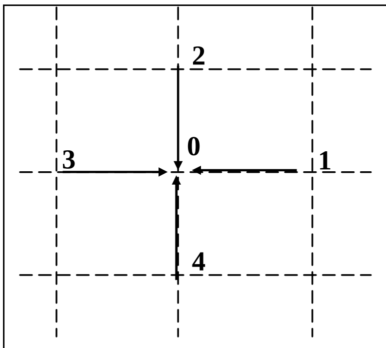
- ✓ *Para obter uma solução mais eficiente,, deve-se eliminar o resíduo ponto a ponto, tendo como inicio aquele que apresenta o maior resíduo.*
- ✓ *Se o resíduo é alterado, a carga total é alterada por um* **Fator de distribuição** *de -1/4; isto é se R_o=-10 e for adicionado ao nó (+10) a carga final será:*

$$h_{i+1} = h_i + \left(-\tfrac{1}{4}\right) \times (10)$$

ou

$$h_{i+1} = h_i + \left(-\tfrac{1}{4}\right) \times (-R_0) = h_i + \frac{R_0}{4}$$

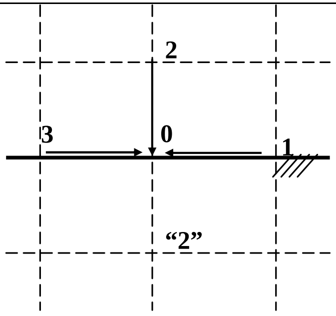
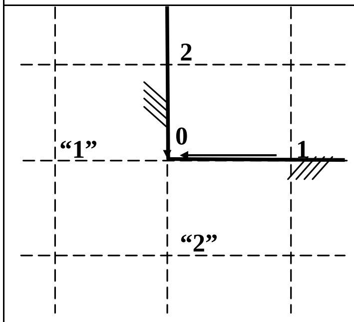
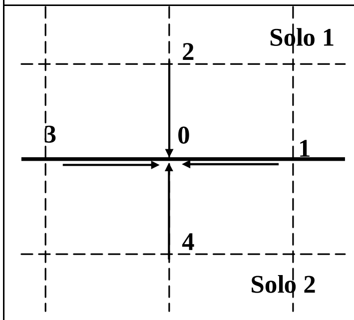
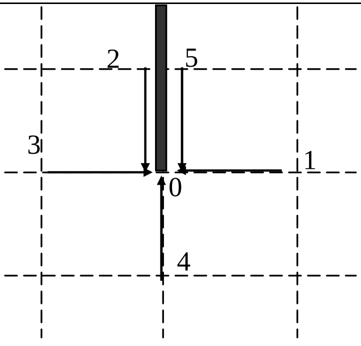
é transmitido aos outros nós. Este fator é denominado de e deve ser aplicado à correção do nó, para que o erro seja transferido para os outros nós.



Ponto central

$$\boxed{h_o = \frac{1}{4}[h_1 + h_2 + h_3 + h_4]}$$

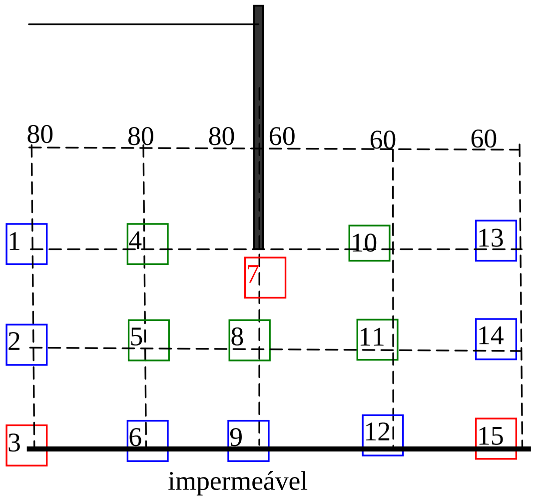
Fator de distribuição = 1/4

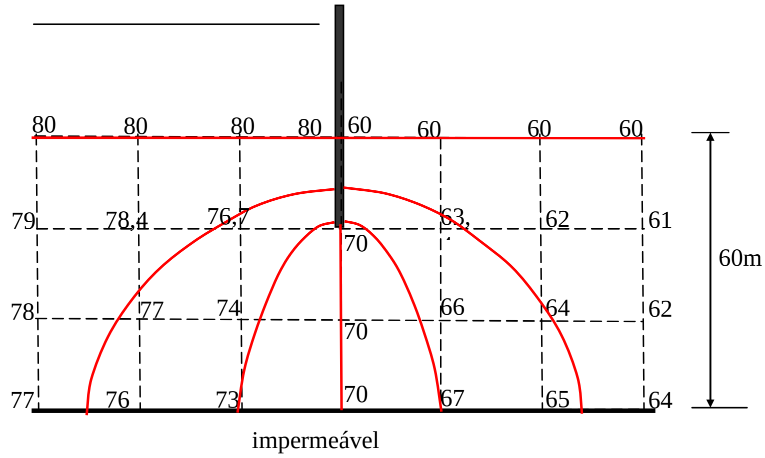
<table>
<tr>
<td></td>
<td>Superfície impermeável (eixo y)
$$\boxed{h_o = \frac{1}{4}\left[h_1 + 2h_2 + h_3\right]}$$
Fator de distribuição = 1/4</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Superfície impermeável (eixos x e y)
$$\boxed{h_o = \frac{1}{4}\left[2h_1 + 2h_2\right]}$$
Fator de distribuição = 1/4</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Diferentes materiais
$$\boxed{4h_0 = h_1 + h_3 + \frac{2k_1}{(k_1 + k_2)}h_2 + \frac{2k_2}{(k_1 + k_2)}h_4}$$
Fator de distribuição = 1/4</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Parede impermeável
$$\boxed{h_o = \frac{1}{4}\left[h_1 + h_3 + h_4 + \frac{h_2 + h_5}{2}\right]}$$
Fator de distribuição = 1/4</td>
</tr>
</table>

A convergência do resíduo é função dos valores calculados; isto é, se a soma dos resíduos é nula, o processo converge. Caso contrário não há convergência.

É importante observar que o **Erro é proporcional ao quadrado da discretização**. Portanto, quanto menor a discretizacao, menor será o erro.

Exemplo





Equações:

Nós 1, 2, 6, 9, 12, 13, 14:⇨ $\boxed{[h_1 + 2h_2 + h_3] - 4h_o = R_o}$

Nós 3, 15: ⇨ $\boxed{[2h_1 + 2h_2] - 4h_o = R_o}$

Nós 4, 5, 8, 10, 11 : ⇨ $\boxed{[h_1 + h_2 + h_3 + h_4] - 4h_o = R_o}$

Nós 7 : ⇨ $\boxed{h_o = \frac{1}{4}\left[h_1 + h_3 + h_4 + \frac{80+60}{2}\right] - 4h_o = R_o}$

Iteracao 1			
Ponto	Carga Inicial	Residuo	Carga Final
1	79,0	-1,2	78,7
2	78,0	-2,0	77,5
3	77,0	0,0	77,0
4	78,4	-7,6	76,5
5	77,0	-5,6	75,6
6	76,0	-3,0	75,3
7	70,0	0,4	70,1
8	70,0	0,0	70,0
9	70,0	3,0	70,8
10	62,0	7,0	63,8
11	63,0	10,0	65,5
12	67,0	-5,0	65,8
13	62,0	-1,0	61,8
14	63,0	3,0	63,8
15	67,0	-8,0	65,0
	SOMA	-10,0	

Iteracao 2		
Carga Inicial	Residuo	Carga Final
78,7	-4,3	77,6
77,5	-3,1	76,7
77,0	-2,5	76,4
76,5	-1,6	76,1
75,6	-3,1	74,8
75,3	-2,1	74,7
70,1	-0,1	70,1
70,0	1,9	70,5
70,8	-2,0	70,3
63,8	2,4	64,3
65,5	1,3	65,8
65,8	3,8	66,7
61,8	4,3	62,8
63,8	2,8	64,4
65,0	-1,0	64,8
SOMA	-3,6	

Iteracao 3		
Carga Inicial	Residuo	Carga Final
77,6	-1,6	77,2
76,7	-3,3	75,9
76,4	-2,6	75,7
76,1	-1,9	75,6
74,8	-1,2	74,5
74,7	-2,7	74,1
70,1	0,7	70,2
70,5	-1,0	70,2
70,3	1,4	70,6
64,3	1,3	64,7
65,8	2,7	66,5
66,7	-0,1	66,7
62,8	1,9	63,3
64,4	1,4	64,8
64,8	3,3	65,6
SOMA	-1,7	

Iteracao 4		
Carga Inicial	Residuo	Carga Final
77,2	-1,8	76,8
75,9	-1,6	75,5
75,7	-3,0	75,0
75,6	-0,5	75,5
74,5	-2,2	74,0
74,1	-0,9	73,8
70,2	-0,4	70,1
70,2	0,9	70,5
70,6	-1,2	70,3
64,7	1,3	65,0
66,5	0,4	66,6
66,7	2,5	67,3
63,3	1,0	63,5
64,8	2,6	65,5
65,6	0,7	65,7
SOMA	-2,2	

Iteracao 5		
Carga Inicial	Residuo	Carga Final
76,8	-0,7	76,6
75,5	-2,3	74,9
75,0	-1,3	74,7
75,5	-1,1	75,2
74,0	-0,5	73,8
73,8	-2,2	73,3
70,1	0,4	70,2
70,5	-0,9	70,2
70,3	0,9	70,5
65,0	0,3	65,1
66,6	1,8	67,0
67,3	0,1	67,3
63,5	1,3	63,9
65,5	0,6	65,6
65,7	2,6	66,4
SOMA	-0,9	

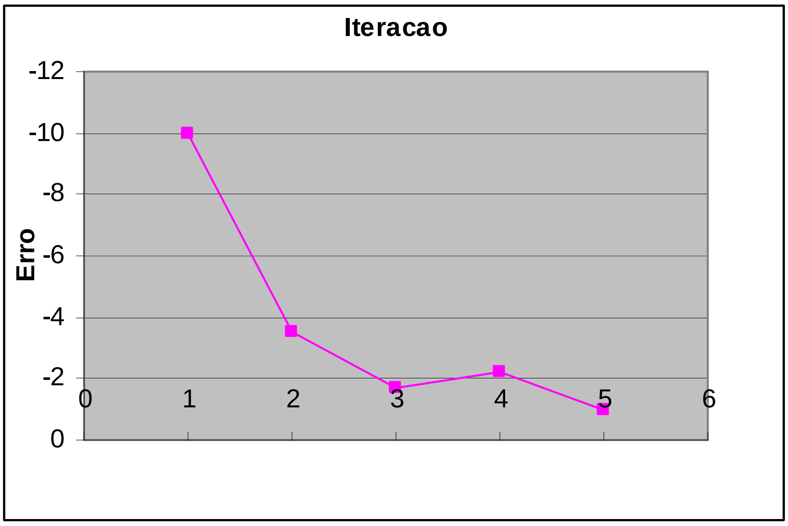


Figura 2. Evolução do Erro

Solução C: Montagem da matriz

A montagem da matriz é feita escrevendo as equações de equilíbrio conforme mostra o exemplo abaixo

No	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	Carga
(1)	$-4h_1$	h_2		$2h_4$						80
(2)	h_1	$-4h_2$	h_3		$2h_5$					
(3)		$2h_2$	$-4h_3$			$2h_6$				
(4)	h_1			$-4h_4$	h_5		h_7			80
(5)		h_2		h_4	$-4h_5$	h_6		h_8		
(6)			h_3		$2h_5$	$-4h_6$			h_9	
(7)*				h_4			$-4h_7$	h_8		(80 +60)/2
(8)					h_5		h_7	$-4h_8$	h_9	
(9)*						h_6		$2h_8$	$-4h_9$	

Nota: * a tabela esta incompleta

Matriz [R]

-4	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-4	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	2	-4	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	-4	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	-4	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	2	-4	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	2	-4	1	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	-4	1	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	2	-4	1		1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	-4			2	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-4	2		2	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0		-4			2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1			-4	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		1	-4	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		1	0	2	-4

$$[R]\begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ h_{15} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -80 \\ \vdots \\ \vdots \\ -60 \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix}$$